01

Экранирование низкочастотных электрических полей системой экранов: тонкая незамкнутая эллипсоидная оболочка–тонкостенный проницаемый цилиндр

© С.М. Аполлонский,[1] В.Т. Ерофеенко,[2] Г.Ч. Шушкевич[3]

[1] Международная академия наук экологии и безопасности жизнедеятельности,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Белорусский государственный университет,
220050 Минск, Белоруссия
[3] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия
e-mail: appolo@promt.spb.su

(Поступило в Редакцию 17 декабря 2002 г.)

Решена задача о проникновении низкочастотного электрического поля через тонкостенный бесконечный проводящий цилиндр, на оси которого находится идеально тонкая незамкнутая эллипсоидная проводящая оболочка, методом парных уравнений с использованием соответствующих теорем сложения и усредненных граничных условий. Численно исследовано влияние угла раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки на коэффициент ослабления поля внутри этой оболочки для некоторых геометрических параметров экранов.

С практической и теоретической точек зрения важным классом задач электродинамики являются задачи экранирования электромагнитных полей (ЭМП). В случае тонкостенных экранов не проводят исследование электромагнитных процессов в слое экрана, а связывают ЭМП по обе стороны проводящего экрана с помощью эквивалентных граничных условий, заданных на срединной поверхности экрана [1–3]. Такой подход строго обоснован, если толщина экрана не превышает глубину проникновения ЭМП. В данной работе исследуется проникновение низкочастотного электрического поля через тонкостенную цилиндрическую проводящую оболочку в присутствии тонкой незамкнутой эллипсоидальной идеально проводящей оболочки. Полученные результаты могут быть использованы при конструировании экранирующих систем.

Постановка задачи экранирования

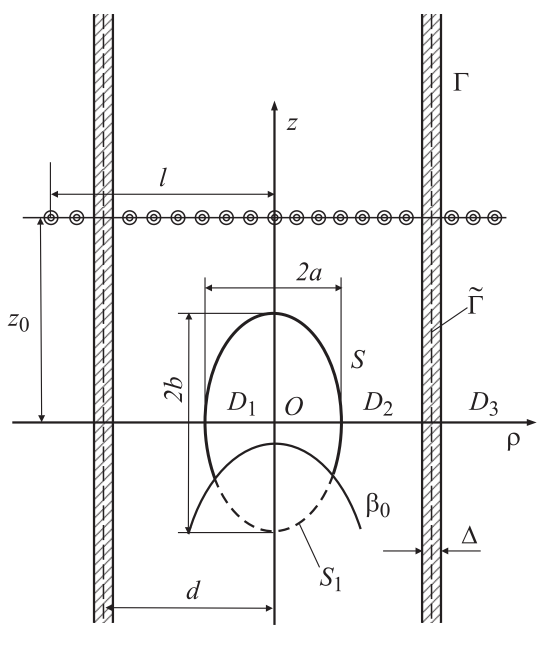
Пусть в однородном изотропном пространстве R^3 с диэлектрической проницаемостью ε_0 находится тонкостенный бесконечный цилиндр Γ толщины Δ. На оси цилиндра расположена идеально тонкая незамкнутая вытянутая эллипсоидальная идеально проводящая оболочка S, расположенная на вытянутом эллипсоиде вращения S_1 (см. рисунок). Среда, заполняющая тонкостенный цилиндр Γ, характеризуется диэлектрической проницаемостью ε, магнитной проницаемостью μ и электрической проводимостью γ. На окружности радиуса $l > d$ равномерно распределен электрический заряд q, колеблющийся по закону $q\cos\omega t$, где ω — круговая частота.

Для решения задачи свяжем с точкой O цилиндрические $\{\rho, \varphi, z\}$ и вырожденные эллипсоидные $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ координаты. Оболочка S в системе координат $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ описывается следующим образом:

$$S = \left\{\alpha = \alpha_0 = \operatorname{Arch}\frac{b}{c},\ 0 \le \beta \le \beta_0 < \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\},$$

где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ — половина межфокусного расстояния, b и a — большая и малая полуоси эллипсоида соответственно.

