01

О поляризуемости пары цилиндров в поперечном электрическом поле

© Б.Я. Балагуров

Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

(Поступило в Редакцию 6 декабря 2002 г.)

Предложена последовательная схема вычисления поляризуемости пары параллельных цилиндров произвольной (но достаточно симметричной) формы. Для коэффициентов, входящих в выражение для электрического потенциала задачи, получена бесконечная система алгебраических уравнений. Численное решение этой системы дает возможность находить поляризуемость с любой степенью точности. Предлагаемый метод не связан с конкретной формой цилиндров, электростатические свойства которых описываются с помощью матрицы мультипольных поляризуемостей.

Введение

Задача двух тел является одной из основных в макроскопической электростатике [1]. Различным аспектам этой проблемы посвящен ряд работ (см., например, [2–5]), в которых рассматривается, как правило, задача о двух сферах. Но даже в этом сравнительно простом случае отсутствует замкнутое решение задачи. Тем бо́льшие трудности возникают при попытке рассмотрения тел другой формы. Более благоприятна ситуация в двумерном случае, где имеется точное решение задачи о паре кругов (параллельных круговых цилиндров). Однако и здесь отсутствует общий подход к проблеме двух тел для цилиндров произвольной формы.

В настоящей работе предложен последовательный метод вычисления тензора поляризуемости $\hat{\Lambda}$ пары цилиндров произвольной (но достаточно симметричной) формы. Найден общий вид комплексного потенциала задачи вне цилиндров. Для неизвестных коэффициентов, входящих в выражение для потенциала, получена бесконечная система алгебраических уравнений, численное решение которой позволяет находить поляризуемость $\hat{\Lambda}$ с любой степенью точности. При больших расстояниях ρ между цилиндрами из общих формул следует аналитическое выражение для поляризуемости в виде ряда по степеням $1/\rho$.

Электрические свойства каждого из цилиндров входят в решение задачи через их мультипольные поляризуемости — коэффициенты в „откликах“ на различные внешние поля. При этом определение соответствующей матрицы поляризуемости представляет собой самостоятельную задачу, которая должна решаться отдельно в каждом конкретном случае аналитическими или численными методами. Для включения эллиптической формы выражения для мультипольных поляризуемостей могут быть найдены в явном виде [6].

Мультипольные поляризуемости

Рассмотрим цилиндр с тензором дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$, помещенный в однородное поперечное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Будем считать, что главные оси тензора $\hat{\Lambda}$ совпадают с осями координат x и y, а $\mathbf{E}_0$ направим вдоль оси x. Тогда на больших от тела расстояниях r электрический потенциал φ в дипольном приближении имеет вид

$$r \to \infty: \qquad \varphi(\mathbf{r}) = -E_0\left\{x - 2\,\frac{x\Lambda^{(x)}}{r^2} + \ldots\right\}. \tag{1}$$

Здесь $\Lambda^{(x)}$ — соответствующее главное значение тензора $\hat{\Lambda}$. Величина $\Lambda^{(x)}$, отнесенная к единице длины цилиндра, пропорциональна площади поперечного сечения тела и является функцией аргумента $h = \varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$, где $\varepsilon^{(i)}$ и $\varepsilon^{(e)}$ — диэлектрические проницаемости цилиндра и окружающей среды соответственно.

В дальнейшем удобно использовать комплексный потенциал $\Phi(z)$ (где $z = x + iy$), действительная часть которого дает электрический потенциал $\varphi(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\Phi(z)$, а производная — компонента напряженности $\mathbf{E}$,

$$\Phi'(z) = -E_x + iE_y. \tag{2}$$

Комплексный потенциал, отвечающий выражению (1), имеет вид

$$|z| \to \infty: \qquad \Phi(z) = -E_0\left\{z - \frac{2\Lambda^{(x)}}{z} + \ldots\right\} \tag{3}$$

с вещественной постоянной $\Lambda^{(x)}$.

