

## Двухчастотное возмущение гладкой гамильтоновой системы

© В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера,  
630090 Новосибирск, Россия  
e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 30 декабря 2002 г.)

Продолжено начатое ранее исследование семейства гладких непрерывных и дискретных двухпараметрических гамильтоновых систем с кусочно-линейной силой. Установлено, что для таких систем зависимость интеграла Мельникова–Арнольда от частоты является степенной и колебательной. Показано, что при наличии двух различных первичных возмущающих частот возникающая на их сумме вторичная гармоника может давать основной вклад в образование хаотического слоя. Для соответствующего гладкого отображения найдены области специальных значений параметра возмущения, при которых в условиях сильного локального хаоса верхняя сепаратриса дробных резонансов сохраняется, а нижняя разрушается, и наоборот. Приведен пример того, что равенство нулю угла пересечения ветвей сепаратрисы в центральной гомоклинической точке не является достаточным условием сохранения сепаратрисы. Отмечено существенное различие в динамическом поведении гладких и аналитических систем.

### Введение

Условия возникновения и развития динамического хаоса зависят, как известно, не только от величины возмущения, но и от гладкости динамической системы. Гладкость удобно характеризовать скоростью убывания фурье-амплитуд. Для аналитического случая амплитуды убывают экспоненциально, при этом всегда существует конечный порог по возмущению  $\varepsilon_{tr}$ , и глобальный хаос, охватывающий все доступное системе фазовое пространство, возможен только при  $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{tr}$  [1–3]. Если потенциал является гладкой функцией, то его фурье-амплитуды убывают лишь как некоторая степень  $\beta + 1$  их номера, что существенно меняет характер движения (см. например, [4] и ссылки там). У зависящей от времени гладкой системы с одной степенью свободы порог  $\varepsilon_{tr} > 0$  существует всегда при  $\beta > \beta_{cr} = 3$  [4,5]. Однако до недавнего времени в поведении систем с  $\beta < \beta_{cr}$  оставалось еще много неясного.

Вместе с тем оказалось, что уже довольно давно появились математические работы [6–8], в которых утверждалось существование глобальных инвариантных кривых в гладких системах при  $\beta = 2 < \beta_{cr}$ . Особо подробной и полной оказалась работа [7], где исследовалось симметричное кусочно-линейное  $2D$ -отображение ( $\beta = 2 < \beta_{cr}$ ). В ней строго доказано, что при специальных значениях параметра возмущения среди глобальных инвариантных кривых с рациональными числами вращения содержатся неразрушенные сепаратрисы целых и дробных резонансов. Все они имеют полную протяженность по фазе и поэтому являются непроходимыми барьерами для других траекторий, что исключает возможность глобальной диффузии по действию. Самым поразительным и неожиданным оказалось то, что система при этом не становится интегрируемой и сепаратрисы сохраняются в условиях сильного локального хаоса [9, рис. 4]. Все это резко отличается от ситуации в типичных (т.е. неинтегрируемых) анали-

тических системах, где при наличии других (хотя бы одного) резонансов именно сепаратрисы резонансов разрушаются в первую очередь и на их месте образуются хаотические слои [1–3]. Историю вопроса, комментарий того поразительного факта, что эта важная и интересная работа не получила в свое время широкой известности, можно найти в [5,10].

Позже и независимо появилась теорема Овсянникова о сохранении сепаратрис целых резонансов для того же самого симметричного кусочно-линейного отображения [11]. В этой теореме не только точно указано множество соответствующих (так называемых критических) значений параметра, но и предложено явное и простое выражение для сепаратрисы. Именно теорема Овсянникова дала толчок к интенсивному исследованию симметричного кусочно-линейного отображения и родственных ему [5,9,10,12–14] (полный текст теоремы Овсянникова см. в Приложении к [9,12]). Заметим, что авторы работ [7,11] вынуждены были ограничиться исследованием только самих сохранившихся сепаратрис, ибо образующиеся при их расщеплении хаотические траектории не поддаются аналитическим исследованиям (это может быть сделано только в эксперименте, численном или физическом).

Дальнейшее изучение показало, что каждая из обнаруженных в [7] глобальных инвариантных кривых (включая сепаратрисы целых и дробных резонансов), возникающая при некотором точном значении параметра, на самом деле существенно искажает структуру фазовой плоскости и в некоторой его конечной окрестности. На этом основании в работе [5] был предложен новый термин — виртуальная инвариантная кривая. Наличие таких виртуальных кривых приводит к совершенно новому и очень сложному типу транспортного процесса в гладкой системе — к так называемой фрактальной диффузии, изучение которой только началось [5,10].

Из сказанного ясно, что гладкие системы обладают многими уникальными свойствами и динамический хаос

в них возникает и развивается по своим собственным и порой весьма оригинальным сценариям.

В настоящей работе, как и в предыдущих [5,10,14], рассматривается семейство гладких систем с двумя параметрами и с кусочно-линейной силой в двух вариантах: с непрерывным гамильтонианом и в виде отображения (раздел 1). Для непрерывной системы строится интеграл Мельникова–Арнольда и с его помощью устанавливается зависимость амплитуд сепаратрисного отображения от частоты. Известно, что амплитуды гармоник сепаратрисного отображения для аналитического случая экспоненциально и монотонно убывают с ростом частоты [1]. В разделе 2 показано, что для рассматриваемых нами гладких систем эта зависимость качественно другая — степенная и колебательная.

Рассматриваются особенности образования хаотического слоя при несимметричном двухчастотном возмущении. Аналогичное исследование для аналитического случая было сравнительно недавно выполнено в работах [15–17], где изучался гамильтониан возмущенного маятника вида

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) + \varepsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t). \quad (1)$$

Первые же численные эксперименты показали, что в спектре сепаратрисного отображения этой системы помимо явно входящих в возмущение (1) частот  $\Omega_1, \Omega_2$  присутствуют также комбинационные гармоники  $\sim \varepsilon_1 \varepsilon_2$  на их сумме  $\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$  и разности  $\Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1$ . Еще более удивительным оказался тот факт, что при определенных условиях именно эти гармоники играют решающую роль в формировании хаотического слоя. В [16] приведен пример, когда вклад вторичной гармоники  $\Delta\Omega_+ = 3$  в амплитуду сепаратрисного отображения в несколько сотен раз превысил вклады от первичных гармоник. Возникло впечатление, что слабые первичные гармоники породили мощную вторичную и на этом их роль в образовании хаоса закончилась (факт, получивший полное численное подтверждение в работе [16]). Именно механизм возникновения и учета вторичных гармоник позволил объяснить и устранить давно известное расхождение (более чем в два раза) между величинами найденной теоретически через интеграл Мельникова–Арнольда и измеренной экспериментально амплитуд сепаратрисного отображения для стандартного отображения Чирикова [15].

В разделе 3 показано, что гармоника на сумме частот в полной мере проявляет себя и в рассматриваемых системах, в то время как на разности частот она не возникает. Здесь обсуждаются также особенности этого эффекта, связанные с отмеченным выше кардинальным различием в характере зависимости интеграла Мельникова–Арнольда от частоты для аналитического и гладкого случаев. Представление о том, сколь разные амплитуды и спектральный состав могут при этом иметь разные части хаотического слоя, дает рис. 2.

