

О колебательных волновых процессах на поверхности массивных и неоднородных по составу тел

© С.О. Гладков

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: Sglad@newmail.ru

(Поступило в Редакцию 25 декабря 2002 г.)

С помощью лагранжева формализма выведена система взаимосвязанных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая совместные колебания плотности вещества (акустические волны) и гравитационного потенциала, учет которого необходим, если речь идет о массивных телах. Найдены их собственные частоты колебаний. Показано, что спектр поверхностных волн, благодаря взаимодействию с гравитационным потенциалом, сильно деформируется и характеризуется не линейной (как обычный спектр фононов в твердом теле), а квадратичной зависимостью от двумерного поверхностного волнового вектора. Предложенная концепция позволяет выделять дополнительные акустические низкочастотные сигналы, происхождение которых обязано проявлению некоторых внутренних возмущений. Отмечено, что рассмотрение по отдельности звуковых и гравитационных колебаний неправомерно ввиду их сильной корреляции.

Вопрос, который мы рассмотрим в настоящей работе, относится к разряду чисто теоретических проблем. Речь пойдет об исследовании поверхностных колебательных процессов, присущих лишь массивным телам. И хотя сам метод исследования, которым воспользуемся ниже, совсем не нов (мы будем использовать хорошо известный метод наименьшего действия [1]), его эффективность и точность (многочратно проверенные практикой) позволяют решать широчайший спектр проблем из любой области физики, начиная с вывода уравнений Гильберта–Эйнштейна и заканчивая физикой горения и взрыва [2], а также проблемами синергетики [3–5].

Решение этого вопроса представляется нам весьма своевременным и актуальным в связи с тем, что такие поверхностные волны представляют собой естественный шумовой фон массивных тел, изменение которого (т.е. появление некоторого дополнительного шума) может рассматриваться как некий прогноз каких-либо явлений. Понятно, что такой важный вопрос не может быть оставлен без внимания, и цель настоящего сообщения заключается в закрытии этого „белого пятна“. Итак, суть задачи и ее постановка заключаются в следующем.

Представим себе большой плоский участок выделенной поверхности с характерным линейным размером L^* , таким, однако, что $L^* \ll R_0$, где R_0 представляет собой радиус этого массивного тела. Будем предполагать также, что все шероховатости, располагающиеся на площади $\sigma = L^{*2}$, имеют линейный размер $|l^*| \ll L^*$. Причем характерные длины волн колебаний удовлетворяют неравенству $\lambda \gg |l^*|$. Заметим в этой связи, что условие $|l^*| \ll L^*$ не является ограничением на общность излагаемого далее материала, а может рассматриваться лишь как ограничение на длину волны неоднородных колебаний (см. ниже). В самом деле, пусть волновой вектор этих колебаний подчинен неравенству $q_z |l^*| \ll 1$. Заметим, что знак модуля в этом неравенстве про-

сто подчеркивает, что речь идет либо о выпуклостях, либо о вогнутостях поверхности. Далее знак модуля опустим.

Что касается поперечных колебаний (относительно оси z , направленной вдоль радиуса), то их волновой вектор зафиксируем неравенством: $q_{x,y} l^* \gg 1$. Плотность структуры на участке σ и в глубинах $\delta h \geq l^*$ зададим функцией $\rho = \rho(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x, y)$. Характерные интервалы δx изменения плотности $\delta \rho$ удовлетворяют неравенству $\delta x \geq l^*$. Считаем, что функция $\rho(\mathbf{x})$ является монотонной и дифференцируемой и получается путем усреднения некоторой локальной плотности $\rho_1(\mathbf{x})$ по областям $v_0 < l^{*3}$ с весом $G(\xi, \eta, z)$. Это значит, что $\rho(\mathbf{x}) = \int \rho_1(x - \xi, y - \eta, z) G(\xi, \eta, z) d\xi d\eta dz$. Что касается ньютоновского потенциала $\varphi(r)$, то, как известно [1], в нерелятивистском пределе функция $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta \varphi = 4\pi k \rho$, где k — гравитационная постоянная. Его решение в сферически-симметричном случае, когда φ зависит лишь от радиальной координаты r , есть

$$\varphi(r) = \begin{cases} -mk/r & \text{при } r \geq R_0, \\ (2\pi k \rho_0 / 3)(r^2 - 3R_0^2) & \text{при } r \leq R_0, \end{cases} \quad (1)$$

где R_0 — средний радиус тела, m — масса тела.