Далее условно разобьем все пространство R^3 поверхностью эллипсоида S_1 и срединной поверхностью $\tilde{\Gamma}$ тонкостенного цилиндра Γ радиуса d на три области: D_1 — область, расположенная внутри эллипсоида S_1, D_3 — область вне цилиндра $\tilde{\Gamma}$, $D_2 = R^3 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2)$.



Ставится задача о рассеянии первичного поля на системе экранов Γ и S с учетом проникновения поля через цилиндрический слой Γ, при этом предполагается непроницаемость оболочки S для поля.

Обозначим через U_d потенциал первичного поля, U_j — потенциал вторичного поля в области D_j, $j = 1, 2, 3$. В квазистационарном приближении решение задачи сводится к нахождению электрических потенциалов U_j в областях D_j, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяющих:

уравнению Лапласа $\Delta U_j = 0$;

граничным условиям на срединной поверхности $\tilde{\Gamma}$ [4, с. 86], описывающим проникновение поля через тонкостенный цилиндрический слой Γ,

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(U_3 + U_d - U_2)\Big|_{\tilde{\Gamma}} = -pF(U_3 + U_d + U_2)\big|_{\tilde{\Gamma}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(U_3 + U_d + U_2)\Big|_{\tilde{\Gamma}} = qF(U_3 + U_d - U_2)\big|_{\tilde{\Gamma}}, \quad (2)$$

где

$$p = \frac{\varepsilon'\delta}{2\varepsilon_0}, \quad q = \frac{2}{\omega^2\delta\mu\varepsilon_0}, \quad \delta = \frac{2}{k}\,\mathrm{tg}\left(\frac{k\Delta}{2}\right),$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}, \quad 0 \le \arg k < \pi,$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\,\frac{\gamma}{\omega}$$

— комплексная диэлектрическая проницаемость; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота поля; $F(U_j) = (\mathbf{n}, \mathrm{rot}\,[\mathbf{n} \times \mathrm{grad}\, U_j])$ — граничный оператор на срединной поверхности $\tilde{\Gamma}$ цилиндрической оболочки Γ; $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности $\tilde{\Gamma}$, направленная в область D_3;

граничному условию на поверхности тонкой незамкнутой эллипсоидальной идеально проводящей оболочке S

$$U_2(M)\big|_{M\in S} = V - \mathrm{const}, \quad (3)$$

условию на бесконечности

$$U_j(M) \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty; \quad j = 2, 3, \quad (4)$$

где M — произвольная точка области D_j.

Потребуем также выполнения условия непрерывности потенциала на поверхности S_1 и условия непрерывности поля на открытой части поверхности эллипсоида $S_1 \setminus S$

$$U_1 = U_2, \quad \alpha = \alpha_0, \quad 0 \le \beta \le \pi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial U_2}{\partial\alpha}, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta_0 < \beta \le \pi. \quad (6)$$

Граничный оператор $F(U_j)$ в цилиндрической системе координат имеет представление [3]

$$F(U_j) = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}U_j + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U_j. \quad (7)$$

Представление решения задачи

Потенциал первичного поля имеет представление

$$U_d = U_0\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\frac{I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda d)}\exp(i\lambda z)\,dz, \quad (8)$$

где

$$U_0 = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0}, \quad f(\lambda) = K_0(|\lambda|l)I_0(\lambda d)\exp(-i\lambda z_0),$$

z_0 — расстояние от начала координат.