В разделе 4 вновь рассматривается отображение. Здесь на примере дробного резонанса 1:3 показано, что имеется две области изменения параметра возмущения  $K$ , где верхняя и нижняя сепаратрисы этого резонанса ведут себя по-разному. В первой из них  $1/3 \leq K \leq 1/4$  они обе сохраняются одновременно, т.е. при одних и тех же специальных значениях  $K_{3,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  [9, табл. 1]. При  $K < 1/4$  их поведение меняется: верхняя сепаратриса сохраняется при одних значениях параметра, а нижняя при других, и происходит это поочередно (рис. 3). Объясняется механизм этого любопытного явления. Утверждается, что такое же поведение имеет место и для резонансов более высоких порядков.

В работах [9,12,13] при исследовании факта сохранения сепаратрис резонансов широко использовалась техника измерения угла пересечения ветвей в центральной гомоклинической точке. Считалось, что обращение этого угла в нуль есть доказательство сохранности сепаратрисы и отсутствия хаотического слоя. Это представление является ошибочным, и в разделе 5 приводится опровергающий пример.

## 1. Гамильтониан задачи

В настоящей работе продолжается начатое в [12,14] исследование непрерывной системы с гамильтонианом вида

$$H(x, p, t) = H_0(x, p) + U(x, t),$$

$$H_0(x, p) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 V(x) \quad (2)$$

и двухчастотным несимметричным возмущением

$$U(x, t) = \varepsilon_1 \cos(2\pi x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(2\pi x - \Omega_2 t), \quad (3)$$

которое считается слабым  $|\varepsilon| \ll 1$ , а частоты — высокими  $|\Omega| \gg \omega_0$ .

Потенциал этой системы  $V(x) = 1/4 - \int f(x) dx$  порождается антисимметричной  $f(-x) = -f(x)$  кусочно-линейной силой с периодом 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x/(1-d), & \text{если } 0 \leq x < (1-d)/2, \\ (1-2x)/d, & \text{если } (1-d)/2 \leq x \leq (1+d)/2, \\ 2(x-1)/(1-d), & \text{если } (1+d) < x < 1. \end{cases} \quad (4)$$

Формула (4) содержит параметр перекоса  $0 < d < 1$ , что позволяет исследовать сразу целое семейство пилообразных зависимостей [14, рис. 1]. Отметим, что к настоящему времени наиболее полно изучен случай симметричной силы с  $d = 1/2$ . „Зубья“ пилы  $|f(x)| = 1$  расположены в точках  $x_{-1} = (1-d)/2$  и  $x_{+1} = (1+d)/2$ , где имеет место сингулярность — разрыв первой производной  $f' = df/dx$ ,

$$\Delta f'(x_{\mp 1}) = \mp \frac{2}{d(1-d)}. \quad (5)$$

Потенциал может быть представлен рядом Фурье [5]

$$V(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{2\pi n^{\beta+1}} \cos(2\pi nx),$$

$$f_n = -\frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(n\pi) \sin(n\pi d)}{d(1-d)}, \quad (6)$$

где  $\beta = 2$  — показатель гладкости системы.

При отсутствии возмущения система (2) является интегрируемой и описывает единственный резонанс, который считается основным и вблизи которого выбираются начальные условия. Каждая из гармоник возмущения также является резонансом. При  $\Omega > 0$  этот резонанс расположен на фазовой плоскости выше основного, а при  $\Omega < 0$  ниже, что дает основание называть их верхним и нижним соответственно.

Движение по верхней невозмущенной сепаратрисе ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ) описывается функцией безразмерного времени  $\psi = 2\omega_0 t$  вида

$$x_s(\psi_s) = \begin{cases} A_d \exp(\psi_s / \sqrt{2(1-d)}), & \text{если } -\infty < \psi_s < -\psi_{s,1}, \\ (1 + \sqrt{d} \sin(\psi_s / \sqrt{2d})) / 2, & \text{если } -\psi_{s,1} \leq \psi_s \leq \psi_{s,1}, \\ 1 - A_d \exp(-\psi_s / \sqrt{2(1-d)}), & \text{если } \psi_{s,1} < \psi_s < \infty, \end{cases} \quad (7)$$

импульс находится дифференцированием  $p_s = x = 2\omega_0 dx_s / d\psi_s$  и использованы обозначения  $\psi_{s,1} \sqrt{2d} \arcsin \sqrt{d}$ ,  $A_d = (1-d) \exp(\psi_{s,1} / \sqrt{2(1-d)}) / 2$  (формулы (A1.4) и (A1.8) в Приложении 1).

Относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии обозначено  $w = H_0 / H_{0,s} - 1$  при значении гамильтониана на сепаратрисе  $H_{0,s} = \omega_0^2 / 4$ . Период движения  $T_0$  вблизи сепаратрисы вычисляется по формуле

$$T_0(w) = 2T_{s,1} + \frac{1}{\omega_2} \ln \frac{4\sqrt{1-d} \cos(\omega_1 T_{s,1})}{|w|}, \quad (8)$$

где  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{2/d}$ ,  $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{2/(1-d)}$ ,  $T_{s,1} = \arcsin \sqrt{d} / \omega_1$  (см. Приложение 1).

При численном определении размеров хаотического слоя используется связь относительной энергии  $w$  с периодом движения  $T_0$ , которая описывается обратной к (8) зависимостью

$$w(T_0) = 4\sqrt{(1-d)} \cos(\omega_1 T_{s,1}) \exp(-\omega_2(T_0 - 2T_{s,1})). \quad (9)$$

Наряду с непрерывной системой (2), (3) мы будем также обращаться к дискретному отображению с тем же потенциалом, которое к настоящему времени достаточно полно изучено и динамическое поведение которого оказалось весьма необычным [5,9,10, 12–14],

$$\bar{p} = p + Kf(x), \quad \bar{x} = x + p \bmod 1, \quad (10)$$

где  $K = \omega_0^2$ .

Отображение (10), как известно, также может быть представлено в виде непрерывной системы с гамильтонианом, явно зависящим от времени, и с возмущением в форме толчков [5]

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + KV(x)\delta_1(t), \quad (11)$$

где  $\delta_1(t) = 1 + 2 \sum_{m \geq 1} \cos(2\pi mt)$  обозначает  $\delta$ -функцию периода 1.

Характерной особенностью силы (4) является наличие на ее периоде двух участков: с отрицательным („эллиптический“ участок) и положительным („гиперболический“ участок) значениями производной  $f'$ . Матрица линеаризованного отображения в неподвижной точке вычисляется по формулам

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 + \Delta & 1 \\ \Delta & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 1 \\ -\Delta & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $\Delta = 2K(1-d)$  и гиперболическому участку отвечает матрица  $\mathcal{A}$ , а эллиптическому матрица  $\mathcal{B}$ .

## 2. Интеграл Мельникова–Арнольда: зависимость от частоты

Возмущение (3) в общем случае разрушает сепаратрису основного резонанса и образует на ее месте хаотический слой, в котором следует различать три части: 1) верхняя — вращение фазы при  $p > 0$ , 2) средняя — колебания фазы и 3) нижняя — вращение фазы при  $p < 0$ . При несимметричном возмущении размеры этих частей могут сильно различаться, поскольку верхняя часть слоя формируется под влиянием в основном верхних резонансов, нижняя — под влиянием нижних, а средняя — тех и других (рис. 2). Мы будем для определенности в основном исследовать верхнюю часть хаотического слоя.

