

01;04

## О квазистойчивости бицилиндра плазмы

© В.П. Власов, Б.А. Трубников

Институт ядерного синтеза Российского научного центра „Курчатовский институт“,  
123182 Москва, Россия  
e-mail: vlasov@nfi.kiae.ru, batrub@nfi.kiae.ru

(Поступило в Редакцию 1 октября 2002 г. В окончательной редакции 6 декабря 2002 г.)

Наблюдения, по-видимому, показывают, что в плазме токамаков и Z-пинчей кратковременно могут возникать замкнутые токовые петли (филаменты) из двух противотоков, заполняющих две половины сечения цилиндра плазмы, перпендикулярного основному магнитному полю. Такую плазменную структуру для краткости мы условимся называть „бицилиндром“, и в данной работе показана возможность его фактической устойчивости (назовем ее „квазистойчивостью“). В Дополнении к работе обсуждается возможный механизм рождения сравнительно недавно открытых на токамаках особых возмущений, называемых „глобами“.

### „Бицилиндр“ плазмы

50 лет назад один из нас (Б. Трубников) в первой своей научной работе [1] „Об устойчивости цилиндра плазмы“ рассмотрел перетяжки на Z-пинче, обрыв которых приводит к рождению нетермоядерных нейтронов в дейтериевых пинчах. В данной работе мы рассматриваем равновесие и устойчивость отчасти сходной с Z-пинчами плазменной конфигурации, представленной на рис. 1.

На нем в плоскости  $x, y$  показано сечение плазменного цилиндра с круговым сечением, по двум половинкам которого вдоль оси  $z$  текут распределенные по плазме противотоки  $\pm I$ . Цилиндр находится в однородном внешнем поле  $B_y = B_0$ , и такую конфигурацию мы для краткости будем называть „бицилиндром“ плазмы. Наличие таких структур в токамаках и Z-пинчах ранее было обнаружено в работах А.Б. Кукушкина и В.А. Ранцева-Картинова (ниже — КРК [2] и цитированную там литературу). На рис. 2 показана одна из обнаруженных ими фотографий с подобными структурами из их работы [2]. Здесь слева (1) и справа (2) видны структуры типа „трубок“, и КРК считают, что они являются „кабелями из твердотельных углеродных нанотрубок“.

### Равновесие парных противотоков во внешнем магнитном поле

По нашему мнению, однако, здесь нет оснований для столь фантастических предположений, и такие структуры, скорее всего, являются парными токовыми нитями, образующимися по схеме, приведенной на рис. 3.

Предположим, что вначале мы разложили на столе две бесформенные петли из гибких проводов, дальние (верхние на рис. 3) вводы которых закреплены. Вверх, перпендикулярно столу, направлено магнитное поле  $B_y = B_0$ . Затем включаем батареи постоянного тока, взаимодействие которого с полем  $B_0$  приводит к движению петель (трением о стол пренебрегаем). Тогда правая петля, в которой ток течет по правому винту по отношению к магнитному полю, расправится и примет

вид окружности. Если же нить растяжима, то правая петля исчезнет в процессе бесконечного расширения.

Левая же петля с противоположным током, взаимодействуя с полем  $B_0$ , начнет стягиваться в две параллельные линии. Они будут сближаться до тех пор, пока не скажется эффект отталкивания противоположных токов двух ее половин. Нетрудно видеть, что они

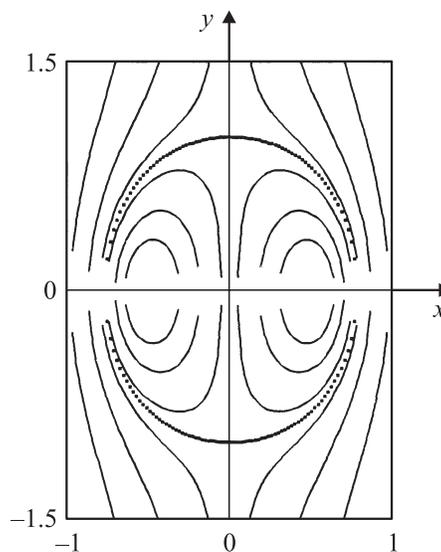
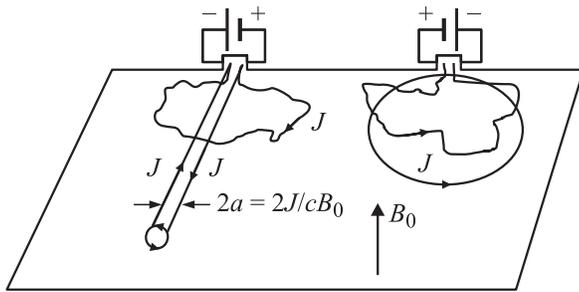


Рис. 1. Силовые линии двух противотоков, текущих вдоль оси  $z$ , во внешнем поле  $B_0$ , направленном вдоль оси  $y$ .



Рис. 2. Филаменты на периферии токамака Т-6 (из [2]). Ось  $x$  направлена вдоль тороидального поля, ось  $y$  — от стенки к плазменному шнуру.



**Рис. 3.** Поведение двух токовых петель в вертикальном магнитном поле  $B_0$ .

сблизятся так, чтобы расстояние между ними было бы равно  $2a = 2I/cB_0$ , при котором суммарное поле на обеих линиях обратится в нуль (при тонких проводах такая ситуация, конечно, неустойчива по отношению к их вертикальным смещениям, однако, см. далее).