Потенциалы U_j ищем в виде суперпозиции цилиндрических и эллипсоидальных гармонических функций так, чтобы выполнялось условие на бесконечности (4),

$$U_1(\alpha, \beta) = \frac{U_0}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{y}_n\,\frac{P_n(\mathrm{ch}\,\alpha)}{P_n(\mathrm{ch}\,\alpha_0)}P_n(\cos\beta) \quad \text{в} \quad D_1,$$

$$U_2 = U_2^{(1)}(\alpha, \beta) + U_2^{(2)}(\rho, z) \quad \text{в} \quad D_2, \quad (9)$$

где

$$U_2^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{U_0}{d}\sum_{n=0}^{\infty}y_n\,\frac{Q_n(\mathrm{ch}\,\alpha)}{Q_n(\mathrm{ch}\,\alpha_0)}P_n(\cos\beta), \quad (10)$$

$$U_2^{(2)}(\rho, z) = U_0\int_{-\infty}^{\infty}Z(\lambda)\,\frac{I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda d)}\exp(i\lambda z)\,d\lambda, \quad (11)$$

$$U_3(\rho, z) = U_0\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{Z}(\lambda)\,\frac{K_0(|\lambda|\rho)}{K_0(|\lambda|d)}\exp(i\lambda z)\,d\lambda \quad \text{в} \quad D_3. \quad (12)$$

Здесь $P_n(\cos\beta)$ — полиномы Лежандра, $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода соответственно, $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, $K_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) [5–8].

Неизвестные коэффициенты $\tilde{y}_n$, y_n и функции $\tilde{Z}(\lambda)$, $Z(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий.

Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (1), (2) представим потенциал $U_2^{(1)}(\alpha, \beta)$ через цилиндрические гармонические функции, используя соответствующие теоремы сложения [3,9]. Тогда

$$U_2^{(1)}(\rho, z) = U_0\int_{-\infty}^{\infty}M(\lambda)K_0(|\lambda|\rho)\exp(i\lambda z)\,d\lambda, \quad (13)$$

где

$$M(\lambda) = \frac{c}{\pi d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j_n(c\lambda)}{i^nQ_n(\mathrm{ch}\,\alpha_0)}y_n, \quad (14)$$

$j_n(z)$ — сферическая функция Бесселя первого рода [5,9].

Принимая во внимание представления (8), (11)–(13), представление граничного оператора $F(U_j)$ в цилиндрической системе координат (7) и выполняя граничные условия (1), (2), получим систему вида

$$\big(K_0'(x)|\lambda| - \lambda^2 pK_0(x)\big)I_0(x)\tilde{Z}(\lambda)$$

$$- \big(I_0'(x)|\lambda| + \lambda^2 pI_0(x)\big)K_0(x)Z(\lambda)$$

$$= \big(K_0'(x)|\lambda| + \lambda^2 pK_0(x)\big)I_0(x)K_0(x)M(\lambda)$$

$$+ \big(\lambda^2 pI_0(x) - |\lambda|I_0'(x)\big)K_0(x)f(\lambda),$$

$$\big(K_0'(x)|\lambda| + \lambda^2 qK_0(x)\big)I_0(x)\tilde{Z}(\lambda)$$

$$+ \big(I_0'(x)|\lambda| - \lambda^2 qI_0(x)\big)K_0(x)Z(\lambda)$$

$$= \big(-K_0'(x)|\lambda| + \lambda^2 qK_0(x)\big)I_0(x)K_0(x)M(\lambda)$$

$$- \big(\lambda^2 qI_0(x) + |\lambda|I_0'(x)\big)K_0(x)f(\lambda),$$

где $x = |\lambda|d$.

Решая данную систему получим, что

$$Z(\lambda) = Z_1(|\lambda|d)f(\lambda) + I_0(\lambda d)M(\lambda)Z_2(|\lambda|d), \tag{15}$$

где

$$Z_1(|\lambda|d) = \frac{(q+p)}{d}\,\frac{(\lambda d)^2}{\Delta(|\lambda|d)},$$

$$Z_2(|\lambda|d) = -\frac{2}{\Delta(|\lambda|d)}\Big[(\lambda d)^2\big(K_1(|\lambda|d)\big)^2$$

$$+ \frac{pq}{d^2}\,(\lambda d)^4\big(K_0(|\lambda|d)\big)^2\Big],$$

$$\Delta(|\lambda|d) = \frac{q-p}{d}\,\lambda d^2 - 2(\lambda d)^2 K_1(|\lambda|d)I_1(|\lambda|d)$$

$$+ 2\,\frac{pq}{d^2}\,(\lambda d)^4 K_0(|\lambda|d)I_0(|\lambda|d).$$

Для выполнения граничных условий (3), (5), (6) представим $U_2^{(2)}(\rho, z)$ через эллипсоидальные гармонические функции, используя соответствующую теорему сложения [3,9]. Тогда

$$U_2^{(2)}(\alpha,\beta) = U_0\sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\operatorname{ch}\alpha)P_n(\cos\beta), \tag{16}$$