Рассмотрим верхнюю гармонику возмущения вида  $\varepsilon \cos(2\pi mt x - \tau - \tau_0)$ ,  $\tau = \Omega t$ , куда для общности введен дополнительный целый множитель  $m$ . Следуя описанной в [1] методике, будем искать вызванное этой гармоникой изменение невозмущенной энергии  $H_0$  за полупериод колебаний или период вращения

$$\Delta H_0 = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \frac{\partial U}{\partial x} dt$$

$$= 2\pi m \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin(2\pi mt x - \tau - \tau_0) dt = 2\pi m \varepsilon \sin \tau_0 W_{MA},$$

где  $W_{MA}$  — интеграл Мельникова–Арнольда

$$W_{MA} = - \int_{-\infty}^{\infty} p_s(t) \cos[2\pi mt x_s(t) - \Omega t] dt, \quad (13)$$

учтена только четная функция в разложении  $\sin(2\pi mt x - \tau - \tau_0)$  и предполагается, что система движется вблизи невозмущенной сепаратрисы.

Переходя к безразмерному времени  $\psi = 2\omega_0 t$  и вычисляя последнее соотношение с помощью (7), находим

$$W_{MA}(\lambda > 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi_{s,1}} \cos\left(\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right) \times \cos\left[\pi m \sqrt{d} \sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right) - \lambda \psi\right] d\psi - A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp(-\psi/\sqrt{2(1-d)}) \times \cos(2\pi m A_d \exp(-\psi/\sqrt{2(1-d)}) + \lambda \psi) d\psi, \quad (14)$$

где  $\lambda = \Omega/2\omega_0$  есть параметр адиабатичности [1].

Нетрудно проверить, что если возмущение является нижней гармоникой вида  $\cos(2\pi m x + \tau + \tau_0)$ ,  $\tau = \Omega t$ , то вместо (14) надо записать

$$W_{MA}(\lambda < 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi_{s,1}} \cos\left(\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right) \times \cos\left[\pi m \sqrt{d} \sin\left(\frac{\psi}{\sqrt{2d}}\right) + |\lambda| \psi\right] d\psi + A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \int_{\psi_{s,1}}^{\infty} \exp(-\psi/\sqrt{2(1-d)}) \times \cos(2\pi m A_d \exp(-\psi/\sqrt{2(1-d)}) - |\lambda| \psi) d\psi. \quad (15)$$

Заметим, что полусумма выражений (14) и (15) при  $m = 1$ ,  $d = 1/2$  точно совпадает с формулой (13) из работы [12], относящейся к симметричному одночастотному возмущению рассматриваемой здесь системы.

Амплитуда гармоники сепаратрисного отображения частоты  $\Omega$  полностью определяется свойствами и поведением интеграла Мельникова–Арнольда, поскольку пропорциональна ему

$$W = \pm \max |\bar{w} - w| = \pm \frac{\Delta H}{H_{0,s}} = \frac{8\pi m \varepsilon}{\omega_0^2} W_{MA}. \quad (16)$$

Первый вопрос, на который предстоит ответить: по какому закону изменяется  $W_{MA}$  с ростом  $\lambda$ ? В Приложении 2 выполнены некоторые асимптотические ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) оценки интеграла Мельникова–Арнольда, которые позволяют сделать следующие выводы для системы (2), (3). Из формул (A2.2), (A2.3), в Приложении 2 следует, что  $W_{MA}$  является периодической по  $\lambda$  функцией с периодом

$$T_\lambda = \frac{2\pi}{\psi_{s,1}} = \frac{\pi}{\arcsin \sqrt{d}} \sqrt{\frac{2}{d}}, \quad (17)$$

ее амплитуда  $W_{MA,\max}$  изменяется обратно пропорционально  $\lambda^3$ , причем разницы для верхних и нижних

гармоник нет

$$W_{MA,\max}(\lambda) \approx \frac{|\lambda|^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}}. \quad (18)$$

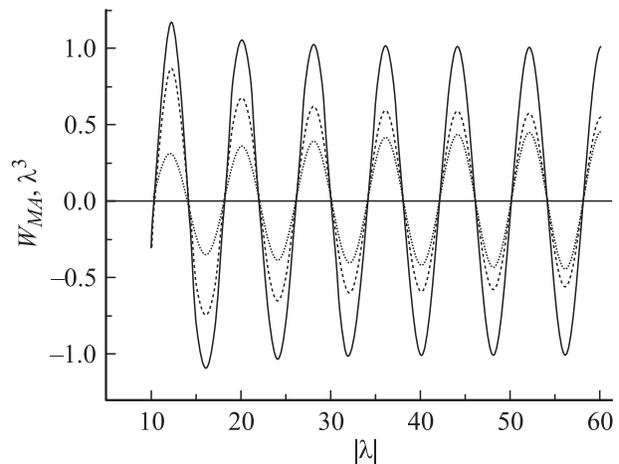
Между тем численный счет показывает, что вклады верхней и нижней гармоник неравны. Для выяснения этого обстоятельства потребовалось учесть члены порядка  $\lambda^{-4}$ , что и позволило обнаружить небольшое различие между верхней и нижней гармониками (формулы (A2.4), (A2.5) в Приложении 2). Окончательно получаем

$$W_{MA}(\lambda) \approx (-1)^m \frac{|\lambda|^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \times \left[ 1 \pm \pi |\lambda|^{-1} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \right] \sin(\pi m d \mp |\lambda| \psi_{s,1}), \quad (19)$$

где верхние знаки отвечают верхней гармонике.

На рис. 1 построены три зависимости приведенного интеграла Мельникова–Арнольда  $W_{MA} \cdot |\lambda|^3$  для симметричной пилы  $d = 1/2$ . При значениях  $d \neq 1/2$  характер этих зависимостей остается таким же, но гармоники сдвигаются по фазе. Видно, что формулы (19) качественно правильно передают характер этих зависимостей, хотя и нуждаются в числовых поправках. Заметим, что нули интеграла как раз и означают отсутствие расщепления сепаратрисы основного резонанса [12].

Полученные здесь результаты резко отличаются от случая аналитического потенциала (1), где  $W_{MA}$  — всегда монотонная и экспоненциально убывающая функция  $\lambda$ . Более того, при одинаковых по модулю частотах вклад нижней гармоники в верхнюю часть хаотического слоя меньше вклада верхней гармоники в  $\exp(-\pi|\lambda|)$  раз [1]. В системе (2), (3) все наоборот: с ростом частоты вклады в сепаратрисное отображение верхней и нижней гармоник сближаются. Столь глубокие различия



**Рис. 1.** Зависимости интеграла Мельникова–Арнольда от параметра адиабатичности  $\lambda = \Omega/2\omega_0$ . Внешняя кривая — совместное действие верхней и нижней симметричной гармоник возмущения, средняя — одной верхней и внутренняя — одной нижней гармоники.

двух обсуждаемых типов систем связаны, по-видимому, с существенно разным расположением сингулярностей интеграла Мельникова–Арнольда: для гладкого потенциала (2) они находятся на действительной оси времени, а для аналитического потенциала (1) — в комплексной плоскости.

### 3. Вторичные гармоники в сепаратрисном отображении

Сепаратрисное отображение, впервые введенное в работе [18], приближенно описывает динамическое поведение системы в моменты прохождения ею положения устойчивого равновесия. Отвечающие за различные части слоя элементы этого отображения различаются не только по величине амплитуд, но и по спектральному составу (см. рис. 2 ниже). В этом смысле несимметричное многочастотное возмущение качественно отличается от хорошо изученного случая одночастотного симметричного возмущения [1].