Подчеркнем, что плотность ρ меняется только на поверхности, но не по радиусу, т.е. ρ берется при $z = R_0$.

Далее, поскольку речь идет о расстояниях r вблизи поверхности (при $r \approx R_0$), то вид решения (1) не имеет значения и будем полагать, что $\varphi = -mk/R_0$.

Предполагаем также, что, как и для $\rho(\mathbf{x})$, для потенциала φ существуют флуктуации с характерной областью изменения аргумента $|\delta x| > |l^*|$.

Вывод основных уравнений и собственные частоты совместных колебаний

В соответствии со сказанным выше мы можем записать инвариантное относительно пространственных смещений и инверсии времени следующее выражение для функции Лагранжа

$$L\{\rho, \varphi\} = \int (L_1 + L_2 + L_3) d^3x, \quad (2)$$

где

$$L_1 = -a^2\{0.5\rho(\nabla\varphi)^2 + 4\pi k\rho^2\varphi\} + b^2\nabla\rho\nabla\varphi, \quad (3a)$$

$$L_2 = (1/2\rho_0)[(d^2 + l^4)(\nabla\varphi)^2/c^4] \times [(\partial\rho/\partial t)^2 - c_s^2(\nabla\rho)^2], \quad (3b)$$

$$L_3 = (\rho/2c^2)[a^2(\partial\varphi/\partial t)^2 - \varphi^2], \quad (3c)$$

где $\nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y)$, $\nabla\rho = (\partial\rho/\partial x, \partial\rho/\partial y)$.

Феноменологическая постоянная a имеет размерность времени, а постоянные b, d, l — размерность длины, ρ_0 — некоторое среднее значение плотности поверхности, c_s — средняя скорость звука, c — скорость света, t — время.

Как легко убедиться из соотношений (3a)–(3c), в различных предельных случаях получаются правильные и непротиворечивые результаты. В самом деле, в отсутствие акустических колебаний ($b = d = l = 0$) и в нерелятивистском приближении при условии, что $a \gg \delta x$, минимизация действия $S = \int L d^3x dt$ для выражения (3a) по φ приводит к уравнению Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi k\rho$. В другом предельном случае, если пренебречь гравитационным потенциалом φ , то, минимизируя по ρ действие (3b), найдем обычное уравнение на изменение плотности в звуковой волне

$$\partial^2\rho'/\partial t^2 - c_s^2\Delta\rho' = 0, \quad (4)$$

где $\rho' = \rho - \rho_0$ при $\varphi = 0$.

Что касается взаимодействия акустических и гравитационных (длинноволновых) колебаний, то оно описывается всеми тремя лагранжианами. Других взаимодействий, включающих в себя величины ρ и φ , в природе не существует (не считая, конечно, следующих членов разложения по степеням $\nabla\rho$, $\nabla\varphi$, $\partial\rho/\partial t$, $\partial\varphi/\partial t$). Учитываются теперь все три лагранжиана (3a)–(3c). Мы можем найти интересующую нас систему линеаризованных уравнений для малых отклонений $\delta\rho = \rho - \rho_0$, $\delta\varphi = \varphi - \varphi_0$. Итак, минимизируя действие $S = \int (L_1 + L_2 + L_3) d^3x dt$, имеем

$$\begin{cases} A^2(c_s^2\Delta\xi - \partial^2\xi/\partial t^2) + (b^2/a^2)\Delta\varphi - 8\pi k(ac)^2\rho_0\varphi_0\xi \\ - (8\pi ka^2\rho_0 + \varphi_0)\delta\varphi = \Gamma_1\{\delta\varphi, \xi\}, \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi - c_s^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2 - \delta\varphi/(ac)^2 + (b/a)^2\Delta\xi \\ - (4\pi k\rho_0 + \varphi_0/(ac)^2)\xi = \Gamma_2\{\delta\varphi, \xi\}, \end{cases} \quad (5b)$$