где

$$D_n = i^n(2n+1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j_n(c\lambda)}{I_0(\lambda d)}\,Z(\lambda)\,d\lambda. \tag{17}$$

Согласно представлениям (9), (10), (16), условие непрерывности потенциала на поверхности эллипсоида S_1 в силу ортогональности полиномов Лежандра $P_n(\cos\beta)$ на отрезке $[0,\pi]$ эквивалентно условию

$$\tilde{y}_n = y_n + dD_nP_n(\operatorname{ch}\alpha_0); \quad n = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{18}$$

Выполняя граничные условия (3), (6) и принимая во внимание представление (18) и вронскиан [7]

$$W\{P_n(\operatorname{ch}\alpha), Q_n(\operatorname{ch}\alpha)\} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha},$$

получим парные сумматорные уравнения вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_nP_n(\cos\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(V_0\delta_{0n} - dD_nP_n(\operatorname{ch}\alpha_0)\big)P_n(\cos\beta),$$

$$0 \le \beta < \beta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{\operatorname{sh}\alpha_0 P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}P_n(\cos\beta) = 0,$$

$$\beta_0 < \beta \le \pi, \tag{19}$$

где δ_{0n} — символ Кронекера, $V_0 = V_d/U_0$.

Введем в рассмотрение новые коэффициенты T_n по формуле

$$y_n = (2n+1)\operatorname{sh}\alpha_0 P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)T_n \tag{20}$$

и малый параметр

$$g_n = 1 - (2n+1)\operatorname{sh}\alpha_0 P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0),$$

$$g_n = O(n^{-2}) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{21}$$

Тогда парные уравнения (19) преобразуются к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-g_n)T_nP_n(\cos\beta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\big(V_0\delta_{0n} - dD_nP_n(\operatorname{ch}\alpha_0)\big)P_n(\cos\beta), \quad \beta < \beta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)T_nP_n(\cos\beta) = 0, \quad \beta_0 < \beta.$$

Вышеприведенные парные сумматорные уравнения преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода относительно коэффициентов $T_n \in l_2$ [8,9]

$$T_s - \sum_{n=0}^{\infty} g_nQ_{sn}T_n = V_0Q_{s0}$$

$$- d\sum_{n=0}^{\infty} D_nP_n(\operatorname{ch}\alpha_0)Q_{ns}, \quad s = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{22}$$

где

$$Q_{ns} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\beta_0}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\left(s+\frac{1}{2}\right)x\,dx$$

или

$$Q_{ns} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-s)\beta_0}{(n-s)} + \frac{\sin(n+s+1)\beta_0}{(n+s+1)}\right],$$

$$\frac{\sin(n-s)\beta_0}{(n-s)}\bigg|_{n=s} = \beta_0.$$

Из представлений (14), (20) следует, что

$$M(\lambda) = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha_0}{\pi d} \times \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k(2k+1)j_k(c\lambda)P_k(\mathrm{ch}\,\alpha_0)T_k. \quad (23)$$

