

01;09

## Замкнутые геодезические траектории на части поверхности тора

© С.С. Романов

Национальный научный центр „Харьковский физико-технический институт“,  
61108 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 9 января 2003 г.)

На тороидальных многообразиях исследованы геодезические траектории, которые расположены в части многообразия, содержащей большой экватор тора. Используя интегралы геодезических, рассмотрены локальные и глобальные свойства траекторий. Из максимальных геодезических сконструированы замкнутые траектории, которые имеют целые глобальные инварианты.

### Введение

Любая информация о траекториях бывает полезной при организации движения. В физике низких энергий электромагнитные взаимодействия играют центральную роль. Направление и фокусировка частиц с магнитным моментом могут быть осуществлены посредством магнитного поля, которое успешно применяется в физике атомных пучков, а также предложено для нейтронных пучков [1].

Накопление нейтронов облегчается, если использовать магнитное поле в виде тора. В кольце допустимая энергия нейтронов, которые могут быть захвачены ловушкой, больше по сравнению со сферой. Барьер для влетающих нейтронов отсутствует, если движение нейтронов в ловушке осуществляется по ограниченной части поверхности кольца [2]. Естественные движения при отсутствии внешних сил происходят по геодезическим траекториям. На тороидальном многообразии не каждая максимальная геодезическая определена на всем многообразии. Поэтому поверхность тора в  $R^3$  не является геодезически полной. Геодезические траектории характеризуются локальными и глобальными инвариантами. Связь между глобальными инвариантами вдоль геодезических на тороидальных многообразиях установлена в работах [3,4].

В настоящей работе получены уравнения геодезических траекторий, которые располагаются на ограниченных тороидальных многообразиях.

### Интеграл Клеро

Система дифференциальных уравнений геодезических [5] имеет два интеграла. Первый интеграл, который называется интегралом Клеро, в тороидальной системе координат  $\eta, \phi, \theta$  [6] имеет вид

$$\sin \alpha = h(\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \phi),$$

$h$  — константа вдоль геодезической  $\gamma$  на торе  $\eta = \eta_0$ .

Угол  $\alpha$  между геодезической и меридианом тора имеет ограниченное изменение  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Если правая часть интеграла Клеро превосходит единицу, то геодезическая располагается на ограниченной части тороидального

многообразия. Верхняя грань значений  $h$  для некоторых величин угла  $\phi$  приведена в таблице.

$\phi$	$h$
0	$(\operatorname{ch} \eta_0 - 1)^{-1}$
$\arccos(1/\operatorname{ch} \eta_0)$	$(\operatorname{th} \eta_0 \operatorname{sh} \eta_0)^{-1}$
$\pi/2$	$(\operatorname{ch} \eta_0)^{-1}$
$\pi$	$(\operatorname{ch} \eta_0 + 1)^{-1}$

Отметим, что геодезическая траектория может обвивать азимутальную ось тора, пересекая большой и малый экваторы тора, только при  $h < (\operatorname{ch} \eta_0 + 1)^{-1}$ . Уравнение геодезической в этом случае приведено в [4]. Геодезическая траектория является максимальной [7] на тороидальном многообразии, она определена на всем множестве  $R^3$ . При других значениях  $h$  геодезические находятся на ограниченном тороидальном многообразии и для замкнутых траекторий могут быть только кусочно-гладкими.

Когда  $h \leq (\operatorname{th} \eta_0 \operatorname{sh} \eta_0)^{-1}$ , геодезические расположены в выпуклой части многообразия и пересекают большой экватор тора.

Интеграл Клеро устанавливает локальную связь между характеристиками геодезических.

### Аналитические свойства второго интеграла

Здесь мы найдем уравнения максимальных геодезических траекторий, которые определены на ограниченном тороидальном многообразии.

Зависимость между поверхностными координатами геодезических представляется вторым интегралом [4]

$$\theta(\phi) = \int \frac{h(\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \phi) d\phi}{\operatorname{sh} \eta_0 \sqrt{1 - h^2(\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \phi)^2}}.$$

Если рассматривать только траектории, которые либо плотно покрывают многообразие  $R^2$ , либо являются периодическими, мы должны оставаться в действительном векторном пространстве  $R$ . В этом случае геодезические,

описываемые указанными интегралами, являются гладкими траекториями без самопересечений и узлов.