При учете высших (мультиплетных) моментов выражение для $\Phi(z)$ вне тела принимает вид

$$\Phi(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{(x)}_{1,2m+1}}{z^{2m+1}} \tag{4}$$

с действительными константами $\Lambda^{(x)}_{1,2m+1}$. В (4) опущен общий множитель и считается, что тело имеет достаточно симметричную форму (см. Приложение), так что комплексный потенциал $\Phi(z)$ нечетен по z. Из сравнения (4) с (3) следует, что

$$\Lambda_{11}^{(x)} = -2\Lambda^{(x)}. \tag{5}$$

Ниже понадобится также и отклик рассматриваемого тела на неоднородное внешнее поле вида $\operatorname{Re} z^{2n+1} = r^{2n+1}\cos(2n+1)\Theta$, где Θ — полярный угол. В этом случае вместо (4) имеем

$$\Phi(z) = z^{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}} \quad (n \geqslant 0) \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами $\Lambda_{2n+1,2m+1}$, которые будем называть мультипольными поляризуемостями. Аналогичным образом вводятся и четно-четные мультипольные поляризуемости $\Lambda_{2n,2m}$

$$\Phi(z) = z^{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{2n,2m}}{z^{2m}} \quad (n \geqslant 1). \tag{7}$$

В (6), (7) и ниже индекс x у $\Lambda_{nm}^{(x)}$ опускаем.

Если напряженность $\mathbf{E}_0$ направлена вдоль оси y (величины, относящиеся к этому случаю, будем отмечать черточкой сверху), то вместо (3) будем иметь

$$|z| \to \infty: \quad \overline{\Phi}(z) = iE_0\left\{z + \frac{2\overline{\Lambda}}{z} + \dots\right\}, \tag{8}$$

где $\overline{\Lambda} \equiv \Lambda^{(y)}$ — дипольная поляризуемость (главное значение тензора $\hat{\Lambda}$) вдоль оси y.

При учете высших моментов вместо (8) аналогично (4) имеем

$$\overline{\Phi}(z) = -i\left\{z - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{1,2m+1}}{z^{2m+1}}\right\} \tag{9}$$

с действительными константами $\overline{\Lambda}_{1,2m+1}$. Из сравнения (9) с (8) следует, что

$$\overline{\Lambda}_{11} = -2\Lambda^{(y)}. \tag{10}$$

В случае внешнего поля вида $\operatorname{Im} z^{2h+1} = r^{2n+1}\sin(2n+1)\Theta$ вместо (9) аналогично (6) будем иметь

$$\overline{\Phi}(z) = -i\left\{z^{2n+1} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}}\right\} \quad (n \geqslant 0), \tag{11}$$

где $\overline{\Lambda}_{2n+1,2m+1} = \Lambda_{2n+1,2m+1}^{(y)}$ — соответствующие нечетно-нечетные мультипольные поляризуемости.

Четно-четные поляризуемости вводятся сходным с (7) образом

$$\overline{\Phi}(z) = -i\left\{z^{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{2n,2m}}{z^{2m}}\right\} \quad (n \geqslant 1). \tag{12}$$

Заметим, что преобразование симметрии Дыхне [7] позволяет связать комплексные потенциалы исходной $\Phi(z)$ и так называемой взаимной (отличающейся от исходной заменой $\varepsilon^{(i)} \rightleftarrows \varepsilon^{(e)}$) $\tilde{\Phi}(z)$ систем (ср. с [8])

$$\widetilde{\Phi}^{(x)}(z) = i\Phi^{(y)}(z)$$

или

$$\widetilde{\Phi}(z) = i\overline{\Phi}(z). \tag{13}$$

Подстановка (6) и (11) в (13) дает соотношение [6]

$$\overline{\Lambda}_{2n+1,2m+1} = -\widetilde{\Lambda}_{2n+1,2m+1}. \tag{14}$$

Таким же соотношением связаны и четно-четные поляризуемости $\overline{\Lambda}_{2n,2m}$ и $\widetilde{\Lambda}_{2n,2m}$. Из (6) и (7) по соображениям размерности следует, что $\Lambda_{nm} = R^{n+m}\alpha_{nm}$, где R — характерный размер цилиндра в поперечном сечении; α_{nm} — безразмерные величины, зависящие от формы тела и аргумента $h = \varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$. Отметим, что справедливо также равенство [9]

$$m\Lambda_{nm} = n\Lambda_{mn}, \tag{15}$$

являющееся соотношением симметрии для матрицы Λ_{nm}.

Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу о нахождении потенциала, создаваемого двумя параллельными цилиндрами (с направляющими вдоль оси z), помещенными в поперечное однородное электрическое поле. Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что главные оси тензора поляризуемости обоих (достаточно симметричных) тел совпадают с координатными осями x и y. Тогда если напряженности внешнего поля $\mathbf{E}_0$ направлена вдоль оси x (или y), то все величины Λ_{nm} в формулах (4)–(7), (9)–(12) вещественны. Считаем также, что центры обоих цилиндров расположены на оси y в точках $y = \pm\rho/2$. Задачу об отыскании потенциала решаем методом последовательных приближений, в каждом порядке которого точно учитывается взаимовлияние тел.

