

01;03

Оценка параметров плазмы по данным о прохождении через плазму ударной волны

© В.В. Кучинский

Научно-исследовательское предприятие гиперзвуковых систем,
196066 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: AJAX@COMSET.NET

(Поступило в Редакцию 11 февраля 2003 г.)

Получены аналитические формулы, позволяющие оценить параметры плазмы по результатам измерения параметров прошедшей через плазму ударной волны. Приведены примеры использования этих формул для интерпретации результатов работ, в которых экспериментально исследовано прохождение ударной волны через плазму газового разряда. Полученные результаты могут послужить нулевым приближением для более точного рассмотрения.

Введение

В числе первых работ, посвященных диагностике плазмы с помощью ударных или акустических волн, следует назвать [1,2]. Исследования проводились с использованием зондов (типа зонда Ленгмюра) в аргонной плазме при давлениях от 2 до 30 Торг. Резкие изменения потенциала, записанные с помощью осциллографа, позволяли оценить величину скорости и рассчитать зависимость температуры разряда от условий эксперимента.

Последующее развитие экспериментальной техники позволило разнообразить методы регистрации скорости ударной или акустической волны. Целью данной работы является разработка простых методов оценки параметров плазмы по результатам определения параметров ударной волны. Естественно, что существующие более точные методы расчета позволяют извлекать информацию о плазме с гораздо большей точностью. Но применение таких методов, как правило, связано со значительной вычислительной работой. Во многих случаях определение температуры (или плотности) нейтральной компоненты плазмы с очень высокой точностью практически невозможно из-за колебаний самих параметров плазмы. Поэтому простые оценки могут оказаться в такой ситуации полезными. В первой части работы даны основные формулы для расчета температуры плазмы по данным о прохождении ударной волны пространственных неоднородностей, созданных неравномерным распределением температуры (и, соответственно, плотности) при постоянном давлении в невозмущенной области перед фронтом ударной волны. Во второй части теоретические результаты использованы для интерпретации экспериментов других авторов. Наиболее полно применение разработанных методов показано на примере обработки данных работ [3,4]. Менее точные методы получения информации вынесены в Приложение.

1. Теоретические основы метода

Подробное аналитическое рассмотрение процесса формирования и прохождения ударной волны через пространственную неоднородность проведено в [5] в одномерном приближении. Из результатов [5] следует система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t)}{\partial t} &= a(x(t)) + a_0 \frac{f(x(t))}{2}, \\ \frac{\partial (tf(x(t)))}{\partial t} &= \frac{a_0 f(x(t))}{2a(x(t))}, \end{aligned} \quad (1)$$

где x — пространственная координата; t — время; $f(t)$ — функция, описывающая начальную форму возмущения ударной волны.

Если пространственная неоднородность обусловлена неравномерным распределением температуры (или плотности) при постоянном давлении, то $a(x) = a(T(x)) = \sqrt{\gamma RT(x)}$ — скорость звука в точке x ; R — газовая постоянная; $a_0 = a(T_0) = \text{const}$, T_0 — постоянная температура вне области пространственной неоднородности; $T(x)$ — распределение температуры, определяющее форму пространственной неоднородности; γ — показатель адиабаты.

Решение системы (1) для движения в однородной среде дает ряд простых формул, описывающих процесс изменения ударной волны. Координата начала движения ударной волны x_0 связана с начальным временем t_0 и начальным числом Маха M_0

$$x_0 = (2M_0 - 1) a_0 t_0. \quad (2)$$

Зависимость координаты от времени

$$x(t) = 2(M_0 - 1) a_0 \sqrt{t_0 t} + a_0 t, \quad (3)$$

откуда значение числа Маха в момент времени t

$$M(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \frac{1}{a_0} = \frac{V_0(t)}{a_0} = (M_0 - 1) \sqrt{\frac{t_0}{t}} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{x(t)}{2a_0 t}, \quad (4)$$

где V_0 — скорость распространения фронта ударной волны, $M_0 = M(t_0)$.