где функции, стоящие в правой стороне, есть

$$\begin{cases} \Gamma_1\{\delta\varphi, \xi\} = (ac)^2\{0.5(\nabla\varphi)^2 + 8\pi k\rho_0\xi\delta\varphi\} \\ + 0.5[\delta\varphi^2 - a^2(\partial\varphi/\partial t)^2], \end{cases} \quad (6a)$$

$$\begin{cases} \Gamma_2\{\delta\varphi, \xi\} = \xi\{4\pi k\rho_0\xi - \Delta\delta\varphi\} \\ - a^{-2}(\delta\varphi + a^2\partial^2\varphi/\partial t^2), \end{cases} \quad (6b)$$

где параметры $\xi = \delta\rho/\rho$, $A = c[d^2 + (l^4/c^4) \times (\partial\varphi/\partial R_0)^2]^{1/2}$.

Полученная система уравнений описывает нелинейные процессы взаимодействия между флуктуациями плотности и гравитационного потенциала.

Полагая в уравнениях (5) правую часть равной нулю ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$), легко найти собственные частоты колебаний рассматриваемой связанной системы. Считая, что $\xi = \xi_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x})$, $\delta\varphi = \delta\varphi_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x})$, где $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$, $\mathbf{x} = (x, y)$, в результате простых выкладок получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) - \omega_3^4 = 0, \quad (7)$$

где частоты

$$\begin{cases} \omega_1^2 = c_s^2 q^2 + 8\pi k\rho_0\varphi_0/c^2 d^{*2}, \\ \omega_2^2 = c_s^2 q^2 + 1/a^2, \\ \omega_3^2 = [8\pi k(ac)^2\rho_0 + \varphi_0 + c^2 b^2 q^2]/cad^*, \end{cases} \quad (7a)$$

$$d^{*2} = d^2 + (l^4/c^4)(\partial\varphi/\partial R_0)^2. \quad (7b)$$

Решения уравнения (7) есть

$$\omega^{\pm 2}(q) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2 \pm [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2/4 + \omega_3^4]^{1/2}. \quad (8)$$

Отсюда с помощью (7a) следует, что при $q = 0$

$$\begin{cases} \omega_0^+ = 1/a, \\ \omega_0^- = (a/d^*)(8\pi k\rho_0\varphi_0)^{1/2}. \end{cases} \quad (9)$$

Оценим эти частоты. Полагая $a = R_0 = 6.4 \cdot 10^8$ см, $d^* = 100$ см, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, $\rho_0 = 5.5$ г/см³, $k = 6.7 \cdot 10^{-8}$ см³/гс², а из решения (1), считая $\varphi_0 = 4\pi k\rho_0 R_0^2/3$, найдем искомые частоты собственных поверхностных колебаний $\omega_0^+ = 46.9$ Нз, $\omega_0^- = 0.51$ Нз. Итак, мы видим, что одна из этих частот (ω_0^+) лежит вблизи нижнего порога человеческого восприятия, а другая находится за пределами слышимости (лежит в области гиперзвуковых частот). Обе эти частоты определяют естественный шумовой фон, физическая природа которых, таким образом, становится понятной. Знание частот естественного шумового фона может дать ряд практически важных возможностей. В самом деле, если на фоне естественного шума выделить дополнительные колебания (природа которых может быть совершенно любая, как звуковая, так и электромагнитная), то по измерению проявленной дополнительной интенсивности

можно судить, во-первых, о причине, вызвавшей эти колебания, а во-вторых, оценить расстояние до источника шума. Датчики, регистрирующие шумовые эффекты, должны быть расположены на некоторой глубине под поверхностью.