В нулевом приближении комплексный потенциал, отвечающий однородному внешнему полю, приложенному вдоль оси x, имеет вид

$$\Phi^{(0)}(z) = \beta z, \tag{16}$$

где $\beta = -E_0$.

Отклик первого цилиндра (с центром в точке $y = \rho/2$) на поле (16) дается, согласно (4), выражением

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{(1)}(z) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}^{(1)}}{(z - z_{\mathrm{I}})^{2n+1}};$$

$$b_{2n+1}^{(1)} = \Lambda_{1,2n+1}^{(\mathrm{I})}, \quad z_{\mathrm{I}} = \frac{i}{2}\rho. \tag{17}$$

Аналогичным образом для отклика второго цилиндра находим

$$\Phi_{\mathrm{II}}^{(1)}(z)=\beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_{2n+1}^{(1)}}{(z-z_{\mathrm{II}})^{2n+1}};$$

$$d_{2n+1}^{(1)}=\Lambda_{1,2n+1}^{(\mathrm{II})},\quad z_{\mathrm{II}}=-\frac{i}{2}\rho. \tag{18}$$

В (17) и (18) $\Lambda_{1,2n+1}^{(a)}$ (где $a=\mathrm{I}$ или II) — соответствующие главные значения тензора мультипольных моментов тел. Сумма величин $\Phi_{\mathrm{I}}^{(1)}(z)$ и $\Phi_{\mathrm{II}}^{(1)}(z)$ дает поправку первого порядка к комплексному потенциалу вне цилиндров.

Во втором приближении выражение (18) является потенциалом внешнего поля по отношению к первому цилиндру. При $z\to z_{\mathrm{I}}$ имеем следующие разложения по степеням $z-z_{\mathrm{I}}$:

$$\frac{1}{(z-z_{\mathrm{II}})^{2n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{\rho^{2n+2k+2}}\frac{(2n+2k+1)!}{(2n)!(2k+1)!}(z-z_{\mathrm{I}})^{2k+1}$$

$$-i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{\rho^{2n+2k+1}}\frac{(2n+2k)!}{(2n)!(2k)!}(z-z_{\mathrm{I}})^{2k}-\left(\frac{i}{\rho}\right)^{2n+1}$$

$$(n\geqslant 0); \tag{19}$$

$$\frac{1}{(z-z_{\mathrm{II}})^{2n}}=i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{\rho^{2n+2k+1}}\frac{(2n+2k)!}{(2n-1)!(2k+1)!}(z-z_{\mathrm{I}})^{2k+1}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{\rho^{2n+2k}}\frac{(2n+2k-1)!}{(2n-1)!(2k)!}(z-z_{\mathrm{I}})^{2k}+\left(\frac{i}{\rho}\right)^{2n}$$

$$(n\geqslant 1). \tag{20}$$

Отклик первого цилиндра на внешний неоднородный потенциал ищем с помощью соответствий, следующих из (6) и (12),

$$(z-z_{\mathrm{I}})^{2k+1}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda_{2k+1,2n+1}^{(\mathrm{I})}}{(z-z_{\mathrm{I}})^{2n+1}}, \tag{21}$$

$$-i(z-z_{\mathrm{I}})^{2k}\Rightarrow i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\Lambda}_{2k,2n}^{(\mathrm{I})}}{(z-z_{\mathrm{I}})^{2n}}. \tag{22}$$

С учетом (19), (21) и (22) находим отклик первого тела на потенциал (18)

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{(2)}(z)=\beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n+1}^{(2)}}{(z-z_{\mathrm{I}})^{2n+1}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}^{(2)}}{(z-z_{\mathrm{I}})^{2n}}\right\}, \tag{23}$$

где

$$b_{2n+1}^{(2)}=\sum_{m=0}^{\infty}M_{nm}^{(\mathrm{I})}d_{2m+1}^{(1)},\quad b_{2n}^{(2)}=\sum_{m=0}^{\infty}P_{nm}^{(\mathrm{I})}d_{2m+1}^{(1)}; \tag{24}$$

$$M_{nm}^{(\mathrm{I})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{\rho^{2m+2k+2}}\frac{(2m+2k+1)!}{(2m)!(2k+1)!}\Lambda_{2k+1,2n+1}^{(\mathrm{I})}$$

$$(n\geqslant 0,\quad m\geqslant 0); \tag{25}$$

$$P_{nm}^{(\mathrm{I})}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{\rho^{2m+2k+1}}\frac{(2m+2k)!}{(2m)!(2k)!}\overline{\Lambda}_{2k,2n}^{(\mathrm{I})}$$

$$(n\geqslant 1,\quad m\geqslant 0). \tag{26}$$

Величины $d_{2n+1}^{(1)}$ определены в (18). Выражение (23) является поправкой второго порядка к потенциалу, создаваемого первым цилиндром. В (23) опущены чисто мнимые константы, имеющиеся в разложении (19).