Для дальнейшего анализа второго интеграла геодезических удобно перейти к новой переменной  $x = \operatorname{tg}(\phi/2)$  и записать его в виде суммы двух слагаемых

$$\theta(x) = 2h \frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\operatorname{sh} \eta} (A_1 + A_2).$$

Здесь и далее индекс 0 у  $\eta$  опущен, однако мы предполагаем, что находимся во множестве  $R^2$ . Первое слагаемое

$$A_1 = \int \frac{(1 - h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 - h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2)^{-1/2}}{\sqrt{1 + h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 + h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2}} dx$$

имеет подынтегральную функцию, состоящую из двух сомножителей. Подкоренное выражение первого сомножителя может обращаться в нуль, когда постоянная Клеро превосходит  $(\operatorname{ch} \eta + 1)^{-1}$ . Поэтому значения  $h$  убывают с ростом  $\phi$  (см. таблицу). Второй сомножитель в нуль не обращается.

Второе слагаемое

$$A_2 = -\frac{2}{\operatorname{ch} \eta + 1} \times \int \frac{(1 - h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 - h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2)^{-1/2}}{(1 + x^2)\sqrt{1 + h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 + h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2}} dx$$

других особенностей не добавляет.

При  $h = (\operatorname{ch} \eta - 1)^{-1}$  большой экватор тора является геодезической.

Когда  $h = (\operatorname{th} \eta \cdot \operatorname{sh} \eta)^{-1}$ , первое слагаемое

$$A_1 = \frac{(\operatorname{ch} \eta + 1)^{-1/2} \operatorname{sh}^2 \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1}} \cdot \int \frac{\left(\frac{\operatorname{ch} \eta - 1}{\operatorname{ch} \eta + 1} - x^2\right)^{-1/2} dx}{\sqrt{\frac{2 \operatorname{ch}^2 \eta - \operatorname{ch} \eta - 1}{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1} + x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} \eta}{2\sqrt{\operatorname{ch} \eta}} (K(k) - F(\phi, k))$$

выражается через эллиптический интеграл  $K(k)$  и эллиптическую функцию,  $F(\phi, k)$ , квадрат модуля которой равен

$$k^2 = \frac{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1}{4(\operatorname{ch} \eta + 1) \operatorname{ch} \eta},$$

а аргумент эллиптической функции есть

$$\phi = \arccos \left( \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\operatorname{ch} \eta - 1}} x \right).$$

Второе слагаемое можно записать в виде

$$A_2 = -\frac{2(\operatorname{ch} \eta + 1)^{-3/2} \operatorname{sh}^2 \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1}} \cdot \int \frac{\left(\frac{\operatorname{ch} \eta - 1}{\operatorname{ch} \eta + 1} - x^2\right)^{-1/2} dx}{(1 + x^2)\sqrt{\frac{2 \operatorname{ch}^2 \eta - \operatorname{ch} \eta - 1}{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1} + x^2}}$$

Оно не имеет особенностей, отличных от особенностей первого слагаемого. Влияние третьего сомножителя на величину  $A^2$  оценим асимптотически. Результат вычисления таков

$$A_2 \approx -\frac{\sqrt{2}(\operatorname{ch} \eta + 1)^{-1} \operatorname{sh}^2 \eta}{\sqrt{(2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1) \operatorname{ch} \eta}} \times \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{2 \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta - 1 - (\operatorname{ch} \eta + 1)x^2}} x \right).$$

Геодезическая траектория при  $h = (\operatorname{th} \eta \cdot \operatorname{sh} \eta)^{-1}$  расположена между верхней и нижней параболическими линиями тора

$$\theta(\phi) \cong \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \eta}}{\operatorname{sh}^2 \eta} \left( (\operatorname{ch} \eta + 1) \times \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \frac{\operatorname{ch} \eta - \cos \phi}{(\operatorname{ch} \eta + 1)(1 - \cos \phi)}} \right) K(k) - \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sh} \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1 - \cos \phi) \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta \cos \phi - 1}} \right)$$

и пересекает большой экватор тора.

Другим примером, когда максимальная геодезическая траектория определена не на всем тороидальном многообразии, есть  $h = (\operatorname{ch} \eta)^{-1}$ . Область, в которой определена траектория, находится между верхней параллелью ( $\phi = \pi/2$ ) и нижней ( $\phi = -\pi/2$ ) и содержит большой экватор тора.

Слагаемые второго интеграла

$$A_1 = \frac{\operatorname{ch} \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \eta + 1}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{\frac{2 \operatorname{ch} \eta - 1}{2 \operatorname{ch} \eta + 1} + x^2}},$$

$$A_2 = -\frac{2(\operatorname{ch} \eta + 1)^{-1} \operatorname{ch} \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \eta + 1}} \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2} \sqrt{\frac{2 \operatorname{ch} \eta - 1}{2 \operatorname{ch} \eta + 1} + x^2}}$$

имеют особенности в точках  $x = \pm 1$ .