В связи со сказанным попробуем оценить тот дополнительный вклад в интенсивность естественного фона, который происходит от разнообразных возмущающих факторов. Для этого вернемся к системе уравнений (5) и (6) и учтем в них правую часть (слагаемые $\Gamma_{1,2}$). Положим с этой целью, что $q = 0$, а $\xi = \xi_0(t) + \xi'(t)$, $\delta\varphi = \delta\varphi_0(t) + \delta\varphi'(t)$, где законы временного поведения $\delta\varphi_0(t)$ и $\xi_0(t)$ известны. Действительно,

$$\delta\varphi_0(t) = A_1\varphi_0 \exp(i\omega_0^+ t), \quad \xi_0(t) = A_2 \exp(i\omega_0^- t). \quad (10a)$$

Решения же для поправок $\xi'(t)$ и $\delta\varphi'(t)$ будем искать в виде

$$\delta\varphi'(t) = A_3\varphi_0 \exp(i\Omega_1 t), \quad \xi'(t) = A_4 \exp(i\Omega_2 t). \quad (10b)$$

Фигурирующие в выражениях (10) константы $A_{1,2}$ есть амплитуды фоновых колебаний; $A_{3,4}$ — амплитуды вынужденных колебаний, вызванных возмущающим фактором; $\Omega_{1,2}$ — частота этих колебаний, которая может быть и комплексной.

После подстановки выражений (10) в уравнения (5) находим

$$\begin{aligned} d^2\xi/dt^2 + (\omega_0^-)^2\xi &= -[(\omega_0^-)^2/\varphi_0] \\ &\times \{A_2A_3 \exp(i\omega_0^- \pm \Omega_1)t + A_1A_4 \exp(i\omega_0^+ \pm \Omega_2)t\} \\ &- \{(A_1A_3/A^2)(1 \pm \Omega_1/2\omega_0^+) \exp(i\omega_0^+ \pm \Omega_1)t\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2\delta\varphi/dt^2 + (\omega_0^-)^2\delta\varphi \\ &= -8(\omega_0^+)^2\pi k\rho_0 a^2 A_2A_4 \exp(i\omega_0^- \pm \Omega_2)t \\ &+ \varphi_0 [(\omega_0^+)^2 - \Omega_1^2] A_2A_3 \exp(\omega_0^- \pm \Omega_1)t. \quad (12) \end{aligned}$$

Заметим, что перекрестными членами типа $\xi\delta\varphi$ (которые, строго говоря, должны фигурировать в уравнениях (11), (12)) мы пренебрегли. Решая полученные уравнения с возмущающими факторами в правой части, имеем для относительных флуктуаций плотности

$$\begin{aligned} \xi_{\text{вын}}(t) &= B_1(\Omega_1) \exp[i(\omega_0^- + \Omega_1)t] \\ &+ B_1(-\Omega_1) \exp[i(\omega_0^- - \Omega_1)t] + B_2(\Omega_2) \exp[i(\omega_0^+ + \Omega_2)t] \\ &+ B_2(-\Omega_2) \exp[i(\omega_0^+ - \Omega_2)t] + B_3(\Omega_1) \exp[i(\omega_0^+ + \Omega_1)t] \\ &+ B_3(-\Omega_1) \exp[i(\omega_0^+ - \Omega_1)t], \quad (13) \end{aligned}$$

где коэффициенты

$$\begin{cases} B_1(\Omega_1) = A_2A_3(\omega_0^-)^2[\Omega_1^2 + 2\Omega_1\omega_0], \\ B_2(\Omega_1) = A_1A_4(\omega_0^-)^2/[(\Omega_2 + \omega_0^+)^2 - (\omega_0^-)^2], \\ B_3(\Omega_1) = (A_1A_3/A^2)(1 + \Omega_1/2\omega_0^+)/[(\Omega_1 + \omega_0^+)^2 - (\omega_0^-)^2]. \end{cases} \quad (14)$$