Аналогичным образом ищется отклик второго тела на внешнее поле (17). Разложения величин $(z-z_{\mathrm{I}})^{-n}$ по степеням $z-z_{\mathrm{II}}$ следуют из (19), (20) при замене $\rho\to-\rho$. Отклик находим с помощью соответствий типа (21), (22) с заменой индекса I на II. В результате получаем

$$\Phi_{\mathrm{II}}^{(2)}(z)=\beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_{2n+1}^{(2)}}{(z-z_{\mathrm{II}})^{2n+1}}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{2n}^{(2)}}{(z-z_{\mathrm{II}})^{2n}}\right\}, \tag{27}$$

где

$$d_{2n+1}^{(2)}=\sum_{m=0}^{\infty}M_{nm}^{(\mathrm{II})}b_{2m+1}^{(1)},\quad d_{2n}^{(2)}=\sum_{m=0}^{\infty}P_{nm}^{(\mathrm{II})}b_{2m+1}^{(1)}. \tag{28}$$

Здесь $b_{2n+1}^{(1)}$ определено в (17), выражения для $M_{nm}^{(\mathrm{II})}$ и $P_{nm}^{(\mathrm{II})}$ следуют из (25) и (26) заменой индекса I на II.

В третьем приближении выражение (27) является потенциалом внешнего поля для порвого цилиндра. Используя разложения (19), (20) и соответствия (21), (22), находим отклик первого тела

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{(3)}(z)=\beta\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n+1}^{(3)}}{(z-z_{\mathrm{I}})^{2n+1}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}^{(3)}}{(z-z_{\mathrm{I}})^{2n}}\right\}, \tag{29}$$

где

$$b_{2n+1}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}M_{nm}^{(\mathrm{I})}d_{2m+1}^{(2)}+\sum_{m=1}^{\infty}N_{nm}^{(\mathrm{I})}d_{2m}^{(2)}\quad(n\geqslant 0), \tag{30}$$

$$b_{2n}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}P_{nm}^{(\mathrm{I})}d_{2m+1}^{(2)}+\sum_{m=1}^{\infty}Q_{nm}^{(\mathrm{I})}d_{2m}^{(2)}\quad(n\geqslant 1). \tag{31}$$

Здесь матрицы $M_{nm}^{(\mathrm{I})}$ и $P_{nm}^{(\mathrm{I})}$ — те же, что и в (25), (26), а

$$N_{nm}^{(\mathrm{I})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{\rho^{2m+2k+1}}\frac{(2m+2k)!}{(2m-1)!(2k+1)!}\Lambda_{2k+1,2n+1}^{(\mathrm{I})}$$

$$(n\geqslant 0,\quad m\geqslant 1), \tag{32}$$

$$Q_{nm}^{(\mathrm{I})}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{\rho^{2m+2k}}\frac{(2m+2k-1)!}{(2m-1)!(2k)!}\overline{\Lambda}_{2k,2n}^{(\mathrm{I})}$$

$$(n\geqslant 1,\quad m\geqslant 1). \tag{33}$$

Аналогичным образом ищется поправка $\Phi_{\mathrm{II}}^{(3)}(z)$.

В следующих приближениях потенциал $\Phi_{\mathrm{I}}^{(N)}(z)$ воспроизводит форму (29) с соотношениями между коэффициентами $b_n^{(N)}$ и $d_n^{(N-1)}$ вида (30)–(31) с теми же матрицами $M_{nm}^{(\mathrm{I})}$, $N_{nm}^{(\mathrm{I})}$, $P_{nm}^{(\mathrm{I})}$ и $Q_{nm}^{(\mathrm{I})}$. Аналогичные утверждения справедливы и для $\Phi_{\mathrm{II}}^{(N)}(z)$.