Во Введении отмечалось, что в общем случае в сепаратрисном отображении помимо гармоник первичных (явно входящих в гамильтониан (2)) частот возникают также вторичные гармоники на их комбинациях. По этой причине сепаратрисное отображение для системы (2), (3) следует записывать в виде [17]

$$\bar{w} = w + \sum_{k=1}^{K_u} W_{u,k}(\Omega_{u,k}t_0), \text{ если } p > 0, \quad (20)$$

$$\bar{w} = w + \sum_{k=1}^{K_l} W_{l,k}(\Omega_{l,k}t_0), \text{ если } p < 0, \quad (21)$$

$$\bar{t}_0 = t_0 + T_0(\bar{w}), \quad (22)$$

где индексом  $u$  помечены все резонансы, вносящие существенный вклад в формирование верхней части хаотического слоя, индексом  $l$  — то же самое для нижней части слоя.

Моменты  $t_0$  прохождения системой положений устойчивого равновесия  $x = 0.5 \bmod (1)$  отсчитываются в шкале непрерывного времени. Если все частоты кратны некоторой опорной частоте  $\Omega_0$ , то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_0 &= \phi_0 + \Omega_0 T_0(\bar{w}), \\ \phi_0 &= \Omega_0 t_0 \bmod (2\pi), \end{aligned} \quad (23)$$

хотя, как показала практика, этого пересчета можно и не делать.

Формулы (14)–(16) предыдущего раздела позволяют найти в сепаратрисном отображении амплитуду любой гармоники, если только известна ее амплитуда  $\varepsilon$  в возмущении. С первичными гармониками проблем нет, поскольку они явно заданы в (3). Для поиска амплитуд возмущения вторичных гармоник введем, следуя [15], новые переменные  $y(t) = x(t) - x_s(t)$ ,

$u(t) = p(t) - p_s(t)$  и с помощью производящей функции вида  $F_2(u, x, t) = [p_s(t) + u][x - x_s(t)]$  перейдем от (2) к новому гамильтониану  $H(y, u, t)$ , который описывает движение вблизи сепаратрисы. Учитывая слабость возмущения, раскладывая потенциалы  $V(x_s + y)$  в ряд Тейлора до второго порядка включительно и выполняя в гамильтониане приближенные замены  $\sin(2\pi y) \rightarrow 2\pi y$ ,  $\cos(2\pi y) \rightarrow [1 - (2\pi y)^2/2]$ , приходим к уравнению движения вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= y \left[ -\omega_0^2 \left( \frac{d^2 V}{dx_s^2} \right) + 4\pi^2 \sum_{n=1}^2 \varepsilon_n \cos(2\pi x_s - \Omega_n t) \right] \\ &+ 2\pi \sum_{n=1}^2 \varepsilon_n \sin(2\pi x_s - \Omega_n t). \end{aligned} \quad (24)$$

Будем интересоваться только вынужденным (исчезающим при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) решением (24), которое можно получить последовательными приближениями. Если, как и в работе [15], в качестве первого приближения принять

$$\begin{aligned} y_\varepsilon^{(1)} &= - \sum_{n=1}^2 \frac{2\pi \varepsilon_n}{(2\pi p_s - \Omega_n)^2} \sin(2\pi x_s - \Omega_n t) \\ &\approx - \sum_{n=1}^2 \frac{2\pi \varepsilon_n}{\Omega_n^2} \sin(2\pi x_s - \Omega_n t) \end{aligned}$$

(последнее равенство предполагает  $\Omega \gg p_{s,\max}$ ), то в (24) исчезают члены вида  $\varepsilon_n \sin(2\pi x_s - \Omega_n t)$ , но зато появляются новые, для ликвидации которых следует ввести следующее приближение:

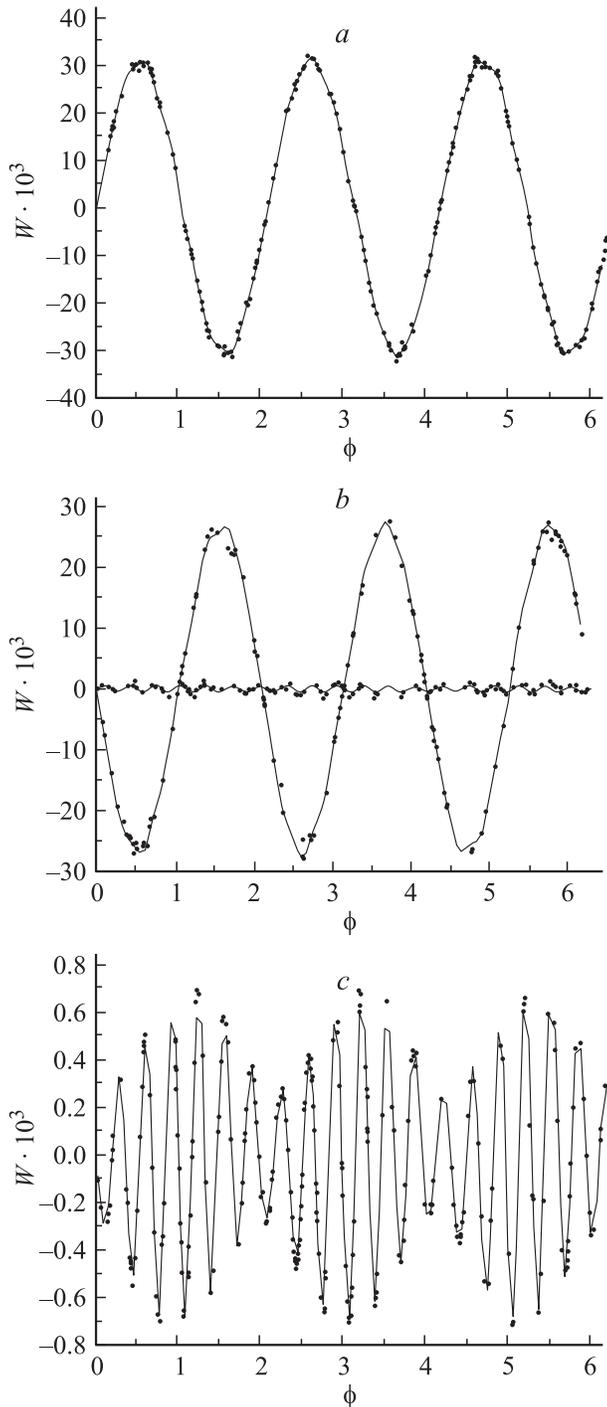
$$\begin{aligned} y_\varepsilon^{(2)} &\approx - \sum_{n=1}^2 \frac{2\pi \varepsilon_n}{\Omega_n^2} \sin(2\pi x_s - \Omega_n t) \\ &- \frac{2\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2} \left[ \frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right] \sin(\Omega_2 - \Omega_1)t + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

и т.д. [15].