Для флуктуаций потенциала φ аналогично получаем

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\text{вын}}(t) &= \varphi_0 \{B_4(\Omega_2) \exp[i(\omega_0^- + \Omega_2)t] \\ &+ B_4(-\Omega_2) \exp[i(\omega_0^- - \Omega_2)t] + B_5(\Omega_1) \exp[i(\omega_0^- + \Omega_1)t] \\ &+ B_5(-\Omega_1) \exp[i(\omega_0^- - \Omega_1)t]\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_4(\Omega_2) &= 8\pi k\rho_0 a^2(\omega_0^+)^2 A_2A_4/\varphi_0 [(\Omega_2 + \omega_0^-)^2 - (\omega_0^+)^2], \\ B_5(\Omega_1) &= A_2A_3 [\Omega_1^2 - (\omega_0^+)^2]/[(\Omega_1 + \omega_0^-)^2 - (\omega_0^+)^2]. \quad (16) \end{aligned}$$

Зная, таким образом, решения неоднородных уравнений (11) и (12), можно оценить и относительное увеличение фоновой энергии, обусловленное возмущающим фактором. Для этого следует составить отношение

$$\eta = \overline{\delta\varepsilon'}/\overline{\delta\varepsilon_0}, \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} \overline{\delta\varepsilon_0} = \int \Delta dV = -(\rho_0 d^2V/2) [(\overline{d\xi_0/dt})^2 + (\overline{d\xi_{\text{вын}}/dt})^2], \\ \overline{\delta\varepsilon'} = -(\rho_0 d^2V/2) (\overline{d\xi_{\text{вын}}/dt})^2. \end{cases} \quad (18)$$

Черта над соответствующей величиной означает усреднение по времени. В результате

$$\eta = (\overline{d\xi_{\text{вын}}/dt})^2 / [(\overline{d\xi_0/dt})^2 + (\overline{d\xi_{\text{вын}}/dt})^2], \quad (19)$$

где $\xi_0(t) = A_2 \exp(i\omega_0^- t)$, а $\xi_{\text{вын}}(t)$ дается формулой (13).

Понятно, что если $|\xi_{\text{вын}}| \ll |\xi_0|$, то датчики, регистрирующие гиперзвуковые возмущения, должны быть весьма чувствительными, чтобы уловить даже весьма слабые колебания плотности. Всегда можно предположить, что начало возмущения сопровождается какими-либо электромагнитными процессами. Это означает, что должна иметься связь электромагнитного поля с флуктуациями плотности. При этом она обязана проявить себя и в законах дисперсии электромагнитных и акустических волн. Как мы сейчас увидим, последнее действительно будет иметь место, но эффект, как и ожидается, оказывается весьма слабым.

Вид взаимодействия между флуктуациями плотности $\delta\rho$ и магнитным полем H можно представить в следующем виде:

$$L_4 = \int \rho H^2 d^3x / 8\pi\rho_0. \quad (20)$$

Полагая $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, где \mathbf{H}_0 — некоторое статическое поле; \mathbf{h} — малое отклонение поля, обязанное возмущению, и считая, что $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, получаем изменение лагранжиана в виде $\delta L_4 = \int \delta\rho \mathbf{H}_0 \mathbf{h} d^3x / 4\pi\rho_0$. Положив далее $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$, имеем для изменения действия выражение

$$\delta S_4 = \int \xi \mathbf{H}_0 \text{rot } \mathbf{A} d^3x dt / 4\pi. \quad (21)$$

С учетом (2) и (21) совместные уравнения для ξ и \mathbf{A} можно представить тогда в виде

$$\begin{cases} \partial^2 \xi / \partial t^2 - c_s^2 \Delta \xi + (\omega_0^-)^2 \xi + \mathbf{H}_0 \text{rot } \mathbf{A} / d^{*2} \rho_0 = 0, \\ \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 - c^2 \Delta \mathbf{A} - c^2 [\mathbf{H}_0 \times \nabla \xi] = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Отсюда немедленно получаем искомое дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 - c^2 k^2) [\omega^2 - (\omega_k^-)^2] - [\mathbf{H}_0 \times \mathbf{k}]^2 c^2 / d^{*2} \rho_0 = 0, \quad (23)$$

где частота $\omega_k^- = [c_s^2 k^2 + (\omega_0^-)^2]$.