Теперь рассмотрим поведение торцевой перемычки между двумя половинами левой пары токов. На первый взгляд, казалось бы, что взаимодействие ее тока  $I$  с полем  $B_0$  должно удалять перемычку от читателя, как бы сминая ее. Однако перемычка все же должна двигаться в направлении к читателю, и, чтобы убедиться в этом, заметим, что вдали от торца на линии  $z = \text{const}$ , пересекающей два тока, суммарное магнитное поле равно  $B_y = B_0 [1 - 4a^2/(a^2 - x^2)]$ . И в промежутке между токами оно оказывается отрицательным, в частности в середине при  $x = 0$  имеем  $B_y = -3B_0 < 0$ , что и приводит к движению перемычки в направлении к читателю и к удлинению пары, которая, как бы сама собой растягивается и „прорастает“ в направлении поперек магнитного поля.

Рассмотрим подробнее фигуру равновесия двух полу-бесконечных противотоков. Если по формуле Био-Савара подсчитать магнитное поле прямого бесконечно тонкого „половинного“ тока  $I$ , текущего вдоль оси  $z$  из  $z = -\infty$  до  $z = 0$ , то получим выражение (в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ )

$$B_\varphi = \frac{I}{cr} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (1)$$

При  $z = -\infty$  это поле, как и следует, равно  $B_\varphi = 2I/cr$ , но при  $z = 0$  оно оказывается вдвое меньше. Таким образом, для равновесия пары противоположно направленных „половинных“ токов  $\pm I_z$  во внешнем поле  $B_0 = B_y$ , они должны при подходе к торцу  $z = 0$  сблизиться на вдвое меньшее расстояние  $2a_{\text{new}} = I/cB_0$ , чем полные токи с длинами  $-\infty \leq z \leq +\infty$ .

Если ввести безразмерные переменные  $Z = z/a$ ,  $X = x/a$ , где  $a = I/cB_0$ , то из приведенной выше формулы нетрудно найти профили двух таких уравновешивающих друг друга и сближающихся к торцу проводников во внешнем поле

$$Z = (1 - 2|X|) \sqrt{|X|/(1 - |X|)}, \quad (2)$$

где  $|X|$  — модуль  $X$ .

На крайней правой паре нитей рис. 2 явно видно их сближение по мере приближения к „верхнему торцу“, в который они „втыкаются“.

### Замыкание двух противотоков на торцах

Более того, по-видимому, ток перемычки стремится раздвоиться и принять форму двух полуокружностей (рис. 1). На возможность такой структуры указывает картина силовых линий в сечении „торца“. Если для упрощения считать, что эта картина такая же, как для двух тонких бесконечно длинных противотоков  $\pm I$  при (вдвое меньшем) расстоянии между ними  $2a_{\text{new}} = I/cB_0$ , то силовые линии ( $A = \text{const}$ ) описываются простой формулой

$$Y = \frac{y}{a_{\text{new}}} = \pm \sqrt{4X \coth(A + 2X) - 1 - 4X^2}. \quad (3)$$

Они приведены на рис. 1, где пунктиром указана сепаратриса.

„Трубчатые“ детали фотографий КРК выглядят так, как будто ток  $+I$ , придя из  $z = -\infty$  в точку  $x = +a_{\text{new}}$ , затем идет направо до близкой правой „экваториальной“ точки общей круговой сепаратрисы. Там он раздваивается и по двум полуокружностям (верхней и нижней, т. е. вдоль сепаратрисной силовой линии) идет в левую „экваториальную“ точку сепаратрисы, где два тока  $I/2$  вновь сливаются. Затем ток идет направо к торцу  $x = -a_{\text{new}}$ , от которого уходит на  $z = -\infty$ .

Ясно, что при конечной длине прямых участков сепаратриса из двух полуокружностей должна формироваться и на удаленном торце структуры, и примерно так на рис. 2 выглядит „трубка“ слева. В целом это может выглядеть как „беличье колесо“ с двумя „колесными“ торцами и двумя „перекладинами“ между ними, что, как нам кажется, и увидели КРК в плазме токамаков, ошибочно приняв такие структуры за „твердотельные нанотрубки“.

По-видимому, это свидетельствует, что в токамаке происходят краткие местные флюктуации основного продольного магнитного поля, порождающие перпендикулярные полю замкнутые токовые петли, которые в последующем эволюционируют в парные противотоки описанным выше образом. Вторым механизмом порождения структур типа „беличьего колеса“ с перекладинами, перпендикулярными полю, может оказаться флюктуативно возникающая местная разность потенциалов между соседними магнитными поверхностями, особенно вблизи резонансных поверхностей с целыми значениями параметра  $q$  (в теории токамаков его называют „запасом устойчивости“). Дифференциальное вращение поверхностей по малому радиусу может в некий момент привести к локальному близкому противостоянию двух участков (типа „пятен“) с разными потенциалами, словно двух обкладок конденсатора. Разность потенциалов

может породить перпендикулярный полю локальный пучок частиц, разбивающийся на отдельные нити-филаменты (перекладины) с последующим образованием колесообразных торцов.

### Равновесие плазменного „бицилиндра“ во внешнем поле

Возвращаясь к рис. 1, заметим, что два бесконечно длинных и бесконечно тонких проводника с противотоками во внешнем поле, конечно, неустойчивы относительно смещений по вертикальной оси  $y$ . Однако можно предполагать, что такая структура будет устойчивой при плазменном заполнении цилиндрической сепаратрисы. Рассмотрим вначале равновесие „бицилиндра“.