Возвращаясь к системе (2), (3) и принимая приближенно  $x \approx x_s + y_\varepsilon^{(2)}$ ,  $\cos 2\pi y_\varepsilon^{(2)} \approx 1$ ,  $\sin 2\pi y_\varepsilon^{(2)} \approx 2\pi y_\varepsilon^{(2)}$ , убеждаемся в появлении в возмущении вторичных ( $\sim \varepsilon_1 \varepsilon_2$ ) гармоник на сумме и разности частот. Отметим, однако, что механизм их проникновения в сепаратрисное отображение существенно различный. Гармоника на сумме частот образуется от взаимодействия первого члена в (25) с первичными гармониками и, поскольку это точно совпадает с аналитическим случаем, для нее справедливы равенства 7 из [16] (которые следует подкорректировать на другую нормировку фазы)

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ \cos(4\pi x - \Delta\Omega_+ t), \\ \varepsilon_+ = -2\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$ .



**Рис. 2.** Сепаратрисное отображение системы (2), (3) с несимметричным возмущением (27). Точки — численный счет, сплошные кривые — подгонка наименьшими квадратами. *a* — верхняя часть хаотического слоя (вращение фазы с  $p > 0$ ). Амплитуды первичных гармоник  $W(23) \approx 6.9 \cdot 10^{-4}$ ,  $W(-19) \approx -4.9 \cdot 10^{-4}$ , амплитуда вторичной гармоники на сумме частот  $W(3) = 3.03 \cdot 10^{-2}$ . *b* — средняя часть хаотического слоя (колебания фазы). Две периодические кривые отражают действие верхних и нижних резонансов. *c* — нижняя часть хаотического слоя (вращение фазы с  $p < 0$ ). Амплитуды первичных гармоник  $W(23) \approx 2.1 \cdot 10^{-4}$ ,  $W(-19) \approx -4.8 \cdot 10^{-4}$ , амплитуда вторичной гармоники  $W(3) = 5.6 \cdot 10^{-5}$ .

Гармоника на разности частот появляется иначе — от взаимодействия второго члена в (25) со второй производной потенциала  $d^2V/dx^2$  в (24), спектр которого (6) весьма богат (в отличие от (1), где  $V(x) = \cos(x)$ ). Здесь возникает не две гармоники, как в [16], а бесконечно много и выделить из них одну самую существенную не удается.

Для иллюстрации эффекта возникновения вторичной гармоники на сумме частот рассмотрим систему (2), (3) со следующими параметрами:

$$\omega_0^2 = 0.09, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05,$$

$$\Omega_1 = 22.0, \quad \Omega_2 = -19.0, \quad \Omega_0 = 1.0, \quad (27)$$

и построим для нее сепаратрисные отображения всех трех частей слоя. Кратко поясним, как это делалось (подробности в [15]). Прежде всего на линии  $x = 0.5$  с высокой точностью отыскивалась центральная гомоклиническая точка  $\mathcal{P}_{fb}$  (как граница между вращением и колебанием фазы). Отличие от нуля угла пересечения ветвей сепаратрисы в этой точке указывало на наличие хаотического слоя (обратное неверно; см. раздел 5). Вблизи этой точки в исследуемой части слоя выбирался узкий интервал  $x = 0.5, \mathcal{P}_{fb} + \delta\mathcal{P}$ , из которого запускалась случайная траектория. Эта траектория либо совершала предписанное число периодов движения (интервалы времени  $T_0$  между соседними прохождениями фазы  $x = 0.5$ ), либо прерывалась из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускалась новая случайная траектория, пока не набиралось требуемое число периодов  $N_p$ . Для каждого периода по формуле (9) вычислялась средняя энергия  $w$ . Определяя изменение  $\delta w = \bar{w} - w$  энергии для каждой соседней пары периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени  $t_0$ , можно построить сепаратрисное отображение  $(\delta w)_k, t_{0,k}, k = 1, 2, \dots, N_p - 1$  в шкале непрерывного времени.

Именно таким путем получены точки на рис. 2. Приведенные там же сплошные кривые есть результат подгонки методом наименьших квадратов, с помощью которого находились амплитуды отдельных гармоник  $W$  (в скобках указаны значения частот). Измеренный вклад вторичной гармоники  $W(3) \approx 3.03 \cdot 10^{-2}$  в формирование верхней части хаотического слоя более чем в сорок раз превышает вклады первичных гармоник. Теоретическое значение амплитуды  $W_T(3)$  сепаратрисного отображения этой частоты, полученное с помощью формул (14), (16) и (26), равно  $W_T(3) \approx 3.37 \cdot 10^{-2}$  ( $\varepsilon_+ \approx 2.39 \cdot 10^{-4}$ ,  $W_{MA} \approx 0.505$ ).

На практике наибольший интерес представляют не амплитуды сепаратрисного отображения, а ширины (по относительной энергии  $w$ ) частей слоя. Есть два практических способа получения этих величин: итерации сепаратрисного отображения и поиск минимального периода движения  $T_{0,\min}$  (размер слоя находится затем по формуле (9)). Применение этих способов для случая (27) относительно верхней части слоя дает согласующиеся

по порядку величины  $w_{st} \approx 0.19$  и  $w_{st} \approx 0.32$  по первому и второму способу соответственно. Для нижней части слоя аналогично находим  $w_{sb} \approx 0.016$  и  $w_{sd} \approx 0.022$ . Заметим, что первый из перечисленных выше способов приводит к результату значительно (в сотни раз) быстрее, что и оправдывает направленные на построение сепаратрисного отображения усилия.

#### 4. Несимметрия в расщеплении верхней и нижней сепаратрис

В этом разделе вновь рассматривается отображение (10) с  $d = 1/2$  и обсуждаются некоторые детали в поведении сепаратрис дробных резонансов. Напомним вначале на примере маятника, как устроена сепаратриса [1].

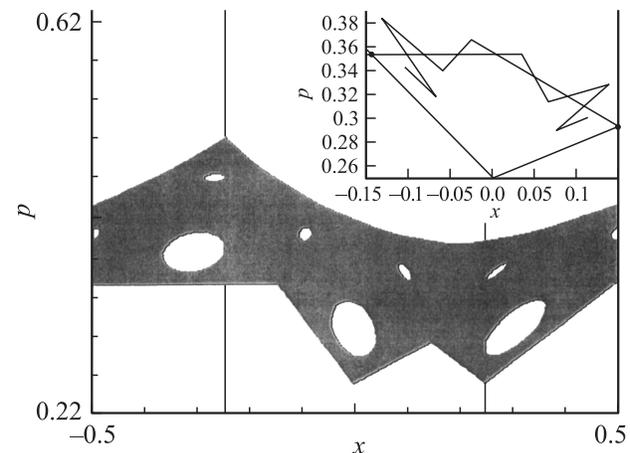
Прежде всего имеется седло — неподвижная точка, которую следует рассматривать как самостоятельную траекторию (невозмущенный маятник может оставаться в ней бесконечно долго). От седла в противоположных направлениях отходят и затем асимптотически к нему же приближаются еще две траектории (сепаратрисы), каждая из которых является пограничной между вращением фазы (вне резонанса) и ее колебанием (внутри резонанса). На фазовой плоскости в окрестности седла образуется характерный крест с двумя входящими и двумя уходящими траекториями [1, рис. 2.1]. Удобно одну из сепаратрис основного резонанса, для которой  $p_s = p_{st} > 0$ , считать верхней, а другую —  $p_s = p_{sb} < 0$  — нижней. Важно отметить, что на самом деле обе невозмущенные сепаратрисы состоят из двух пространственно совпадающих траекторий для направлений времени вперед и назад соответственно. Возмущение расщепляет каждую сепаратрису на две ветви („усы“), которые уже не совпадают друг с другом, но пересекаются в так называемых гомоклинических точках. Отличие от нуля угла пересечения ветвей в любой такой точке (обычно выбирается центральная, в (10) ей отвечает фаза  $x_0 = 0.5$  [9]) является надежным свидетельством разрушения сепаратрисы и образования на ее месте хаотической траектории (обратное утверждение оказывается неверным; см. раздел 5).