Интересный физический случай соответствует условию $k < k^*$, где $k^* = H_0 / d^* c \rho_0^{1/2}$. В этом случае собственная частота таких колебаний будет

$$\omega^* = \{ |[\mathbf{H}_0 \times \mathbf{k}]| c / d^* \rho_0^{1/2} \}^{1/2}. \quad (24)$$

Оценим полученную частоту. При $H_0 = 10^4$ Ое, $\rho_0 = 5.5$ г/см³, $d^* = 100$ см, $k^* = 10^{-8}$ см⁻¹ получаем $\omega < 100$ Нз. Приведенная оценка свидетельствует о том, что диапазон указанных частот вполне приемлем для обнаружения. Заметим, что полученная частота соответствует по порядку величины частоте гравитационных волн, для которых длина волны составляет примерно 300 км.

Пространственное изменение плотности массивного тела, обусловленное собственной гравитацией

Если в выражениях (2) положить $b = 0$, то можно получить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений, решения которых позволяют найти экстремали функционала $S(\rho, \varphi)$

$$\Delta \varphi = 4\pi k \rho + \varphi / c^2 a^2, \quad (25)$$

$$(\nabla \varphi)^2 + 16\pi k \rho \varphi + \varphi^2 / c^2 a^2 = (dc_s / a)^2 \Delta \rho / \rho_0. \quad (26)$$

Попробуем найти хотя бы одно физическое решение полученной системы уравнений. С этой целью, полагая, что $r < a$, и рассматривая сферически симметричный случай, т.е. считая, что $\rho = \rho(r)$, $\varphi = \varphi(r)$, из первого уравнения найдем

$$\varphi(r) = (2\pi k / r) \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (27)$$

Подставляя теперь (27) в (26), получаем уравнение

$$xy''' + 3y'' = 2(xy'')^{1/2} (xy' + 3y), \quad (28)$$

где $x = r / r_0$, $r_0 = (dc_s / 2\pi k a c \rho_0)^{1/2}$, $y = x \rho(r) / \rho_0$, $y' = dy / dx$ и с граничным условием $e = R_0 / r_0$ при $r = R_0$, где r_0 можно отождествить с некоторым радиусом.

Найти точное решение данного уравнения в аналитическом виде довольно затруднительно, поэтому мы ограничимся только асимптотическим поведением $y(x)$ в двух предельных случаях: 1. $x \ll 1$ и 2. $x \gg 1$. В результате довольно простых выкладок будем иметь

$$y(x) = \begin{cases} C_1 + C_2 x^3 & \text{при } x \ll 1, \\ C_5 x + C_4^2 / x + C_3 C_4 x^2 + C_3 x^5 / 20 & \text{при } x \gg 1, \end{cases} \quad (29)$$

где C_i — константы интегрирования ($i = \overline{1, 5}$).

В пересчете на плотность получаем соответственно

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 [C_1 r_0 / r + C_2 (r / r_0)^2] & \text{при } r < r_0, \\ \rho_0 [C_5 + C_4^2 (r_0 / r)^2 + C_3 C_4 r / r_0 + (C_3^2 / 20) (r / r_0)^4] & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (30)$$

Понятно, что реальному физическому случаю будет отвечать лишь такой выбор констант: $C_3 = 0$, $C_1 = C_5 = 1$. Тогда плотность

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 [r_0 / r + C_2 (r / r_0)^2] & \text{при } r < r_0, \\ \rho_0 [(1 + C_4 r_0 / r)] & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (31)$$

Если плотность ведет себя непрерывным образом, то следует положить, что $C_2 = C_4$. Зависимость $\rho(r)$ иллюстрирует рис. 1. Постоянную C_2 можно оценить из следующего условия. Полная масса M складывается из суммы двух частей: массы M_1 и массы M_2 . Это значит, что следует записать уравнение

$$M = M_1 + M_2 = 4\pi \int_0^{r_0} \rho(r) r^2 dr + 4\pi \int_{r_0}^{R_0} \rho(r) r^2 dr. \quad (32)$$

Решая полученное уравнение, найдем C_2 .

Отметим, что зависимость $\rho(r)$, показанная на рис. 1, характеризует собой весьма специфическую особенность поведения плотности ρ , в частности, вблизи ядра.