Максимальная геодезическая траектория

$$\theta(\phi) \cong \frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \left( \frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\sqrt{\operatorname{ch} \eta}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2 \cos \phi}{1 - \cos \phi}} \right) K(k_0) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \eta - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{\cos \phi}} \right)$$

касается верхней параллели со стороны меньших значений  $\phi$  и нижней — со стороны больших величин  $\phi$ . Квадрат модуля эллиптического интеграла в этом случае равен

$$k_0^2 = \frac{2 \operatorname{ch} \eta + 1}{4 \operatorname{ch} \eta}.$$

Траектория не имеет особенностей на параболических линиях тора.

Обе траектории при непрерывном изменении начальных значений поверхностных координат плотно покрывают ограниченную часть тороидального многообразия [8].

### Замкнутые геодезические траектории

Из максимальных геодезических составим уравнение замкнутой траектории. Отмеченные ранее кривые являются гладкими, кроме точек касания. По теореме Дарбу [9], необходимым и достаточным условием замкнутости всех геодезических тороидальной метрики является выполнение равенства

$$\int_{i(h)} \frac{h(\operatorname{ch} \eta - \cos \phi) d\phi}{\operatorname{sh} \eta \sqrt{1 - h^2(\operatorname{ch} \eta - \cos \phi)^2}} = \frac{p(i)}{q(i)} \pi$$

при всех  $i$  ( $p$  и  $q$  целые). Всякая геодезическая  $\gamma$  состоит из  $2q$  геодезических отрезков между точками касания с параллелями.

Она огибает ось тора  $p$  раз. Пределы интегрирования  $i(h)$  определяются нормировкой постоянной Клеро.

При  $h = (\operatorname{th} \eta \cdot \operatorname{sh} \eta)^{-1}$  геодезическая содержится между параллелями  $i = \pm \arccos(1/\operatorname{ch} \eta)$ , которые являются параболическими линиями тора.

Геодезическая замкнута тогда и только тогда, когда

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\operatorname{ch} \eta}}{\operatorname{sh}^2 \eta} \left( (\operatorname{ch} \eta + 1) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ch} \eta} \right) K(k) - \frac{\sqrt{2}\pi \operatorname{sh} \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1}} \right) = \frac{p}{q} \pi$$

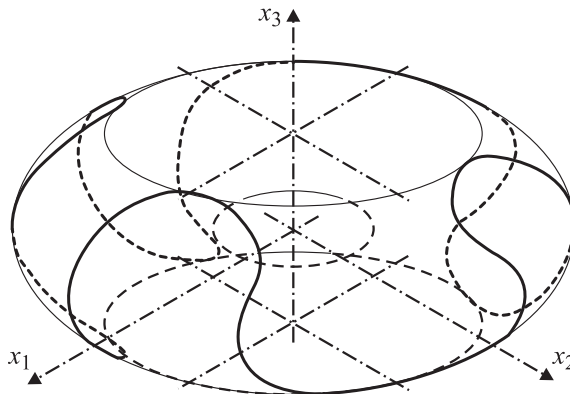
для некоторого рационального  $p/q$ .

Уравнение геодезических траекторий, когда  $h = (\operatorname{th} \eta \cdot \operatorname{sh} \eta)^{-1}$ ,

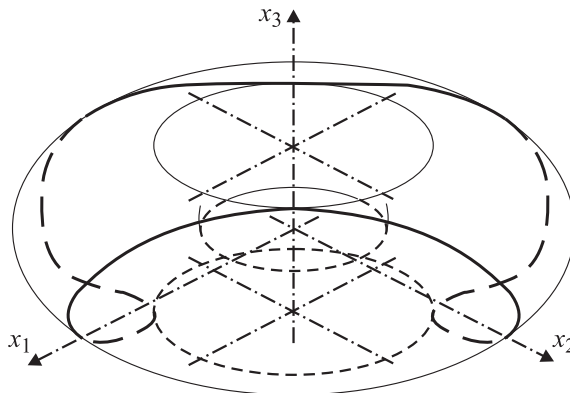
$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \theta(\phi) \cong & \frac{\varepsilon \sqrt{\operatorname{ch} \eta}}{\operatorname{sh}^2 \eta} \left( (\operatorname{ch} \eta + 1) \right. \\ & \times \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \phi)}{(\operatorname{ch} \eta + 1)(1 - \cos \phi)}} \right) K(k) \\ & \left. - \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sh} \eta}{\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{ch} \eta - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1 - \cos \phi) \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta \cos \phi - 1}} \right) \end{aligned}$$

представляет собой кусочно-максимальные геодезические, которые являются непрерывными кривыми. Знак числа  $\varepsilon_1 = \pm 1$  определяет ориентацию геодезической.