Выше мы видели, что верхняя сепаратриса разрушается в основном верхней системой резонансов, нижняя сепаратриса — нижней, и в общем случае эти системы не совпадают. Как следствие, верхняя и нижняя части хаотического слоя могут быть совсем разными (рис. 2). В системе (10), как показано в [7], имеет место уникальное явление — сохранение (при специальных значениях параметра  $K$ ) сепаратрис как целых, так и дробных резонансов в условиях сильного локального хаоса. Мы покажем, что для дробных резонансов этот процесс сопровождается любопытными деталями.

Объектом нашего рассмотрения будет дробный резонанс 1:3, ниже приводятся полученные в работе [7] факты (дополнительные подробности имеются также в [10]). Значение  $K = 1/3$  является наибольшим критическим

числом, при котором сохраняются сепаратрисы всех резонансов (а не только резонанса 1:3) системы. Именно этими непрозрачными для других траекторий сепаратрис (и только ими!) вымощен единственный квадрат фазовой плоскости, причем полная площадь этой мозаики точно равна площади квадрата [7;9, рис. 6]. При плавном уменьшении величины  $K > 1/4$  система проходит через множество специальных значений  $K_{3,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , при каждом из которых одновременно сохраняются обе (верхняя и нижняя) сепаратрисы резонанса 1:3 (первые десять значений  $K_{3,m}$  даны в табл. 1 в [9]). Это на первый взгляд вызывает некоторое недоумение. Систему резонансов выше и ниже исследуемого резонанса 1:3 никак нельзя считать симметричной. Ближайший самый сильный резонанс снизу целый, а сверху полуцелый, тем не менее условия сохранения обеих сепаратрис точно совпадают. Интересно понять причину этого явления.

Множество  $K_{3,m}$  имеет точку сгущения при  $K = 1/4$ ; когда фазовый объем резонанса 1:3 становится равным нулю, его верхняя и нижняя сепаратрисы схлопываются, превращаясь в ломаную линию. Резонанс исчезает, но оставляет вместо себя глобальную инвариантную кривую. В [7, рис. 1] показано, что это — периодическая орбита, каждая точка которой возвращается в себя через три итерации. Важно отметить, что, как показали наши исследования в интервале значений параметра  $1/4 < K \leq 1/3$ , все три седловые точки резонанса 1:3 находятся на гиперболическом участке. При дальнейшем уменьшении параметра  $K < 1/4$  резонанс 1:3 вновь возникает, но теперь поведение верхней и нижней сепаратрис становится совершенно иным: они сохраняются не одновременно, а при разных значениях параметра  $K$  и попеременно. Сказанное иллюстрирует рис. 3, построенный для первого после  $K = 1/4$  критического числа  $K = 0.1035533905931\dots$ , при котором сохраняется



**Рис. 3.** Параметры отображения (10)  $K = 0.1035533905931\dots$ ,  $d = 1/2$ . Большое окно — единственная хаотическая траектория, ограниченная снизу нижней сепаратрисой резонанса 1:3 (число итераций  $5 \cdot 10^9$ ). В малом окне показаны расщепившиеся ветви („усы“) верхней сепаратрисы и сохранившаяся нижняя сепаратриса этого резонанса между двумя соседними седловыми точками.

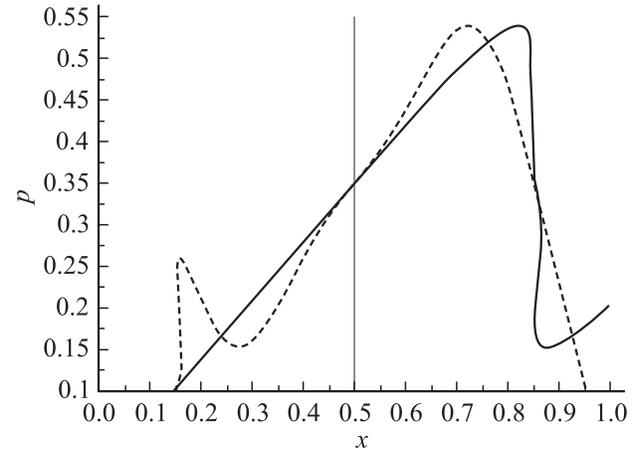
нижняя сепаратриса. Важно также отметить, что при  $K \lesssim 1/4$  одна из седловых точек переходит с гиперболического участка на эллиптический.

Предварительные численные эксперименты показывают, что при дальнейшем уменьшении параметра  $K$  найдется его значение, при котором уже две седловые точки перейдут на эллиптический участок, и т.д. Оказалось также, что подобное поведение имеет место и для дробных резонансов более высоких порядков, и картина в целом выглядит следующим образом. Для любого резонанса порядка  $Q \geq 3$  можно найти такое ближайшее к  $K = 1/3$  значение параметра  $K(Q)$ , при котором этот резонанс вырождается в периодическую орбиту (для некоторых  $Q$  они приведены в работе [7]). Внутри указанного интервала все седловые точки этого резонанса принадлежат гиперболическому участку, а ниже его хотя бы одна из них переходит на эллиптический участок. При дальнейшем плановом уменьшении параметра число седловых точек на эллиптическом участке будет возрастать.

Описанная здесь миграция седловых точек и проявляется дело. Как известно, верхняя и нижняя сепаратрисы резонансов обходят свои седловые точки в противоположных направлениях. Выше отмечалось, что в самом начале процесса образования резонансных структур при  $K = 1/3$  и на некотором интервале ниже этого значения все седловые точки резонанса  $Q$  находятся только на гиперболическом участке и матрица периодической неустойчивой орбиты есть просто  $\mathcal{A}^Q$  (см. (12)) независимо от порядка обхода. Условия сохранения для нижней и верхней сепаратрис оказываются строго одинаковыми и происходят при одном и том же критическом значении параметра возмущения  $K$ . Ситуация кардинально меняется после стадии вырождения резонанса в периодическую орбиту, поскольку одна из седловых точек перескакивает на эллиптический участок и описывается теперь уже матрицей  $\mathcal{B}$ . Именно здесь возникает несимметрия в поведении сепаратрис, так как одна из них совершает переход с гиперболического участка на эллиптический (матрица  $\mathcal{B}\mathcal{A}$ ), а другая — наоборот (матрица  $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$ ). Вследствие этого верхняя и нижняя сепаратрисы сохраняются при разных значениях параметра  $K$  и делают это поочередно. Возникает вопрос: а если все седловые точки переселятся на эллиптический участок, то вновь начнется одновременное сохранение сепаратрис? Описанное здесь любопытное явление — еще одна из особенностей гладких систем.

## Вместо заключения

Объектами нашего рассмотрения в данной работе были в основном нелинейные резонансы и их сепаратрисы. Во Введении уже отмечалось, что важная роль в подобного рода исследованиях отводится измерению угла пересечения ветвей сепаратрис в центральной гомоклинической точке [9,12,13]. Эта величина является одним из очень немногих атрибутов хаоса, которая



**Рис. 4.** Отображение (28) с параметрами  $C = 0.32395435\dots$ ,  $a = 0.1$ . Картинка расщепившихся ветвей верхней сепаратрисы. Измеренный угол в центральной гомоклинической точке равен нулю. Сплошная кривая — ход времени вперед, штриховая — назад.