Для простоты будем считать, что вне цилиндра токи отсутствуют, поэтому для внешнего векторного потенциала  $A = A_z(r, \varphi)$  имеем плоское уравнение Лапласа

$$\Delta A = 0, \quad A = -B_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi, \quad (4)$$

определяющее компоненты поля

$$B_r = \frac{\partial A}{r \partial \varphi} = B_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi, \\ B_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r} = B_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi. \quad (5)$$

На поверхности цилиндра  $r = a$  имеем  $B_r = 0$ ,  $B_\varphi = 2B_0 \cos \varphi$ ,  $B^2/8\pi = (B_0^2/2\pi) \cos^2 \varphi$ . Снаружи имеется также однородная плазма с давлением  $p_0 = \text{const}$ . Далее рассмотрим внутренность цилиндра.

Внутри цилиндра текут токи  $j = j_z$ , поэтому имеем МГД уравнения

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j, \quad B_x = A'_y, \quad B_y = -A'_x, \\ p'_x = \frac{j}{c} A'_x, \quad p'_y = \frac{j}{c} A'_y. \quad (6)$$

Отсюда видно, что  $p = p(A)$  — произвольная функция и плотность тока равна  $j = cd p/dA$ . Полагая  $p(A) = p_0 + |\beta|A^2$ , имеем ток  $j = 2c|\beta|A$  и уравнение Бесселя для векторного потенциала

$$A''_{rr} + \frac{1}{r} A'_r + \frac{1}{r^2} A''_{\varphi\varphi} + k^2 A = 0, \quad (7)$$

где  $k = \sqrt{8\pi|\beta|}$ .

Решение с первой функцией Бесселя дает компоненты потенциала и поля внутри цилиндра

$$A = A_0 J \cos \varphi, \quad B_r = -\frac{A_0}{r} J \sin \varphi, \\ B_\varphi = -A_0 k J' \cos \varphi, \quad (8)$$

где  $J = J_1 = J_1(\rho)$ ,  $\rho = kr$ , и позволяет удовлетворить всем требуемым условиям равновесия конфигурации.

А именно на поверхности цилиндра  $r = a$  внутренняя компонента  $B_r$  будет обращаться в нуль, если  $J_1(ka) = 0$ , где  $ka = N_1 = 3.8317$  — первый нуль первой функции Бесселя, которая в пределах  $0 < \rho < 3.8317$  приближенно равна  $J_1(\rho) \approx (\rho/2)[1 - (\rho/3.8317)^2]$ . А тогда на поверхности цилиндра имеем  $A = 0$  и здесь внутреннее давление плазмы равно просто  $p_{A=0} = p_0$ , как и во всем внешнем пространстве.

Компонента же  $B_\varphi = B_a \cos \varphi$ , где  $B_a = -A_0 k J'(ka)$ , создает на цилиндре магнитное давление  $P_m = (B_a^2/8\pi) \cos^2 \varphi$ , так что полное равновесие конфигурации с „дипольно-токовым“ цилиндрическим пучком, раздвигающим силовые линии внешнего магнитного поля, будет достигнуто, если  $B_a = 2B_0$ . Из таблиц также найдем  $J'(N_1) = -0.4028$ , что позволяет определить амплитуду  $A_0 = 1.3aB_0$ , тогда плотность тока равна  $j = j_0 J_1(kr) \cos \varphi$ , где  $j_0 = 1.5(cB_0/a)$ . При этом через правую половину сечения цилиндра течет ток  $I_+ \approx 0.8caB_0$  и такой же, но обратный ток течет через левую половину сечения. Если ток  $I_+$  и поле  $B_0$  заданы, то отсюда найдем равновесный радиус цилиндра  $a = I_+/0.8cB_0$ . Например, поперек основного поля токамака  $B_0 = 10 \text{ kGs}$  дипольный ток силой в  $I_+ = -I_- = 10 \text{ kA}$  должен иметь диаметр порядка  $2a \sim 3 \text{ mm}$ , чтобы находиться в равновесии с полем  $B_0$ . Филаменты примерно такого размера и наблюдают КРК [2].

### Исследование устойчивости по интегралу $J = \int dl/B$

Плазменно-токовые филаменты типа „бицилиндра“ с торцами можно условно называть „ложно-трубчатыми структурами“, поскольку они похожи на „трубки“. И если они реально существуют (в чем сомневаются многие критики работ КРК, см. [2] и опубликованные там же две ее рецензии), то важной проблемой оказывается исследование их устойчивости. Основным показателем устойчивости „бицилиндра“ можно считать правильное поведение интеграла  $J = \int dl/B$  вблизи поверхности цилиндра, где этот интеграл, как показано ниже, убывает к периферии.

Для сравнения предварительно напомним, что обычный Z-пинч радиуса  $a$  с током  $I = I_z$  имеет снаружи поле  $B = 2I/cr$ , для которого указанный интеграл равен  $J_{\text{ext}} = \pi(c/I)r^2 \sim r^2$ , и возрастание этого интеграла в направлении к периферии указывает на неустойчивость Z-пинча по отношению к растущим перетяжкам. Внутри же пинча с током, равномерно распределенным по сечению, поле  $B = B_0 r/a$  дает интеграл  $J_{\text{int}} = \pi(c/I)a^2 = \text{const}$ , постоянный по сечению и поэтому не влияющий на устойчивость.

Однако, возможно, более близким к нашему бицилиндру является Z-пинч с неоднородным по сечению током и давлением вида  $p = p(A) = p_0 + \beta A^2$ . Для этого

случая ток равен  $j = cd\rho/dA = 2c\beta A$  и для векторного потенциала получаем уравнение Бесселя

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\Delta A = (4\pi/c)j = k^2 A, \quad (9)$$

$$A = A_z = A_0 J_0(z),$$

где  $z = kr$ ,  $k^2 = 8\pi\beta$ .