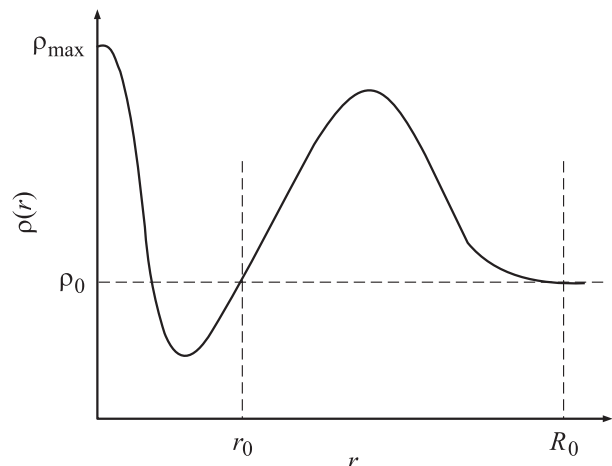


Рис. 1. Стационарное распределение плотности, обусловленное гравитационным потенциалом.

В самом деле, при $r < r_0$ возможен случай, когда $\rho \sim 1/r$. Это значит, что основная масса может быть сосредоточена в относительно малой окрестности $r < r_{cr}$, где r_{cr} — некоторый критический радиус. Остальная же масса (в данном примере) должна быть рассредоточена по всему оставшемуся объему и будет представлять собой своеобразную рыхлую субстанцию.

Рассмотрим теперь случай, когда плотность $\rho(r)$ слабо отклоняется от своего среднего значения ρ^* . Положим, что $\rho(r) = \rho^* + \delta\rho(r)$. Возвращаясь к уравнениям (25) и (26) и подставляя в них $\rho(r) = \rho^* + \delta\rho(r)$, находим

$$\varphi(r) = 2\pi k\rho^*r^2/3 + (2\pi k/r) \int_0^r \delta\rho(r')r'^2 dr', \quad (33)$$

$$\Delta\xi = r_0^{-4} \left\{ (20/3r) \int_0^r \xi(r')r'^2 dr' + (2r/a^2) \int_0^r \xi(r')r'^2 dr' + 8\xi r^2/3 + 28r^2/9 + r^4/a^2 \right\}. \quad (34)$$

Напомним, что $\xi = \delta\rho/\rho_0$.

Обезразмеривая уравнение (34) и вводя новую функцию $y = x\xi$, где $x = r/r_0$, получаем

$$y'' = (20/3) \int_0^x y(x')x'^2 dx' + 2x^2\kappa \int_0^x y(x')x'^2 dx' + 8x^2y/3 + 28x^2/9 + \kappa x^4, \quad (35)$$

где параметр $\kappa = (r_0/a)^2$.

Чтобы убедиться в выполнении условия $\kappa \ll 1$, оценим величину радиуса r_0 . Возвращаясь к его определению (см. формулу (28)), положим, что $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, $c_s = 10^5$ см/с, $ac = R_0 = 6.4 \cdot 10^8$ см, $\rho_0 = 5.5$ г/см³, $k = 6.7 \cdot 10^{-8}$ см³/гс², $d = 100$ см. Тогда оказывается, что $r_0 = 200$ км.

Таким образом, опуская в выражении (35) слагаемые, пропорциональные κ , после дифференцирования по x получаем уравнение

$$y''' = 12xy + 8x^2y'/3 + 56x/9. \quad (36)$$

Найдем асимптотические решения полученного уравнения.

Если $x \ll 1$, то

$$y(x) = 7x^4/27. \quad (37)$$

Если $x \gg 1$, положим, что $y = C/x^n$. Подставляя его в (36), имеем $n = 4.5$, т.е.

$$y(x) = C/x^{4.5}. \quad (38)$$

Следовательно, изменение плотности есть

$$\delta\rho(r) = \rho_0 \begin{cases} (7/27)(r/r_0)^3 & \text{при } r \ll r_0, \\ (7/27)(r_0/r)^{11/2} & \text{при } r \gg r_0. \end{cases} \quad (39)$$