может быть измерена сколь угодно точно. Если этот угол отличен от нуля, то сепаратриса расщеплена и имеет место хаос. Возникает практически важный вопрос, является ли равенство этого угла нулю верным признаком сохранения сепаратрисы. До сих пор это всегда оказывалось так и подобное утверждение даже включено в некоторые наши работы. Однако специально проведенные исследования показали, что это неверно. Нашлось заметное число систем, как непрерывных, так и отображений, где прохождение этого угла через нуль не означает сохранения сепаратрисы. Покажем это на примере усложненного стандартного отображения вида

$$\bar{p} = p + C[\sin(2\pi x) - a \sin(6\pi x)], \quad \bar{x} = x + p \quad (28)$$

с параметрами  $C = 0.32395435\dots$ ,  $a = 0.1$ . Картинка расщепившихся ветвей верхней сепаратрисы дана на рис. 4 (центральная гомоклиническая точка находится на линии  $x = 0.5$ ). Характер касания здесь соответствует точке перегиба. По-видимому, правильный ответ о наличии или отсутствии хаоса может дать только построение полной картины поведения ветвей сепаратрисы для хода времени вперед и назад на интервале между двумя соседними гомоклиническими точками.

Из изложенного выше видно, что почти во всех рассмотренных в данной работе вопросах в динамическом поведении гладких и аналитических систем обнаружена существенная разница. Это является, по нашему мнению, убедительным поводом для дальнейшего изучения гладких систем.

Автор глубоко благодарен Б.В. Чирикову за обсуждение и советы.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01-02-16836) и комплексной научной программой РАН „Нелинейная динамика и солитоны“.

## Приложение 1

### Движение по невозмущенной сепаратрисе и вблизи нее

Значение гамильтониана на невозмущенной сепаратрисе равно  $H_{0,s} = \omega_0^2/4$ , что позволяет найти ее импульс как функцию координаты

$$\frac{p_s}{\omega_0} = \begin{cases} x_s \sqrt{2/(1-d)}, & \text{если } 0 < x_s < (1-d)/2, \\ (1 - (2x_s - 1)^2/d)^{1/2}/\sqrt{2}, & \text{если } (1-d)/2 < x_s < (1+d)/2, \\ (1 - x_s)\sqrt{2/(1-d)}, & \text{если } (1+d) < x_s < 1. \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

Примем за начало отсчета безразмерного времени  $\psi = 2\omega_0 t$  точку устойчивого равновесия  $x = x_0 = 0.5$ . Уравнение движения на интервале  $x_0 \leq x_1 = (1+d)/2$  (назовем его первым) записывается в виде  $\ddot{x} = -\partial H_0/\partial x = \omega_0^2(1-2x)/d$  и имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{p_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{d}}, \quad (\text{A1.2})$$

где  $p_0$  — импульс в начальной точке  $x_0 = 0.5$ .

Для сепаратрисы из второй строки (A1.1) в этой точке находим  $p_{0,s}/\omega_0 = 1/\sqrt{2}$ , что позволяет написать

$$x_s(\psi_s) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{d} \sin \frac{\psi_s}{\sqrt{2d}} \right],$$

$$p_s(\psi_s) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \cos \frac{\psi_s}{\sqrt{2d}}. \quad (\text{A1.3})$$

Время  $\psi_{s,1}$  движения по сепаратрисе на всем интервале определяется с помощью последнего уравнения из равенства

$$\frac{1+d}{2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{d} \sin \frac{\psi_{s,1}}{\sqrt{2d}} \right],$$

и в конце первого интервала имеем

$$T_{s,1} = \arcsin \sqrt{d}/\omega_1, \quad \psi_{s,1} = 2\omega_0 T_{s,1} = \sqrt{2d} \arcsin \sqrt{d},$$

$$x_{s,1} = \frac{1+d}{2}, \quad p_{s,1} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-d}{2}}, \quad (\text{A1.4})$$

где  $T_{s,1}$  — обычное время.

Движение на втором интервале  $(1+d)/2 < x < 1$  описывается уравнением  $\ddot{x} = 2\omega_0^2(x-1)/(1-d)$  и имеет решение

$$x(t) = 1 - \frac{1-d}{2} \operatorname{ch} \omega_2(t - T_1) + \frac{p_1}{\omega_2} \operatorname{sh} \omega_2(t - T_1),$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{1-d}}, \quad (\text{A1.5})$$

где  $T_1, p_1$  — время и импульс в конце первого интервала.

При движении по сепаратрисе с учетом равенств (A1.4) имеем

$$x_s(t) = 1 - \frac{1-d}{2} [\operatorname{ch} \omega_2(t - T_{s,1}) - \operatorname{sh} \omega_2(t - T_{s,1})]$$

$$= 1 - \frac{1-d}{2} \exp(-\omega_2(t - T_{s,1})). \quad (\text{A1.6})$$

Возвращаясь к безразмерному времени  $\psi$ , находим, что движение по сепаратрисе на втором интервале описывается следующими выражениями:

$$x_s(\psi_s) = 1 - A_d \exp(-\psi_s \sqrt{2(1-d)}),$$

$$p_s(\psi_s) = A_d \sqrt{\frac{2}{1-d}} \exp(-\psi_s/\sqrt{2(1-d)}), \quad (\text{A1.7})$$

где обозначено

$$A_d = \frac{(1-d)}{2} \exp(\psi_{s,1}/\sqrt{2(1-d)}) \quad (\text{A1.8})$$

и значение  $\psi_{s,1}$  берется из (A1.4).

Все сказанное позволяет описать движение по всей сепаратрисе (см. формулы (7) основного текста).

Для определения периода движения вблизи сепаратрисы рассмотрим траекторию, стартующую из начальной точки  $x_0 = 0.5$  с небольшим отклонением по импульсу от его значения на сепаратрисе  $p_0 = p_{s,0} + \delta p_0$ . Это изменит время прохождения первого интервала  $T_{s,1}$  на величину  $\delta T_1$  и импульс в конце этого интервала на величину  $\delta p_1$ . Первую из них можно найти с помощью уравнения (A1.2)

$$\frac{1+d}{2} = \frac{1}{2} + \frac{p_{s,0} + \delta p_0}{\omega_1} \sin[\omega_1(T_{s,1} - \delta T_1)],$$

$$\rightarrow \omega_1 \delta T_1 = \frac{\delta T_1}{p_{s,0}} \operatorname{tg}(\omega_1 T_{s,1}),$$

а вторую из соотношения

$$p_1 = p_{s,1} + \delta p_1 = (p_{s,0} + \delta p_0) \cos[\omega_1(T_{s,1} - \delta T_1)],$$

$$\rightarrow \delta p_1 = \frac{\delta p_0}{\cos(\omega_1 T_{s,1})}.$$

Последнюю величину можно связать с относительным изменением энергии  $w = 4H_0/\omega_0^2 - 1$ . Поскольку  $V(x_0 = 0.5) = 0$ , то имеем

$$w = \frac{2}{\omega_0^2} (p_{s,0} + \delta p_0)^2 - 1 \rightarrow \delta p_0 = \frac{\omega_0^2}{2p_{s,0}} w = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} w$$

$$\rightarrow \delta p_1 = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2} \cos(\omega_1 T_{s,1})} w.$$

Обозначим через  $T_0$  период движения по рассматриваемой траектории (интервал времени между соседними моментами прохождения устойчивой фазы  $x_0 = 0.5$ ).