Радиус пинча  $a$  определяется соотношением  $ka = N_0 = 2.4$  — первый нуль нулевой функции Бесселя, а поле равно  $B = B_\varphi = -\partial A/\partial r = -A_0 k J'_0(z) = A_0 k J_1(z)$ , где  $J_1(z)$  — первая функция Бесселя. При заданном полном токе  $I$  имеем амплитуду векторного потенциала  $A_0 = 2I/cN_0 J_1(N_0)$ , где  $J_1(N_0) = 0.52$  и  $N_0 J_1(N_0) = 0.2166$ . На границе пинча имеем значение интеграла  $J_a = \int dl/B = \pi a^2 c/I$ , а внутри пинча  $J_{\text{int}} = \int dl/B = J_a f(r)$ , где  $f(r) = 0.2166z/J_1(z)$  и этот множитель возрастает от значения  $f(0) = 2 \cdot 0.2166$  на оси пинча до значения  $f(r=a) = 1$  на границе. Далее во внешней области интеграл растет по закону  $J_{\text{ext}} = (r/a)^2 J_a$ , так что он всюду возрастает, что и ведет к неустойчивости такого пинча по отношению к перетяжкам.

Для „бицилиндра“ ситуация снаружи оказывается противоположной, поскольку интеграл  $J_{\text{bc}} = \int dl/B$  убывает в направлении к периферии, что должно препятствовать росту перетяжек. Подсчитаем этот интеграл снаружи, где потенциал и поле равны соответственно

$$A = -B_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi, \quad (10)$$

$$B_r = \frac{\partial A}{r \partial \varphi} = B_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi,$$

так что находим

$$J_{\text{bc}} = \int \frac{dr}{B_r} = 2 \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{B_0^2 [1 - (a/r)^2]^2 - (A/r)^2}}, \quad (11)$$

где интеграл следует вычислять вдоль внешней силовой линии  $A(r, \varphi) = \text{const}$ .

Введя переменные  $x = (r/a)^2$  и затем полагая  $x = x_{\text{min}} + (y/a)^2$ , перепишем этот интеграл в виде

$$J_{\text{bc}} = \frac{a}{B_0} \int_{x_{\text{min}}}^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{(x - x_{\text{min}})(x - x_{\text{min}}^{-1})}} = \frac{2}{B_0} \int_0^{\infty} R dy, \quad (12)$$

где  $R = R(y) = (1 - \xi)^{-1/2}$ ,  $\xi = 1/x_{\text{min}} [x_{\text{min}} + (y/a)^2]$ ,  $x_{\text{min}} = (r_{\text{min}}/a)^2$ , причем  $x_{\text{min}} > 1$  ввиду  $r_{\text{min}} > a$ , так что  $\xi < 1$ , поэтому функцию  $F$  можно разложить в ряд

$$R = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \xi^n. \quad (13)$$

Интеграл  $J_{\text{bc}}$  расходится, поскольку длина внешних силовых линий бесконечна, однако первый член разложения с единицей  $J_{\text{bc}}^{(1)} = (2/B_0) \int_0^{\infty} dy$  следует отбросить, поскольку он соответствует прямым силовым ли-

ниям однородного поля, не возмущенного присутствием „бицилиндра“. Окончательно получаем „эффективный“ интеграл

$$J_{\text{bc}} \rightarrow J_{\text{eff}} = \frac{2}{B_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^{\infty} \xi^n dy$$

$$= \frac{\pi a}{2B_0} z^3 F \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; z^4 \right), \quad (14)$$

где  $z = a/r_{\text{min}} < 1$ ,  $F$  — гипергеометрический ряд.

Поскольку  $J_{\text{eff}}$  убывает с ростом  $r_{\text{min}} > a$ , то полученный результат позволяет ожидать устойчивости „бицилиндра“, по крайней мере по отношению к перетяжкам на его границе. Внутри его ситуация оказывается неустойчивой по отношению к змейкам, однако проделаем более детальное исследование.

## Энергетический принцип устойчивости

Далее для простоты будем считать, что снаружи цилиндра плазма отсутствует и имеется лишь вакуумное поле, так что можно использовать хорошо известный обобщенный энергетический принцип устойчивости (см., например, [3]), требующий выполнения условия  $S_1 + S_2 + S_3 > 0$ , где  $S_i$  — три интеграла. Последний „вакуумный“ интеграл  $S_3$  берется по внешнему объему вакуума и всегда положителен, так что нужно рассмотреть лишь первые два интеграла. „Поверхностный“ интеграл  $S_2$  берется по поверхности плазмы, т.е. в нашем случае по поверхности цилиндра, и оказывается равным

$$S_2 = \int \xi_r^2 \frac{d\langle P \rangle}{dr} d\sigma,$$

$$\langle P \rangle = P_e - P_i = \frac{B_e^2}{8\pi} - \left( p + \frac{B_i^2}{8\pi} \right). \quad (15)$$

Здесь  $B_{e,i}$  — внешнее и внутреннее поля и  $p$  — давление плазмы. Из формул, полученных ранее, найдем разность суммарных давлений

$$\langle P \rangle = \frac{B_0^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{a^4}{r^4} + 2 \frac{a^2}{r^2} \cos 2\varphi \right) - \frac{A_0^2}{8\pi} \left[ k^2 (J^2 + J'^2) \cos^2 \varphi + \frac{J^2}{r^2} \sin^2 \varphi \right], \quad (16)$$

ее производная при  $r = a$  оказывается равной нулю

$$\left( \frac{d\langle P \rangle}{dr} \right)_{r=a} = \left[ (A_0 k J')^2 - 4B_0^2 \right] \frac{\cos^2 \varphi}{4\pi a} = 0, \quad (17)$$

так что „поверхностный“ интеграл выпадает и остается только первый интеграл по объему „жидкости“, т.е. по объему цилиндра.