Комплексный потенциал задачи

Суммирование поправок всех порядков дает следующее выражение для полного комплексного потенциала вне цилиндров:

$$\Phi(z) = \beta\{z + \Phi_{\mathrm{I}}(z) + \Phi_{\mathrm{II}}(z)\}, \tag{34}$$

$$\Phi_{\mathrm{I}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(z - z_{\mathrm{I}})^{2n+1}} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(z - z_{\mathrm{I}})^{2n}}, \tag{35}$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{2n+1}}{(z - z_{\mathrm{II}})^{2n+1}} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{2n}}{(z - z_{\mathrm{II}})^{2n}}. \tag{36}$$

Коэффициенты b_{2n+1}, b_{2n}, d_{2n+1} и d_{2n} подчиняются системе уравнений, которую запишем в „векторном“ виде,

$$\mathbf{x}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nm}\, \mathbf{y}_m = \mathbf{x}^{(1)}_n, \tag{37}$$

$$\mathbf{y}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}^{(\mathrm{II})}_{nm} \mathbf{x}_m = \mathbf{y}^{(1)}_n; \tag{38}$$

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} b_{2n+1} \\ b_{2n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} d_{2n+1} \\ d_{2n} \end{pmatrix}; \tag{39}$$

$$\hat{S}^{(a)}_{nm} = \begin{pmatrix} M^{(a)}_{nm} & N^{(a)}_{nm} \\ P^{(a)}_{nm} & Q^{(a)}_{nm} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где индекс a принимает значение I или II.

Матрицы M_{nm}, P_{nm} и N_{nm}, Q_{nm} даются выражениями (25), (26) и (32), (33), причем они доопределены следующим образом:

$$N_{n0} = 0, \quad P_{0n} = 0, \quad Q_{0n} = Q_{n0} = 0, \tag{41}$$

так как $b_0 = d_0 = 0$. Заметим также, что в силу равенств $b^{(1)}_{2n} = d^{(1)}_{2n} = 0$ имеем

$$\mathbf{x}^{(1)}_n = \begin{pmatrix} b^{(1)}_{2n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(1)}_n = \begin{pmatrix} d^{(1)}_{2n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

с $b^{(1)}_{2n+1}$ из (17) и $d^{(1)}_{2n+1}$ из (18).

Решая уравнения (37) и (38) итерациями, для $\mathbf{x}_n$ получим следующее разложение по степеням матриц $\hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nm}$ и $\hat{S}^{(\mathrm{II})}_{nm}$:

$$\mathbf{x}_n = \sum_m \Big\{ \delta_{nm} + \sum_l \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nl} \hat{S}^{(\mathrm{II})}_{lm} + \sum_j \sum_k \sum_l \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nj} \hat{S}^{(\mathrm{II})}_{jk} \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{kl} \hat{S}^{(\mathrm{II})}_{lm} + \ldots \Big\} \mathbf{x}^{(1)}_m + \sum_m \Big\{ \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nm} + \sum_k \sum_l \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nk} \hat{S}^{(\mathrm{II})}_{kl} \hat{S}^{(\mathrm{I})}_{lm} + \ldots \Big\} \mathbf{y}^{(1)}_m. \tag{43}$$

Для $\mathbf{y}_n$ получается разложение вида (43) с заменой индексов I $\rightleftarrows$ II и величин $\mathbf{x}^{(1)}_m \rightleftarrows \mathbf{y}^{(1)}_m$.

Случай, когда внешнее однородное поле приложено вдоль оси y, так что

$$\overline{\Phi}^{(0)}(z) = -i\beta z \tag{44}$$

рассматривается аналогичным образом. В результате получаем соответствующие величины и отмечаем их черточкой сверху

$$\overline{\Phi}(z) = \beta\{-iz + \overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(z) + \overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(z)\}, \tag{45}$$

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{I}}(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{b}_{2n+1}}{(z - z_{\mathrm{I}})^{2n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{b}_{2n}}{(z - z_{\mathrm{I}})^{2n}}, \tag{46}$$

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{II}}(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{d}_{2n+1}}{(z - z_{\mathrm{II}})^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{d}_{2n}}{(z - z_{\mathrm{II}})^{2n}}. \tag{47}$$

Систему уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты $\overline{b}_{2n+1}$, $\overline{b}_{2n}$, $\overline{d}_{2n+1}$ и $\overline{d}_{2n}$, также запишем в векторном виде

$$\overline{\mathbf{x}}_n + \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\overline{S}}^{(\mathrm{I})}_{nm}\, \overline{\mathbf{y}}_m = \overline{\mathbf{x}}^{(1)}_n, \tag{48}$$

$$\overline{\mathbf{y}}_n + \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\overline{S}}^{(\mathrm{II})}_{nm}\, \overline{\mathbf{x}}_m = \overline{\mathbf{y}}^{(1)}_n. \tag{49}$$