Полагая  $x = 1$ , из уравнения (A1.5) получаем равенства

$$\text{th} \left[ \omega_2 \left( \frac{T_0}{2} - T_{s,1} \right) \right] = \frac{1-d}{2} \frac{\omega_2}{p_1} \approx 1 - \frac{\delta p_1}{p_{s,1}} = \xi,$$

при выводе которых учтено следующее из второй строки (A1.1) для  $x_{+1} = (1+d)/2$  соотношение  $p_{s,1}/\omega_0 = \sqrt{(1-d)/2}$  (см. также (A1.4)). Формула для периода движения вблизи сепаратрисы имеет вид

$$\begin{aligned} T_0(\omega) &= 2T_{s,1} + \frac{1}{\omega_2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} \\ &= 2T_{s,1} + \frac{1}{\omega_2} \ln \frac{4\sqrt{1-d} \cos(\omega_1 T_{s,1})}{|w|}. \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

При  $d = 1/2$  она точно совпадает с формулой (9) работы [11].

## Приложение 2

### Интеграл Мельникова–Арнольда: оценки

Перепишем интеграл Мельникова–Арнольда (13) для верхней гармоники возмущения ( $\Omega > 0$ ) в развернутой форме

$$\begin{aligned} W_{MA} &= - \int_{-\infty}^{\infty} p_s [\cos(2\pi m x_s) \cos(\Omega t) \\ &\quad + \sin(2\pi m x_s) \sin(\Omega t)] dt. \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Следуя [12], будем брать этот интеграл по частям, интегрируя на каждом шаге члены с  $\Omega$  и дифференцируя остальную часть. На третьем шаге под знаком интеграла появится  $\Omega^{-3}$  и третья производная  $p_s$  по времени, которая порождает  $\delta_1$ -функцию в сингулярных точках  $x_{-1} = (1-d)/2$  и  $x_{+1} = (1+d)/2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 p_s}{dt^3} &= \frac{d^3 p_s}{dx^3} p_s^3 \\ &= p_s^3 \frac{2}{d(1-d)} [\delta_1(x - x_{+1}) - \delta_1(x - x_{-1})]. \end{aligned}$$

В этом выражении учтен только главный член с  $\delta_1$ -функциями и использована формула (4) для скачков производных. В сингулярных точках отношение  $p_s/\omega_0 = \sqrt{(1-d)/2}$  (вторая строка в (A1.1) Приложение 1), и для первого слагаемого в (A2.1) получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{\lambda^{-3}}{8d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \left[ \cos \pi m (1+d) \sin(\lambda \psi_{s,1}) \right. \\ &\quad \left. - \cos \pi m (1-d) \sin(-\lambda \psi_{s,1}) \right] \\ &= (-1)^{m-1} \frac{\lambda^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \cos(\pi m d) \sin(\lambda \psi_{s,1}), \end{aligned}$$

где  $\lambda = \Omega/2\omega_0$  и  $\psi_{s,1} = 2\omega_0 T_{s,1}$ .

Действуя аналогично в отношении второго слагаемого в (A2.1) и складывая результаты, получаем оценку интеграла Мельникова–Арнольда для верхней гармоники

$$\begin{aligned} W_{MA}(\lambda > 0) &\approx (-1)^m \frac{\lambda^{-3}}{4d} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1-d}{2}} \sin(\pi m d - \lambda \psi_{s,1}). \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

Для нижней гармоники возмущения ( $\lambda < 0$ ) аналогично находим

$$\begin{aligned} W_{MA}(\lambda < 0) &\approx (-1)^m \frac{|\lambda|^{-3}}{4d} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1-d}{2}} \sin(\pi m d + |\lambda| \psi_{s,1}), \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

и она с точностью до сдвига по фазе вносит в амплитуду сепаратрисного отображения точно такой же вклад, как и верхняя гармоника, что не соответствует численному эксперименту. Дело оказывается в том, что разница между вкладами верхней и нижней гармоники возникает только в следующем ( $\sim \lambda^{-4}$ ) порядке и для ее обнаружения надо четвертый раз взять интеграл по частям. Нетрудно проверить, что на сей раз следует рассмотреть два члена, содержащих в своем составе выражения  $p_s \cdot (d^4 x_s / dt^4)$  и  $\dot{x}_s \cdot (d^3 p_s / dt^3)$ , которые вносят в  $W_{MA}$  одинаковый вклад. С учетом всех рассмотрений получаем окончательные выражения для верхней гармоники

$$\begin{aligned} W_{MA}(\lambda > 0) &\approx (-1)^m \frac{\lambda^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \\ &\quad \times \left[ 1 + \pi \lambda^{-1} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \right] \sin(\pi m d - \lambda \psi_{s,1}) \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

и для нижней гармоники

$$\begin{aligned} W_{MA}(\lambda < 0) &\approx (-1)^m \frac{|\lambda|^{-3}}{4d} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \\ &\quad \times \left[ 1 - \pi |\lambda|^{-1} \sqrt{\frac{1-d}{2}} \right] \sin(\pi m d + |\lambda| \psi_{s,1}). \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

Эти результаты обсуждаются в разделе 2 основного текста.

### Список литературы

- [1] Chirikov B.V. // Phys. Reports. 1979. Vol. 52. P. 263.
- [2] Lichtenberg A., Leiberman M. Regular and Chaotic Dynamics. Springer, 1992.
- [3] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
- [4] Chirikov B.V. Chaos, Solitons and Fractals. 1991. Vol. 1. P. 79.
- [5] Вечеславов В.В., Чириков Б.В. // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. С. 175.

- [6] Hénon M., Wisdom J. // *Physica. D.* 1983. Vol. 8. P. 157.
- [7] Bullett S. // *Commun. Math. Phys.* 1986. Vol. 107. P. 241.
- [8] Wojtkowski M. // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 80. P. 453.  
*Ergodic Theory Dyn. Syst.* 1982. Vol. 2. P. 525.
- [9] Вечеславов В.В. Динамика пилообразного отображения. 1. Новые численные результаты. Препринт ИЯФ. Новосибирск, 2000. № 2000-27. E-print archive nlin. CD/0005048.
- [10] Chirikov B.V., Vecheslavov V.V. // *ЖЭТФ.* 2002. Т. 122.
- [11] Овсянников Л.В. Частное сообщение. 1999. Май.
- [12] Вечеславов В.В. // *ЖЭТФ.* 2001. Т. 119. С. 853.
- [13] Вечеславов В.В. Препринт ИЯФ. Новосибирск, 1999. № 99-69.
- [14] Вечеславов В.В., Чириков Б.В. // *ЖЭТФ.* 2001. Т. 120. С. 740.
- [15] Вечеславов В.В. // *ЖЭТФ.* 1996. Т. 109. С. 2208.
- [16] Вечеславов В.В. // *Письма в ЖЭТФ.* 1996. Т. 63. С. 989.
- [17] Vecheslavov V.V. // *Physica. D.* 1999. Т. 131. С. 55.
- [18] Заславский Г.М., Филоненко Н.Н. // *ЖЭТФ.* 1965. Т. 54. С. 1590.