Этот объемный интеграл равен

$$S_1 = \int \mathcal{L} dV, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} R^2 + \frac{1}{c} (\mathbf{j}[\xi \mathbf{R}]) + \gamma p D^2 + (\xi \nabla p) D, \quad (18)$$

где  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты,  $D = \operatorname{div} \xi$ ,  $\mathbf{R} = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}]$ . Здесь и выше  $\xi$  — „пробная“ функция (скорость „начального толчка“), условие устойчивости  $S_1 > 0$  должно выполняться при любых ее значениях.

Далее, как это хорошо известно, следует выделить в возмущении продольную и поперечную к полю части, положив  $\xi = \xi_{\parallel} + \xi_{\perp}$ . Продольная компонента  $\xi_{\parallel}$  не входит в  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* = \operatorname{rot} [\xi_{\perp} \mathbf{B}]$ , и „лагранжиан“ можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} R_*^2 + \frac{1}{c} (\mathbf{j}[\xi_{\perp} \mathbf{R}_*]) + \gamma p (D_{\perp} + D_{\parallel})^2 + (\xi_{\perp} \nabla p) D_{\perp} + \delta, \quad (19)$$

где мы особо выделили часть  $\delta = c^{-1} (\mathbf{j}[\xi_{\parallel} \mathbf{R}_*]) + (\xi_{\perp} \nabla p) D_{\parallel}$ , которая, как известно, сводится к полной дивергенции по объему и выпадает из-за граничных условий на поверхности цилиндра. После этого  $\xi_{\parallel}$  остается лишь в члене с квадратом дивергенции  $\gamma p (D_{\perp} + D_{\parallel})^2$ , и если  $D_{\parallel} = \operatorname{div} \xi_{\parallel} \neq 0$ , то самые опасные возмущения, минимизирующие „лагранжиан“, будут при условии  $\operatorname{div} \xi = 0$ , что соответствует модели несжимаемой жидкости, которую мы и рассмотрим.

## Исследование устойчивости в модели несжимаемой жидкости

Итак, остается часть, содержащая только перпендикулярную полю компоненту возмущения  $\xi_{\perp}$ ,

$$\mathcal{L}_* = \frac{1}{4\pi} R_*^2 + \frac{1}{c} (\mathbf{j}[\xi_{\perp} \mathbf{W}]), \quad \mathbf{W} = \mathbf{R}_* - \mathbf{B} D_{\perp}, \quad (20)$$

и для устойчивости необходимо условие  $\mathcal{L}_* > 0$ . Далее удобно ввести три единичных вектора  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = [\mathbf{tn}]$  — касательный, нормальный и бинормальный к силовой линии в каждой точке. Полагая  $\xi_{\perp} = \mathbf{n} \xi_n + \mathbf{b} \xi_b$ , введем обозначения  $f = B \xi_n$ ,  $g = B \xi_b$  и тогда найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_* &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{R}_1 = \operatorname{rot} [\xi_n \mathbf{B}] = \mathbf{n} \nabla_t f - \mathbf{t} \nabla_n f, \\ \mathbf{R}_1^2 &= (\nabla_t f)^2 + (\nabla_n f)^2, \\ \mathbf{R}_2 &= \operatorname{rot} (g \mathbf{n}) = \mathbf{b} \mu - \mathbf{t} \nabla_b g, \quad \mu = g \operatorname{div} \mathbf{t} + \nabla_t g, \\ \mathbf{R}_2^2 &= \mu^2 (\nabla_b g)^2, \quad (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = (\nabla_n f) (\nabla_b g). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь для краткости мы ввели удобные обозначения для трех компонент оператора „набла“  $\nabla_{t,n,b}$ , и, таким образом, имеем первый член „лагранжиана“

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} R_*^2 &= \frac{1}{4\pi} [(\nabla_t f)^2 + v^2 + \mu^2], \\ v &= \nabla_n f + \nabla_b g, \quad \mu = g \operatorname{div} \mathbf{t} + \nabla_t g. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, найдем вектор

$$\mathbf{W} = \mathbf{n} \nabla_t f + \mathbf{b} \mu - \mathbf{t} \left[ 2v - \frac{f}{B} (\operatorname{rot} \mathbf{B} + 2 \nabla_n B) \right] \quad (23)$$

и второй член лагранжиана

$$\frac{1}{c} (\mathbf{j}[\xi_{\perp} \mathbf{W}]) = \frac{1}{4\pi} (2v\psi - \psi^2 \Phi), \quad (24)$$

где обозначено  $\psi = (f/B) |\operatorname{rot} \mathbf{B}|$  и  $\Phi = 1 + 2(\nabla_n B) / |\operatorname{rot} \mathbf{B}|$ .

Собирая результаты, удобно записать условие устойчивости в виде

$$4\pi \mathcal{L}_* = (\nabla_t f)^2 + L^2 + M^2 + N > 0, \quad (25)$$

где  $L = v + \psi = \nabla_n f + \nabla_b g + (f/B) |\operatorname{rot} \mathbf{B}|$ ,  $M = g \operatorname{div} \mathbf{t} + \nabla_t g$ ,  $N = -\psi^2 (1 + \Phi) < 0$ .