Величины $\overline{\mathbf{x}}_n$, $\overline{\mathbf{y}}_n$ и $\hat{\overline{S}}^{(a)}_{nm}$ определяются аналогично формулам (39) и (40). Выражения для матриц $\overline{M}^{(\mathrm{I})}_{nm}$ и $\overline{N}^{(\mathrm{I})}_{nm}$ следует из (25) и (32) заменой $\Lambda^{(\mathrm{I})}_{2k+1,2n+1}$ на $\overline{\Lambda}^{(\mathrm{I})}_{2k+1,2n+1}$, а $\overline{P}^{(\mathrm{I})}_{nm}$ и $\overline{Q}^{(\mathrm{I})}_{nm}$ — из (26) и (33) заменой $\overline{\Lambda}^{(\mathrm{I})}_{2k,2n}$ на $\Lambda^{(\mathrm{I})}_{2k,2n}$. Аналогичным образом определяются матрицы $\overline{M}^{(\mathrm{II})}_{nm}$, $\overline{N}^{(\mathrm{II})}_{nm}$, $\overline{P}^{(\mathrm{II})}_{nm}$ и $\overline{Q}^{(\mathrm{II})}_{nm}$. В силу равенства (14) из сравнения (48), (49) с (37), (38) находим

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = -\overline{\mathbf{x}}_n, \quad \tilde{\mathbf{y}}_n = -\overline{\mathbf{y}}_n, \tag{50}$$

так что потенциал (34)–(36) и (45)–(47) удовлетворяют соотношению (13).

Из асимптотики комплексных потенциалов (34)–(36) и (45)–(47) находим главные значения Λ_{xx} и Λ_{yy} тензора дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$ для пары цилиндров

$$\Lambda_{xx} = -\frac{1}{2}\,(b_1 + d_1), \quad \Lambda_{yy} = -\frac{1}{2}\,(\overline{b}_1 + \overline{d}_1). \tag{51}$$

Из (50) следует, в частности, что $\overline{b}_1 = -\tilde{b}_1$ и $\overline{d}_1 = -\tilde{d}_1$, так что из (51) находим $\Lambda_{yy} = -\tilde{\Lambda}_{xx}$, что согласуется с общим соотношением (14) при $n = m = 0$.

Формулой (43) и аналогичным выражением для $\mathbf{y}_n$ даются разложения для коэффициентов b_{2n+1}, b_{2n}, d_{2n+1}, d_{2n} по степеням матриц $\hat{S}^{(\mathrm{I})}_{nm}$ и $\hat{S}^{(\mathrm{II})}_{nm}$. Из (43) можно найти и разложение по степеням $1/\rho$. В частности, положив в (43) $n = 0$, получим

$$b_1 = \Lambda^{(\mathrm{I})}_{11} + \frac{1}{\rho^2}\Lambda^{(\mathrm{I})}_{11}\Lambda^{(\mathrm{II})}_{11} + \frac{1}{\rho^4}\Big[(\Lambda^{(\mathrm{I})}_{11})^2\Lambda^{(\mathrm{II})}_{11} - 3\Lambda^{(\mathrm{I})}_{11}\Lambda^{(\mathrm{II})}_{13} - \Lambda^{(\mathrm{II})}_{11}\Lambda^{(\mathrm{I})}_{31}\Big] + \ldots . \tag{52}$$

Выражение для d_1 следует из (52) заменой индексов $\mathrm{I} \rightleftarrows \mathbf{II}$.

Для одинаковых (и одинаково ориентированных в плоскости x, y) цилиндров уравнения (37), (38) несколько упрощаются. Так как при этом $\hat{S}_{nm}^{(\mathrm{I})} = \hat{S}_{nm}^{(\mathrm{II})} = \hat{S}_{nm}$, то, как видно из сравнения (43) с аналогичным разложением для $\mathbf{y}_n$, в этом случае $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n$, т. е. $d_{2n+1} = b_{2n+1}$ и $d_{2n} = b_{2n}$. Поэтому система (37), (38) сводится к одному векторному уравнению

$$\mathbf{x}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}_{nm}\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_n^{(1)}. \tag{53}$$

Случай круговых цилиндров

Для цилиндра круговой формы радиуса R матрица мультипольных поляризуемостей имеет диагональный вид

$$\Lambda_{nm} = R^{n+m}\,\frac{1-h}{1+h}\,\delta_{nm}, \quad h = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(e)}}. \tag{54}$$

В случае цилиндров одинакового радиуса, положив

$$b_{2n+1} = \xi_n R^2\delta, \quad b_{2n} = \xi_m R^2\delta; \quad \delta = \frac{1-h}{1+h}, \tag{55}$$