Используя последовательно представления (15), (17), (23) преобразуем правую часть системы (22). В результате получим бесконечную СЛАУ вида

$$T_s - \sum_{n=0}^{\infty}[g_n Q_{sn} - \alpha_{ns}]T_n = V_0 Q_{s0} - f_s;$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где

$$\alpha_{ns} = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_0}{\pi}(-1)^n(2n+1)P_n(\mathrm{ch}\,\alpha_0) \times \sum_{p=0}^{\infty} i^{n+p}(2p+1)P_p(\mathrm{ch}\,\alpha_0)Q_{ps}I_{np}, \quad (25)$$

$$I_{np} = 2\tau\int\limits_0^{\infty} j_n(\tau t)j_p(\tau t)Z_2(t)\,dt,$$

$$\tau = \frac{c}{d}, \quad n+p \text{ — четное}, \quad (26)$$

$$f_s = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\mathrm{ch}\,\alpha_0)Q_{ns}J_n, \quad (27)$$

$$J_n = 2\int\limits_0^{\infty} j_n(\tau t)Z_1(t)K_0(\sigma t)p_n(t)\,dt, \quad \sigma = \frac{l}{d},$$

$$p_n(t) = \begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{z_0}{d}t\right), & n \text{ — четное},\\ (-1)^{\frac{n+3}{2}}\sin\left(\frac{z_0}{d}t\right), & n \text{ — нечетное}.\end{cases} \quad (28)$$

Вычисление коэффициента экранирования (ослабления) поля

Напряженность первичного поля в произвольной точке пространства $M_0(\rho, z)$ в отсутствие экранов равна

$$\mathbf{E}_d(M_0) = -\left(\frac{\partial U_d}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{\partial U_d}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)$$

$$= -U_0\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\frac{I_0'(\lambda\rho)}{I_0(\lambda d)}\lambda e^{i\lambda z}\,d\lambda\,\mathbf{e}_\rho + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\frac{I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda d)}(i\lambda)e^{i\lambda z}\,d\lambda\,\mathbf{e}_z\right].$$

Если точка $M_0(\rho, z)$ находится на оси Oz, то $\rho = 0$ и $I_0(0) = 1$, $I_1(0) = 0$. Поэтому

$$\mathbf{E}_d(0, z) = -U_0\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)(i\lambda)e^{i\lambda z}\,d\lambda\,\mathbf{e}_z$$

$$= \frac{2U_0}{d^2}\int\limits_0^{\infty} K_0(\sigma t)I_0(t)t\sin\left[\frac{t(z-z_0)}{d}\right]dt\,\mathbf{e}_z. \quad (29)$$

Напряженность вторичного поля в произвольной точке M_0 на оси Oz области D_2 равна

$$\mathbf{E}_2(M_0) = \mathbf{E}_2^{(1)}(M_0) + \mathbf{E}_2^{(2)}(M_0), \quad (30)$$

где

$$\mathbf{E}_2^{(2)}(M_0) = -\left(\frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)\bigg|_{\rho=0}$$

$$= -U_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Z(\lambda)}{I_0(\lambda d)}(i\lambda)e^{i\lambda z}\,d\lambda\,\mathbf{e}_z.$$

Принимая во внимание представления (15), (23), после некоторых преобразований получим, что

$$\mathbf{E}_2^{(2)}(0, z) = -U_0[I_{12}(z) + I_{22}(z)]\,\mathbf{e}_z, \quad (31)$$

где

$$I_{12}(z) = -\frac{2}{d^2}\int\limits_0^{\infty} Z_1(t)K_0(\sigma t)\,t\sin\left(\frac{t(z-z_0)}{d}\right)dt,$$

$$I_{22}(z) = \frac{2c\,\mathrm{sh}\,\alpha_0}{\pi d^3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)P_k(\mathrm{ch}\,\alpha_0)T_kH_k(z),$$

$$H_k(z) = \int\limits_0^{\infty} Z_2(t)\,j_k(\tau t)\,t\,W_k(z, t)\,dt,$$

$$W_k(t,z)=\begin{cases}(-1)^{\frac{3k+2}{2}}\sin\left(\dfrac{z}{d}t\right), & k \text{ — четное},\\ (-1)^{\frac{3k+2}{2}}\cos\left(\dfrac{z}{d}t\right), & k \text{ — нечетное}.\end{cases}$$

Согласно представлению (10),

$$\mathbf{E}_2^{(1)}(M_0)=-\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\beta}}\left[\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha+\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\beta}\mathbf{e}_\beta\right],$$