Из формулы (3) получается зависимость времени от координаты $t^{(0)}(x)$

$$t^{(0)}(x) = \frac{x_0}{a_0} \frac{(M_0 - 1)^2}{2M_0 - 1} \frac{1}{F(x, x_0, M_0)^2}, \quad (5)$$

где индекс 0 указывает на движение в однородном пространстве,

$$F(x, x_0, M_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x}{x_0} \frac{(2M_0 - 1)}{(M_0 - 1)^2} - 1}}. \quad (6)$$

Подставив (5) в формулу (4), получим зависимость скорости ударной волны от координаты x при распространении ударной волны в однородной среде

$$V^{(0)}(x, x_0, M_0, a_0) = a_0 \cdot [1 + F(x, x_0, M_0)]. \quad (7)$$

Для практически важного случая „прямоугольного“ распределения температуры ($T(x) = T$ при $x_p < x \leq x_f$, $T(x) = T_0$ при $x \leq x_p$, $x > x_f$, рис. 1) система уравнений (1) решается точно и для скорости ударной волны

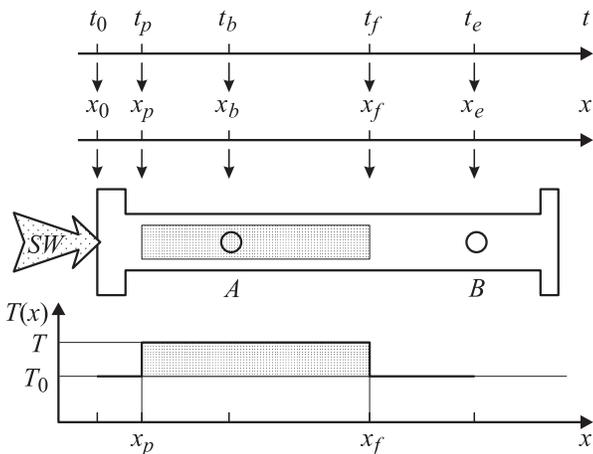


Рис. 1. Выбор системы координат. SW — ударная волна, x_0 — начало движения ударной волны (положение диафрагмы), x_p — начало области пространственной неоднородности, x_f — конец области пространственной неоднородности, x_b — положение первой по ходу ударной волны (УВ) точки регистрации (A), x_e — положение второй точки регистрации (B).

в этом случае получается выражение

$$V(t, T) = \frac{dx(t, T)}{dt} = a_0 \times \begin{cases} 1 + (M_0 - 1) \sqrt{\frac{t_0}{t}} & \text{при } t \leq t_p, \\ \sqrt{\frac{T}{T_0}} + (M_0 - 1) \sqrt{\frac{t_0}{t}} \left(\frac{t}{t_p}\right)^\Psi & \text{при } t_p < t \leq t_f(T), \\ 1 + (M_0 - 1) \sqrt{\frac{t_0}{t}} \left(\frac{t_f(T)}{t_p}\right)^\Psi & \text{при } t > t_f(T), \end{cases} \quad \Psi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_0}{T}} - \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение, получаем зависимость координаты от времени

$$x(t, T) = \begin{cases} a_0 [2(M_0 - 1) \sqrt{t_0} \sqrt{t} + t] & \text{при } t \leq t_p, \\ x_p + \sqrt{\gamma RT} \left[t - t_p + 2(M_0 - 1) \sqrt{t_0} \sqrt{t_p} \times \right. \\ \quad \left. \times \left(\frac{t}{t_p}\right)^{\Psi + \frac{1}{2}} - 1 \right] & \text{при } t_p < t \leq t_f(T), \\ x_f + a_0 \left[t - t_f(T) + 2(M_0 - 1) \sqrt{t_0} \times \right. \\ \quad \left. \times \left(\frac{t_f(T)}{t_p}\right)^\Psi (\sqrt{t} - \sqrt{t_f(T)}) \right] & \text{при } t > t_f(T). \end{cases} \quad (9)$$

Обратная функция $t(x, T)$ находится решением уравнения (9) относительно t . С относительной ошибкой менее $2 \cdot 10^{-5}$ зависимость времени от координаты дается выражением

$$t(x, T) \approx \begin{cases} t^{(0)}(x) & \text{при } t \leq t_p, \\ \left[\frac{\beta(x, T)^{\Psi + 1/2} (\Psi - 1/2) \omega + 1 + \omega + (\Psi + 1/2) \eta(x) \omega}{1 + (\Psi + 1/2) \beta(x, T)^{\Psi - 1/2} \omega} \right] t_p & \text{при } t_p < t \leq t_f(T), \\ \left[\sqrt{\frac{x - x_f}{a_0} + (\sqrt{t_r(T)} + \sqrt{t_s(x_f, T)})^2} - \sqrt{t_r(T)} \right]^2 & \text{при } t > t_f(T), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\omega = 2(M_0 - 1) \sqrt{\frac{t_0}{t_p}}, \quad t_r(T) = (M_0 - 1)^2 \left(\frac{t_f(T)}{t_p}\right)^{2\Psi} t_0,$$

$$\eta(x) = \frac{x - x_p}{a_0 \sqrt{t_0 t_p} (M_0 - 1)},$$

$$\beta(x, T) = 1 + \frac{t_{be}^{(0)}(x_p, x, x_p, \sqrt{\gamma RT}, M_x)}{t_p},$$