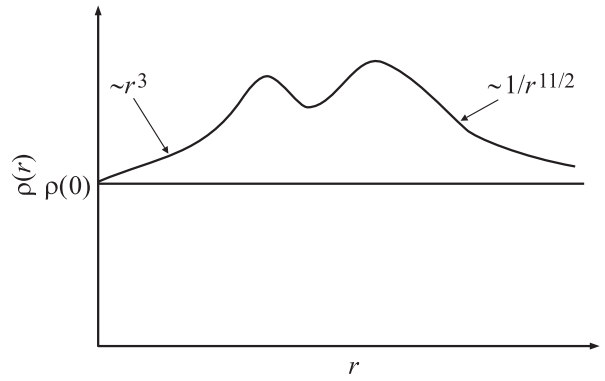


Рис. 2. Изменение плотности относительно некоторого среднего значения ρ^* .

Из условия „сшивки“ решений при $r = r_0$ мы положили, что $C = 7/27$. Зависимость $\delta\rho(r)$ показана в этом случае на рис. 2.

Если подставить теперь найденное асимптотическое поведение $\delta\rho(r)$ в формулу (34), найдем следующее выражение для гравитационного потенциала:

$$\varphi(r) = (2\pi k\rho_0 r^2/3) \times \begin{cases} 1 + (7/54)(r/r_0)^3 & \text{при } r \ll r_0, \\ 1 - (14/45)(r_0/r)^{11/2} & \text{при } r \gg r_0. \end{cases} \quad (40)$$

Как видно из решения (40), в области значений $r > r_0$ потенциал φ уменьшается. Это говорит о том, что в массивных телах флуктуации плотности хотя и не сильно, но тем не менее ослабляют гравитационный потенциал. Наименьшее ослабление достигается при значении $r_0 = R_0$. Заметим, что решение (39) дает непрерывное изменение флуктуаций плотности, в то время как решение (40) описывает скачок гравитационного потенциала именно при размерах $r \sim r_0$. Таким образом, радиус r_0 следует отождествить с радиусом некоторой абстрактной сферы, на границе которой имеет место скачок потенциала $\varphi(r)$.

Оценим изменение ускорения свободного падения при $r = R_0$. Действительно, согласно (40), находим

$$\varphi(R_0) \equiv (kM_0/R_0) [1 - (14/45)(r_0/R_0)^{11/2}], \quad (41)$$

где $M_0 = V_0\rho_0$ — масса.

Отсюда следует, что ускорение есть

$$g = g_0 - \delta g, \quad (42)$$

где $\delta g = g_0 [(77/45)(r_0/R_0)^{11/2}]$.

Полагая $g_0 = 9.81$ м/с², $r_0 = 200$ км, $R_0 = 6400$ км, получаем $\delta g \approx 10^{-9}$ м/с². Приведенная оценка свидетельствует о сравнительно малом изменении ускорения свободного падения на поверхности массивного тела. Однако при изучении гравитационных явлений, и в частности в экспериментах по обнаружению гравитационных

волн, предсказанный в настоящей работе результат следует учитывать и иметь в виду при численной оценке различного рода весьма тонких эффектов.

Заключение

Подводя итоги проведенного выше исследования, отметим основные результаты.

1. Предсказаны совместные колебания флуктуаций плотности и гравитационного потенциала, имеющие место на поверхности массивных тел.

2. Доказано, что величина эффекта весьма существенна, а частоты собственных колебаний малы.

3. С помощью полученной системы дифференциальных уравнений оказалось возможным предсказать существование структур, в которых основная масса сосредоточена вблизи некоторого ядра, а остальная часть представляет собой рыхлую массу, удерживаемую вблизи ядра силами притяжения.

4. Обращено внимание на имеющуюся связь флуктуаций плотности и гравитационного потенциала с электромагнитным полем.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 502 с.
- [2] Гладков С.О., Токарев А.М. // ФГВ 1990. Т. 25. Вып. 1. С. 30–38.
- [3] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [4] Гладков С.О. // Перспективные материалы. 2000. Вып. 1. С. 50–54.
- [5] Гладков С.О. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.