где

$$\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\alpha}=\frac{U_0\operatorname{sh}\alpha}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}\frac{d}{d\xi}Q_n(\xi)\bigg|_{\xi=\operatorname{ch}\alpha}P_n(\cos\beta),$$

$$\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\beta}=-\frac{U_0}{d}\sin\beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}$$

$$\times Q_n(\operatorname{ch}\alpha)\frac{d}{d\xi}P_n(\xi)\bigg|_{\xi=\cos\beta}.$$

Если точка находится на оси Oz, то $|z|>b, \beta=0$ или $\beta=\pi$, поэтому

$$\mathbf{E}_2^{(1)}(0,z)=\begin{cases}\mathbf{E}_2^{(1+)}(0,z)=-\dfrac{1}{c\operatorname{sh}\alpha}\dfrac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\alpha}\mathbf{e}_z, \\ \qquad\text{если } z>b, \beta=0,\\ \mathbf{E}_2^{(1-)}(0,z)=\dfrac{1}{c\operatorname{sh}\alpha}\dfrac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\alpha}\mathbf{e}_z,\\ \qquad\text{если } z<-b, \beta=\pi,\end{cases}$$

где

$$\mathbf{E}_2^{(1+)}(0,z)=-U_0\frac{\operatorname{sh}\alpha_0}{cd}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)$$

$$\times P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)T_n\frac{d}{d\xi}Q_n(\xi)\bigg|_{\xi=\frac{z}{c}}\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{E}_2^{(1-)}(0,z)=U_0\frac{\operatorname{sh}\alpha_0}{cd}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$$

$$\times P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)T_n\frac{d}{d\xi}Q_n(\xi)\bigg|_{\xi=\frac{z}{c}}\mathbf{e}_z,$$

Коэффициент экранирования (ослабления) поля в точке $M_0(0,z)$, расположенной на оси Oz в области D_2, вычисляем по формуле

$$K_2^{(\pm)}(z)=\frac{\left|\mathbf{E}_2^{(1\pm)}(0,z)+\mathbf{E}_2^{(2)}(0,z)\right|}{\mathbf{E}_d(0,z)}. \tag{32}$$

Напряженность вторичного поля в произвольной точке M_0 на оси Oz области D_1 равна

$$\mathbf{E}_1(0,z)=\begin{cases}\mathbf{E}_1^{(+)}(0,z)=-\dfrac{1}{c\operatorname{sh}\alpha}\dfrac{\partial U_1}{\partial\alpha}\mathbf{e}_z,\\ \qquad\text{если } 0\le z<b, \beta=0,\\ \mathbf{E}_1^{(-)}(0,z)=\dfrac{1}{c\operatorname{sh}\alpha}\dfrac{\partial U_1}{\partial\alpha}\mathbf{e}_z,\\ \qquad\text{если } -b<z\le 0, \beta=\pi,\end{cases}$$

где

$$\mathbf{E}_1^{(+)}(0,z)=-\frac{U_0}{cd}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{y}}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}\frac{d}{d\xi}P_n(\xi)\bigg|_{\xi=\frac{z}{c}}\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{E}_1^{(-)}(0,z)=\frac{U_0}{cd}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\tilde{y}}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}\frac{d}{d\xi}P_n(\xi)\bigg|_{\xi=\frac{z}{c}}\mathbf{e}_z.$$

Согласно представлениям (15), (17), (18), (20), (23), следует, что

$$\frac{\tilde{y}}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}=(2n+1)\operatorname{sh}\alpha_0 Q_n(\operatorname{ch}\alpha_0)T_n$$

$$+(2n+1)J_n+\frac{\operatorname{sh}\alpha_0}{\pi}(2n+1)$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k i^{n+k}(2k+1)P_k(\operatorname{ch}\alpha_0)T_k I_{nk}.$$

Коэффициент экранирования (ослабления) поля в точке $M_0(0,z)$, расположенной на оси Oz в области D_1, вычисляем по формуле

$$K_1^{(+)}(z)=\frac{\left|\mathbf{E}_1^{(\pm)}(0,z)\right|}{\left|\mathbf{E}_d(0,z)\right|}. \tag{33}$$