Полезно также отметить соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{n} = -\frac{1}{B} (|\operatorname{rot} \mathbf{B}| + \nabla_n B),$$

позволяющее переписать единственный отрицательный последний член формулы (24) в виде

$$N = -\psi^2 (1 + \Phi) = 2f^2 \frac{|\operatorname{rot} \mathbf{B}|}{B} \operatorname{div} \mathbf{n} < 0, \quad (26)$$

откуда видно, что неустойчивость может быть обусловлена лишь отрицательностью дивергенции нормали  $\operatorname{div} \mathbf{n} < 0$ , т.е. выпуклостью внутренних силовых линий.

Далее, как и в обычном Z-пинче, учтем, что равновесная система однородна по оси  $z$ , поэтому бинормальную компоненту возмущения можно выбрать в виде  $g = g_1 \sin kz + g_2 \cos kz$ , тогда в пределе минимизации  $g_{1,2} \rightarrow 0$  получим  $M \rightarrow 0$ . Величина же  $L$  содержит производную  $\nabla_b g = \partial g / \partial z = k g_1 \cos kz - k g_2 \sin kz$ , и в пределе  $k \rightarrow \infty$  множители  $k g_{1,2}$  можно считать конечными величинами и выбрать их так, чтобы иметь  $L = 0$ .

После этого условие устойчивости можно переписать в „эффективном“ виде

$$4\pi \mathcal{L}_{\text{эфф}} = (\nabla_t f)^2 - \left( \frac{f}{B} \right)^2 (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 (1 + \Phi). \quad (27)$$

Напомним, что ранее мы ввели  $f = B \xi_n$  и  $g = B \xi_b$  для простоты записи выражения (24), но теперь нам удобнее вернуться к функции  $\xi_n$ , обозначив ее  $\alpha = \xi_n$ , и переписав формулу (26) в виде

$$4\pi \mathcal{L}_{\text{эфф}} = (\nabla_t B \alpha)^2 - \alpha^2 (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 (1 + \Phi) > 0. \quad (28)$$

Первый член здесь удобно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (\nabla_t B \alpha)^2 &= \operatorname{div} (\mathbf{B} \alpha^2 \nabla_t B) + (\mathbf{B} \nabla \alpha)^2 + \alpha^2 G, \\ G &= (\nabla_t B)^2 - (\mathbf{B} \nabla) (\nabla_t B), \end{aligned} \quad (29)$$

и при этом первое слагаемое с полной дивергенцией выпадает при интегрировании по объему цилиндра. После этого критерий (27) окончательно переписывается в форме

$$4\pi \mathcal{L}_{\text{эфф}} = (\mathbf{B} \nabla \alpha)^2 - \alpha^2 R > 0, \quad \text{где } R = (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 (1 + \Phi) - G. \quad (30)$$

## Дальнейшее исследование устойчивости бицилиндра

Для иллюстрации вначале напомним, как используется этот критерий применительно к обычному Z-пинчу с плотностью тока  $j_0 = \text{const}$ , постоянной по сечению цилиндра радиуса  $a$ . Поле внутри такого пинча равно  $B = B_\phi = B_0 r/a \sim r$ , где  $B_0 = 2I/ca$ ,  $I = \pi a^2 j_0$ . Поэтому здесь имеем  $\Phi = 0$ ,  $G = 0$ ,  $R = 4(B_0/a)^2 = \text{const}$  и

$$4\pi \mathcal{L}_{\text{eff}} = \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 - 4\alpha^2 \right] \left( \frac{B_0}{a} \right)^2 > 0. \quad (31)$$

Ввиду аксиальной симметрии Z-пинча можно возмущение выбрать в виде  $\alpha = \alpha_1 \sin m\varphi + \alpha_2 \cos m\varphi$  и фактически положить  $(\partial \alpha / \partial \varphi)^2 \rightarrow m^2 \alpha^2$ , так что критерий устойчивости для обычного пинча (с однородным по сечению током) принимает вид  $m_2 \geq 4$ . Это означает, что неустойчивыми будут змейки с  $m = 1$  и перетяжки с  $m = 0$  — хорошо известный результат.

Это справедливо и для рассмотренного выше „бесселевского“ Z-пинча с током, распределенным по нулевой функции Бесселя  $j = j(0)J_0(kr)$ , где  $j(0) = (I/\pi a^2)\xi$ ,  $\xi = N_0/2J_1(N_0) = 2.31$ . Однако рассмотрим эту проблему подробнее, пользуясь критерием устойчивости в форме (26), где  $\nabla_r f = r^{-1} \partial f / \partial \varphi$  и можно положить  $(\nabla_r f)^2 \rightarrow (f m/r)^2$ , переписав (26) в виде условия

$$4\pi \mathcal{L}_{\text{eff}} = \left( \frac{f}{r} \right)^2 [m^2 - M(r)] > 0, \quad (32)$$

$$M(r) = \left( \frac{r \text{rot } \mathbf{B}}{B} \right)^2 (1 + \Phi).$$

Для бесселевского пинча найдем  $M(r) = 2zJ_0(z)/J_1(z) \approx 4(1 - z^2/8 + \dots)$ , так что и вблизи его оси должны нарастать змейки с  $m = 1$ . Применительно к бицилиндру, критерий (29) также указывает на неустойчивость по отношению к внутренним змейкам.