приведем уравнение (53) к виду

$$\boldsymbol{\xi}_n - \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}_{nm}\boldsymbol{\xi}_m = \mathbf{1}\cdot\delta_{n0}, \tag{56}$$

где

$$\boldsymbol{\xi}_n = \begin{pmatrix}\xi_n\\ \xi_n\end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{57}$$

Выражение для матрицы $\hat{S}_{nm}$ следует из (40) подстановкой Λ_{nm} из (54); величина $\xi_0 = 0$. Решая уравнение (56) итерациями, получаем

$$\boldsymbol{\xi}_n = \Big\{\delta_{n0} + \hat{S}_{n0} + \sum_{l=0}^{\infty}\hat{S}_{nl}\hat{S}_{l0} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\hat{S}_{nk}\hat{S}_{kl}\hat{S}_{l0} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\hat{S}_{nj}\hat{S}_{jk}\hat{S}_{kl}\hat{S}_{l0} + \ldots\Big\}\mathbf{1}. \tag{58}$$

При $n = 0$ из (58) находим разложение коэффициента ξ_0 по степеням $1/\rho$ и тем самым разложение поляризуемости Λ_{xx}

$$\Lambda_{xx} = -\xi_0 R^2\delta = -R^2\delta\Big\{1 + \Big(\frac{R}{\rho}\Big)^2\delta + \Big(\frac{R}{\delta}\Big)^4\delta^2 + \Big(\frac{R}{\rho}\Big)^6(2+\delta)\delta^2 + \Big(\frac{R}{\delta}\Big)^8(1+\delta)(3+\delta)\delta^2 + \ldots\Big\}. \tag{59}$$

Заметим, что к разложению (59) можно прийти более простым, чем с помощью формулы (58), способом. Для этого воспользуемся следующим приемом. При $n = 0$ из (56) имеем

$$\boldsymbol{\xi}_0 - \hat{S}_{00}\boldsymbol{\xi}_0 - \sum_{m=1}^{\infty}\hat{S}_{0m}\boldsymbol{\xi}_m = \mathbf{1}. \tag{60}$$

Соответственно при $n \neq 0$

$$\boldsymbol{\xi}_n = \hat{S}_{n0}\boldsymbol{\xi}_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\hat{S}_{nm}\boldsymbol{\xi}_m. \tag{61}$$

Решая уравнение (61) итерациями, получим

$$n \neq 0: \quad \boldsymbol{\xi}_n = \Big\{\hat{S}_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty}\hat{S}_{nm}\hat{S}_{m0} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{S}_{nl}\hat{S}_{lm}\hat{S}_{m0} + \ldots\Big\}\boldsymbol{\xi}_0. \tag{62}$$

Подстановка (62) в (60) дает

$$\Big\{1 - \hat{S}_{00} - \sum_{m=1}^{\infty}\hat{S}_{0m}\hat{S}_{m0} - \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{S}_{0l}\hat{S}_{lm}\hat{S}_{m0} - \ldots\Big\}\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{1}. \tag{63}$$

Отсюда получаем следующее разложение для ξ_0^{-1} по степеням R/ρ:

$$\xi_0^{-1} = 1 - \Big[\Big(\frac{R}{\rho}\Big)^2\delta + 2\Big(\frac{R}{\rho}\Big)^6\delta^2 + 3\Big(\frac{R}{\rho}\Big)^8\delta^2 + \ldots\Big]. \tag{64}$$

Из (64) для $\Lambda_{xx} = -\xi_0 R^2\delta$ следует разложение (59).

Поляризуемость пары круговых цилиндров может быть найдена точно с помощью биполярных координат (см., например, [7], где следует произвести замену $x \rightleftarrows y$)

$$\Lambda_{xx} = -\frac{1}{2}\,(1-h)(\rho^2 - 4R^2)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{1 - \operatorname{th} n\mu_0}{h + \operatorname{th} n\mu_0}, \tag{65}$$

$$\mu_0 = \ln\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4R^2}}{2R}. \tag{66}$$

Разложение Λ_{xx} из (65) по степеням R/ρ с точностью до $(R/\rho)^8$ включительно приводит к выражению (59).