Знак  $\varepsilon = \pm 1$  фиксирован на отрезке геодезической, идущей от  $i = \arccos(1/\operatorname{ch} \eta)$  до  $i = -\arccos(1/\operatorname{ch} \eta)$ , и меняется всякий раз, когда  $i$  достигает значения  $\arccos(1/\operatorname{ch} \eta)$  или  $-\arccos(1/\operatorname{ch} \eta)$ .



**Рис. 1.** Схема тороидальной геодезической, показывающая кривую с  $p = 1, q = 4, i = \arccos(1/\operatorname{ch} \eta)$ . Для этого тора аспектовое отношение немного превосходит единицу ( $\operatorname{ch} \eta = 3/2$ ). Пунктир — невидимая часть геодезической; сплошная кривая — часть геодезической, лежащей на наиболее удаленной от центра части тороидальной поверхности.



**Рис. 2.** Геодезическая обходит ось тора один раз ( $p = 1$ ) и составлена из четырех геодезических отрезков ( $q = 2$ ). Тор довольно толстый ( $\operatorname{ch} \eta = 3/2$ ). Параллели, которых касается замкнутая геодезическая, расположены при  $i = \pm \pi/2$ .

На рис. 1 представлена трехмерная кусочно-максимальная замкнутая траектория между параболическими линиями тора с  $p = 1, q = 4$ , масштабный множитель  $c = 15 \cdot \sqrt{5}$ . Отмечены верхняя и нижняя параллели, которых касается траектория.

Когда  $h = (\operatorname{ch} \eta)^{-1}$ , угол  $\theta(\pi/2)$  между двумя последовательными точками касания с крайними параллелями равен

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cong \varepsilon_1 \frac{\varepsilon}{\operatorname{sh} \eta} \left( \frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\sqrt{\operatorname{sh} \eta}} K(k_0) - \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \eta - 1}} \right).$$

Условие замкнутости траектории, совершающей  $p$  обходов оси тора и состоящей из  $2q$  геодезических отрезков, записывается в виде

$$\varepsilon_1 \varepsilon \cdot \theta(\pi/2) = \frac{p}{q} \pi.$$

Замкнутая траектория, состоящая из кусочно-максимальных геодезических,

$$\varepsilon_1 \theta(\phi) \cong \frac{\varepsilon}{\operatorname{sh} \eta} \left( \frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\sqrt{\operatorname{ch} \eta}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2 \cos \phi}{1 - \cos \phi}} \right) K(k_0) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \eta - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{\cos \phi}} \right)$$

расположена между параллелями  $\phi = \pm \pi/2$  и содержит большой экватор тора.

Описанную ситуацию иллюстрирует рис. 2.

## Результаты

1. Тороидальные многообразия — распространенный объект в физических исследованиях природы.

2. Геодезические траектории на ограниченном тороидальном многообразии открывают новые возможности для пленения частиц.

3. Первый интеграл Клеро позволяет установить границу между ситуациями, когда геодезическая траектория является максимальной, и случаем, когда траектория расположена на ограниченной части поверхности тора.

4. Признаком того, что геодезическая расположена в ограниченной области тороидального многообразия, является наличие особенностей у второго интеграла геодезических.

5. Особенности второго интеграла определяют положение крайних параллелей тора, которых касается геодезическая.

6. Замкнутая траектория имеет глобальные инварианты:  $p$  — число обходов оси тора до замыкания, состоит из  $2q$  геодезических отрезков.

7. Замкнутая геодезическая является кусочно-гладкой кривой без узлов и самопересечений.

## Список литературы

- [1] Kugler K.-J., Paul W., Trinks U. // Phys. Lett. 1978. Vol. 72B. P. 422–424.
- [2] Пауль В. // УФН. 1990. Т. 160. Вып. 12. С. 109–127.
- [3] Романов С.С. // ДАНУ. 2001. № 9. С. 84–88.
- [4] Romanov S.S. // Scientific Paper of the Institute for Nuclear Research. 2001. Vol. 4 (6). P. 169–193.
- [5] Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1952. 343 с.
- [6] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных гармоник. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
- [7] Торн Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. М.: МИР, 1982. 359 с.
- [8] Jacop Palis, Jr., Wellington de Melo. Geometric Theory of Dynamical Systems. New York; Heidelberg; Berlin: Springer Verlag, 1982. 301 p.
- [9] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981. 325 с.