Но если все же дальнейшие экспериментальные исследования подтвердят возможность образования в токамаках „трубчатых структур“, похожих на бицилиндры, то, по нашему мнению, их можно было бы объяснить тремя теоретическими аргументами.

Первый состоит в том, что внутренние змейки просто не успевают нарасти за краткое время существования таких филаментов. На их краткость указывает, по-видимому, тот факт, что КРК обнаруживают из путем компьютерного контрастирования фоторазверток, тем не менее они выглядят не смазанными, а достаточно тонкими линиями (рис. 2).

Для другого объяснения напомним, что минимизация „промежуточного лагранжиана“ (24) достигается лишь при выполнении четырех условий: 1) малости бинормальных компонент возмущений ( $g_{1,2} \rightarrow 0$ ), 2) малости их длин волн ( $k = 2\pi/\lambda \rightarrow \infty$ ), 3) но конечности их

произведений ( $g_{1,2}k$ ) и, наконец, обращения в нуль слагаемого  $L$  ( $L = v + \psi = \nabla_n f + \nabla_b g + (f/B)|\text{rot } \mathbf{B}|$ ). Но, быть может, внутренние змейки с бесконечно малой длиной волны  $\lambda \rightarrow 0$  (их даже трудно наглядно себе представить) просто в целом не нарушают структуры бицилиндров при их устойчивости по отношению к перетяжкам, обусловленной убыванием к периферии внешнего интеграла  $J = \int dl/B$ .

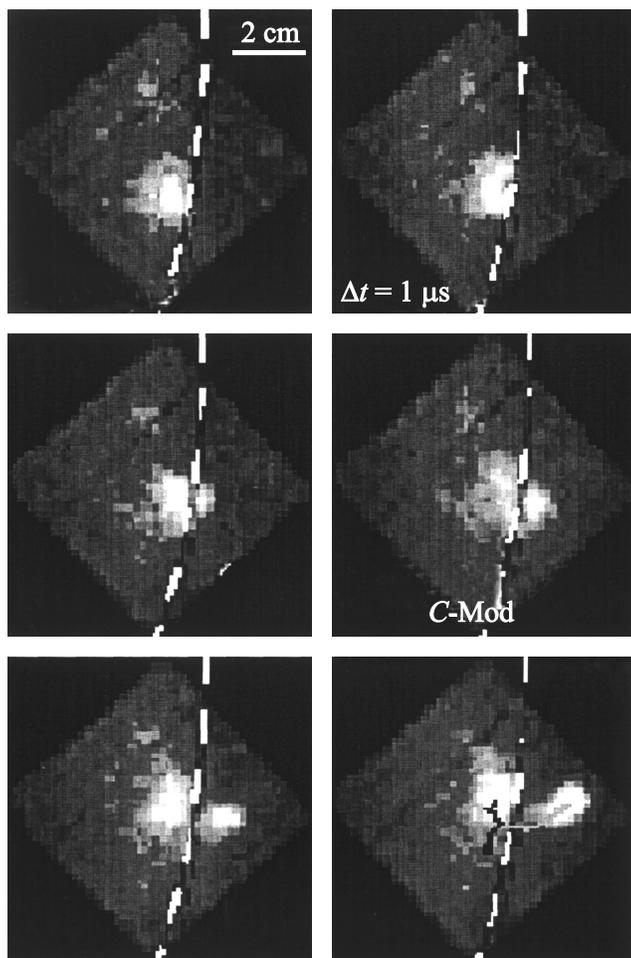
И наконец, последний аргумент может быть связан с учетом конечной длины  $l_z$  бицилиндра, имеющего вид „канцелярской скрепки“ (рис. 3), быстро прорастающей поперек основного магнитного поля  $B_0$ . И если в некий момент возникают возмущения  $g \sim \sin(2\pi z/\lambda)$  с определенной „квантованной“ длиной волны  $\lambda = l_z/n$ , где  $n$  — целое число, то при росте  $l_z$  должна быстро возрастать и длина волны  $\lambda = 2\pi/k$ , как бы растягивая „пружинку“ возмущения. В этих квазистационарных условиях нельзя считать, что член  $L^2$  в формуле (24) автоматически обращается в нуль за счет соответствующего подбора конечных величин  $kg_{1,2}$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $g_{1,2} \rightarrow 0$ . Возможно, что именно это обстоятельство способствует стабильности бицилиндра по отношению к внутренним змейкам.

## Дополнение при корректуре

Уже после того, как эта работа была принята редакцией ЖТФ, авторы решили ее дополнить, поскольку в октябре 2002 г. прошла Международная конференция по плазме в Лионе (Франция), на которой среди прочих материалов были представлены новые экспериментальные данные по переносам плазмы в токамаках. А именно на периферии ряда токамаков были обнаружены спорадически возникающие вытянутые вдоль основного магнитного поля волокна, которые принято называть „блобами“ (blob — капля) и которые, по нашему мнению, могут иметь отношение к теме данной работы.

На рис. 4, взятом нами из [4], приведены шесть последовательных кинокадров (с выдержкой  $4 \mu\text{s}$  каждый) поперечного сечения отдельного блоба, выплывающего к периферии плазменного шнура токамака „Алкатор“. Видно, что при прохождении через сепаратрисную магнитную поверхность блоб делится на две части, одна из которых задерживается внутри сепаратрисы, а вторая, миновав сепаратрису, движется дальше к стенке. Механизм зарождения блобов пока неизвестен, но в [5] считается, что отдельный блоб представляет собой перегретую магнитную трубку, которая в неоднородном периферийном магнитном поле токамака поляризуется из-за различия градиентных дрейфов электронов и ионов, и далее движется со скоростью  $V = cE/B$  к стенке по обычному механизму желобковой неустойчивости.