Приложение

В общем случае разложения типа (6), (7) имеют вид

$$\Phi_n(z) = z^n + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Lambda_{nm} + i\Gamma_{nm}}{z^m} \tag{П.1}$$

с вещественными константами Λ_{nm} и Γ_{nm}. Для неоднородного внешнего поля с комплексным потенциалом

$$\Phi_{2n+1}(z) = z^{2n+1} \tag{П.2}$$

соответствующая напряженность обладает следующей симметрией:

$$E_x^0(-x, y) = E_x^0(x, y), \quad E_y^0(-x, y) = -E_y^0(x, y),$$

$$E_x^0(x, -y) = E_x^0(x, y), \quad E_y^0(x, -y) = -E_y^0(x, y). \quad (\text{П.3})$$

Если тело симметрично относительно оси y, то для полной напряженности имеем $E_x(-x, y) = E_x(x, y)$. Последнее возможно только при $\Lambda_{2n+1,2m} = 0$ и $\Gamma_{2n+1,2m+1} = 0$, так что в этом случае комплексный потенциал имеет вид

$$\Phi_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{2n+1,2m}}{z^{2m}}. \quad (\text{П.4})$$

При этом соотношение $E_y = (-x, y) = -E_y(x, y)$ выполняется тождественно. Если же тело симметрично относительно оси x, то $E_x(x, -y) = E_x(x, y)$ и тогда

$$\Phi_{2n+1}(z) = z^{2n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{2n+1,m}}{z^m}. \quad (\text{П.5})$$

При этом $E_y(x, -y) = -E_y(x, y)$. Наконец, если тело симметрично как относительно оси x, так и y, то комплексный потенциал имеет вид (6).

Для напряженности внешнего поля с комплексным потенциалом

$$\Phi_{2n}^0(z) = z^{2n} \quad (\text{П.6})$$

имеем

$$E_x^0(-x, y) = -E_x^0(x, y), \quad E_y^0(-x, y) = E_y^0(x, y),$$

$$E_x^0(x, -y) = E_x^0(x, y), \quad E_y^0(x, -y) = -E_y^0(x, y). \quad (\text{П.7})$$

В случае тела, симметричного относительно оси y, из (П.1) следует

$$\Phi_{2n}(z) = z^{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{2n,2m}}{z^{2m}} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{2n,2m+1}}{z^{2m+1}}. \quad (\text{П.8})$$

Соответственно для тела, симметричного относительно оси x, имеем

$$\Phi_{2n}(z) = z^{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{2n,m}}{z^m}. \quad (\text{П.9})$$

При симметрии тела относительно обеих осей комплексный потенциал имеет вид (7).

Аналогичным образом рассматривается потенциал

$$\overline{\Phi}_n(z) = -i\left\{z^n - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{nm} - i\Gamma_{nm}}{z^m}\right\} \quad (\text{П.10})$$

с действительными $\overline{\Lambda}_{nm}$ и $\overline{\Gamma}_{nm}$. Для симметричного относительно оси y тела имеем

$$\overline{\Phi}_{2n+1}(z) = -i\left\{z^{2n+1} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{2n+1,2m+1}}{z^{2m+1}} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\Gamma}_{2n+1,2m}}{z^{2m}}\right\}, \quad (\text{П.11})$$

$$\overline{\Phi}_{2n}(z) = -i\left\{z^{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{2n,2m}}{z^{2m}} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{\Gamma}_{2n,2m+1}}{z^{2m+1}}\right\}. \quad (\text{П.12})$$

Соответственно для тела, симметричного относительно оси x,

$$\overline{\Phi}_{2n+1}(z) = -i\left\{z^{2n+1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{2n+1,m}}{z^m}\right\}, \quad (\text{П.13})$$

$$\overline{\Phi}_{2n}(z) = -i\left\{z^{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\Lambda}_{2n,m}}{z^m}\right\}. \quad (\text{П.14})$$

Наконец, для тела, симметричного относительно обеих осей, комплексный потенциал имеет вид (11) или (12).

Список литературы

[1] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
[2] *Levine H.B., McQuarrie D.A.* // J. Chem. Phys. 1968. Vol. 49. N 9. P. 4181–4187.
[3] *Lucas A.A., Ronveaux A., Schmeits M., Delanaye F.* // Phys. Rev. B. 1975. P. 5372–5380.
[4] *Goyette A., Navon A.* // Phys. Rev. B. 1976. Vol. 13. N 10. P. 4320–4327.
[5] *Ruppin R.* // Phys. Rev. B. 1982. Vol. 26. N 6. P. 3440–3444.
[6] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ 2001. Т. 120. Вып. 3 (9). С. 668–677.
[7] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. Вып. 1 (7). С. 110–115.
[8] *Балагуров Б.Я.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. № 3. С. 428–435.
[9] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. Вып. 2 (8). С. 419–428.