Вычислительный эксперимент

С помощью математической системы MathCAD 2000 [10] проведены вычисления коэффициента экранирования $K_1^{+}(z)$ в области D_1 для различных геометрических параметров экранов и материала

Отношение $\frac{z}{b}$	Значение угла раствора Θ_0 незамкнутой эллипсоидальной оболочки в градусах		
	60	90	120
$\frac{2}{15}$	$\frac{0.956}{0.016}$	$\frac{0.943}{0.0078}$	$\frac{0.551}{0.00045}$
$\frac{3}{15}$	$\frac{0.695}{0.011}$	$\frac{0.694}{0.0047}$	$\frac{0.291}{0.00041}$
$\frac{4}{15}$	$\frac{0.429}{0.0089}$	$\frac{0.421}{0.0031}$	$\frac{0.173}{0.00039}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{0.284}{0.0073}$	$\frac{0.274}{0.0021}$	$\frac{0.112}{0.00038}$
$\frac{7}{15}$	$\frac{0.137}{0.0051}$	$\frac{0.131}{0.0011}$	$\frac{0.05}{0.00037}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{0.069}{0.0034}$	$\frac{0.067}{0.00056}$	$\frac{0.024}{0.00036}$
$\frac{11}{15}$	$\frac{0.039}{0.0021}$	$\frac{0.037}{0.00039}$	$\frac{0.013}{0.00035}$
$\frac{13}{15}$	$\frac{0.018}{0.00094}$	$\frac{0.016}{0.00028}$	$\frac{0.008}{0.00024}$

тонкостенной оболочки Г по формуле (33). Бесконечные суммы (25), (27) вычислялись с точностью 10^{-6}. Бесконечная СЛАУ (24) решалась методом усечения [11] с точностью 10^{-5}. Расчеты проведены для случаев, когда тонкостенная оболочка Г выполнена из органического стекла ($\varepsilon_r = 3.7$, $\gamma = 10^{-12}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) [12] и материала типа PPV ($\varepsilon_r = 5$, $\gamma = 0.1\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$), $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = (1/36\pi)\,10^{-9}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

В таблице приведены значения коэффициента экранирования $K^{(+)}(z)$ в зависимости от угла раствора Θ_0 незамкнутой эллипсоидальной оболочки S и месторасположения точки $M_0(0,z)$ при $b/a = 1.5$, $d/b = 2$, $d/l = 0.6$, $\Delta = 0.01d$, $V = 0$, $z_0 = 0$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$. В каждой строке таблицы верхние значения соответствуют органическому стеклу, нижние — материалу типа PPV.

На основании вычислительного эксперимента можно сделать следующие выводы.

1. Если тонкостенная цилиндрическая оболочка Г выполнена из материала типа PPV, то коэффициент экранирования $K_1^{(+)}(z)$ практически равен нулю для любого угла раствора Θ_0 эллипсоидальной оболочки S, т. е. поле не проникает в область D_1.

2. При увеличении угла раствора Θ_0 эллипсоидальной оболочки S коэффициент экранирования $K_1^{(+)}(z)$ уменьшается.

3. При увеличении значения z коэффициент экранирования $K^{(+)}(z)$ уменьшается для всех значений угла раствора Θ_0 эллипсоидальной оболочки S.

Список литературы

[1] *Жуков С.В.* // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1983. № 5. С. 54–58.

[2] *Шпицберг В.Е.* // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 110–115.

[3] *Ерофеенко В.Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Минск: Университетское изд-во, 1988. 246 с.

[4] *Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб.: Безопасность, 1999. 416 с.

[5] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1953. 380 с.

[6] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.

[7] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 840 с.

[8] *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

[9] *Шушкевич Г.Ч.* Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения. Гродно: ГрГУ, 1999. 238 с.

[10] *Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В.* Введение в MathCAD 2000. Гродно: ГрГУ, 2001. 140 с.

[11] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

[12] *Енохович А.С.* Справочник по физике. М.: Просвещение, 1990. 384 с.