Из рис. 4 видно, однако, что волокно является изолированной структурой типа обруча или ленты с шириной



**Рис. 4.** Шесть последовательных кинокадров „блоба“ на токамаке „Алкатор“.

порядка 1 см и, скорее всего, является отдельным самостоятельным токовым филаментом. Блобы зарождаются на периферии плазменного шнура, где большую роль играют нейтральные примеси, и в ряде работ отмечается, что температура в центре блоба близка к 10 eV, что, по-видимому, также не является случайной величиной. Тот факт, что при пересечении сепаратрисы блоб делится на две части, по-видимому, указывает на какую-то его двойную структуру, быть может, отчасти похожую на рассматриваемый нами бицилиндр, если мысленно добавить в приведенные выше формулы однородное „тороидальное“ магнитное поле, параллельное токам бицилиндра.

По нашему мнению, здесь возможен следующий нелинейный механизм возникновения блобов как токовых филаментов из-за особой нагревно-излучательной неустойчивости, рассмотренной ниже.

Блобы зарождаются в пристеночном слое плазмы токамака, куда приходят нейтральные примеси со стенки. Диффундируя внутрь, они попадают в область, где температура примерно равна 10 eV, и здесь ионизуют-

ся, после чего магнитное закручивание затрудняет их продвижение далее. Индуктивное напряжение на обходе тора и продольное электрическое поле  $E_{\parallel} = \text{const}$  можно считать постоянными в течение разряда. Тогда удельная мощность джоулевого нагрева  $W_J = E_{\parallel}^2 \eta$ , где  $\eta = n_e e^2 / m_e v_{ea}$  — электропроводность, должна компенсироваться потерями на излучение в основном по механизму диэлектронной рекомбинации  $W_{\text{rad}} = n_e n_i Q$ . Зависимость множителя  $Q$  от электронной температуры  $T_e$  для типичных примесей (C, O, Fe, Mo, W) приведена, например, в работе [6, рис. 19]. Там можно видеть, что вблизи максимумов для интересующего нас интервала температур  $5 \leq T_e \leq 20$  eV можно считать, что множитель  $Q \approx 10^{-18} [\text{erg} \cdot \text{cm}^3/\text{s}] = \text{const}$  примерно постоянен.

Учитывая квазинейтральность  $n_i = n_e$  и считая, что электропроводность обусловлена столкновениями электронов с нейтралами, так что  $v_{ea} = n_a \sigma_{ea} \sqrt{T_e / m_e}$ , из равенства  $W_J = W_{\text{rad}}$  найдем соотношение  $n_e \sqrt{T_e} = A = e^2 E_{\parallel}^2 / Q n_a \sigma_{ea} \sqrt{m_e} = \text{const}$  и затем зависимость давления  $p = 2n_e T_e$  от плотности электронов в виде спадающей гиперболы  $p = 2A^2 / n_e$ .

Неустойчивый газ с адиабатой вида  $p \sim \rho^{\alpha}$  при показателе адиабаты  $\alpha = -1$  принято называть „газом Чаплыгина“. Теория подобных „квазичаплыгинских сред“ подробно изложена в наших монографиях [7]. Малые возмущения в такой среде должны нарастать с инкрементом  $\gamma = kc_0 = 2\pi c_0 / \lambda$ , где в нашем случае  $c_0 = \sqrt{2T_e / m_i}$  — тепловая скорость ионов  $\sim 10$  km/s, так что структуры типа блобов с размерами порядка 1 см должны нарастать за времена порядка микросекунд, что и наблюдается для блобов.

Однако в таких средах нет распространяющихся волн, причинно связывающих соседние участки, и для них более характерны стоячие отдельные спонтанно рождающиеся и нарастающие вплоть до коллапса флуктуации. И более того, типичным является парное возмущение из двух соседних половинок — ямки и горба плотности. А поскольку в нашей модели плотность тока равна  $j = \eta E_{\parallel} = (n_e / n_{e0})^2 j_0$ , где  $n_0$  и  $j_0$  — невозмущенные значения плотности электронов и тока, то по отношению к среднему фону с почти однородной плотностью тока  $j_0$  такая картина была бы отчасти похожа на двойную структуру наблюдаемых блобов. Более детальное исследование такой интерпретации блобов авторы предполагают проделать в отдельной работе.

Авторы признательны В.А. Вершкову и В.И. Лисице за полезные замечания.

Данная работа поддержана Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 00-15-96526).

## Список литературы

- [1] Трубников Б.А. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 289.
- [2] Кукушкин А.Б., Ранцев-Картинов В.А. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2000. Вып. 2. С. 69–76.
- [3] Трубников Б.А. Теория плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1996. С. 216.
- [4] Marmor E.S. // 19<sup>th</sup> IAEA Fusion Energy Conf. Lyon, 2002. Report OV/4-1. Overview of Recent Alcator C-Mod research.
- [5] Krasheninnikov S.I. // Phys. Lett. 2001. Vol. A283. P. 368–370.
- [6] Гервидс В.И., Жидков А.Г., Марченко В.С., Яковленко С.И. // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат. Вып. 12. С. 156, 189; рис. 19.
- [7] Жданов С.К., Трубников Б.А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. (Trubnikov B.A., Zhdanov S.K., Zverev S.M. Hydrodynamics of Unstable Media. Florida: CRC Press, Boca Raton, 1996).