$$M_x = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{T}} F(x_p, x_0, M_0), \quad (11)$$

$$t_{be}^{(0)}(x_b, x_e, x_0, a_0, M) = \frac{1}{a_0} \left[x_e - x_b - \frac{2x_0}{\Theta} \left(\sqrt{1 + \Theta \frac{x_e}{x_0}} - \sqrt{1 + \Theta \frac{x_b}{x_0}} \right) \right],$$

$$\Theta = \frac{2M - 1}{(M - 1)^2}, \quad (12)$$

$t_{be}^{(0)}$ — время прохождения ударной волны от точки x_b до точки x_e при движении в однородном пространстве (при $M = M_0$).

Время прихода ударной волны t_p в точку начала тепловой неоднородности от температуры не зависит и вычисляется по формуле (5): $t_p = t^{(0)}(x_p)$. Время выхода ударной волны из тепловой неоднородности $t_f(T)$ получается как решение уравнения (9) $x(t_f(T), T) = x_f$. С высокой степенью точности можно брать приближенное значение $t_f(T) \approx t(x_f, T)$ (при этом используется второе из равенств (10)). Зависимость скорости ударной волны от времени определяется формулой (8) и зависимость скорости от координаты вычисляется по формуле (8) с помощью (10)

$$V(x, T) = V(t(x, T), T). \quad (13)$$

В общем случае время, за которое ударная волна проходит расстояние между двумя точками регистрации (от x_b до x_e), определяется формулой

$$t_{be}(T) = \int_{x_b}^{x_e} \frac{dx}{V(x, T)} = t(x_e, T) - t(x_b, T), \quad (14)$$

где скорость $V(x, T)$ в зависимости от ситуации дается формулами (7), (8), (13) или (24), (25) Приложения, $t(x, T)$ — формулой (10); для движения в однородной среде эти формулы совпадают и $t_{be}(T_0) = t_{be}^{(0)}$ (формула (12)).

Если значение начального числа Маха неизвестно, его можно определить из формулы (12), измерив время прохождения ударной волны t_{be} в однородном пространстве (в отсутствие пространственной неоднородности) между двумя точками регистрации

$$M_0(t_{be}) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4x_0 \frac{x_b + x_e - \sqrt{(x_b + x_e - a_0 t_{be})^2 + 4x_b a_0 t_{be}}}{(x_e - x_b - a_0 t_{be})^2}}} \right]^{-1}. \quad (15)$$

Формула (14) позволяет рассчитать время как функцию набора параметров $t_{be} = t_{be}(T, M_0, x_0, x_b, x_e)$. Если время прохождения ударной волны $(t_{be})_{\text{exp}}$ известно из эксперимента, то, разрешая относительно температуры T трансцендентное уравнение $t_{be}(T, M_0, x_0, x_b, x_e) = (t_{be})_{\text{exp}}$, мы определим температуру (или плотность $\rho/\rho_0 = T_0/T$) в области пространственной неоднородности.

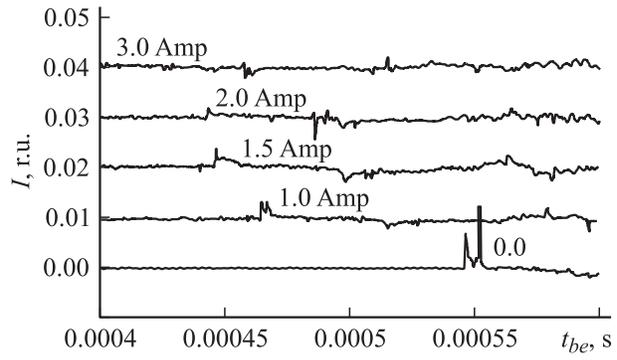


Рис. 2. Регистрация влияния плазмы на распространение ударной волны при давлении 1.6 Торр (время прохождения между точками измерения при разных токах, работы [3,4]).

Если точки наблюдения находятся внутри тепловой неоднородности и первая точка наблюдения x_b совпадает с началом области неоднородности (т.е. $x_b = x_p$, $t_b = t_p$, $x_e \leq x_f$), то температура может быть получена с высокой точностью

$$T(t_{be}, M_p) \approx T_0 \frac{\tau^4}{4 \left[\tau - \eta_{be} + \sqrt{(\tau - \eta_{be})^2 - \frac{t_{be}}{\sqrt{t_x t_p}} \tau^2} \right]^2}, \quad (16)$$

где

$$\eta_{be} = \frac{x_e - x_p}{a_0 \sqrt{t_x t_p}}, \quad \tau = \ln \left(1 + \frac{t_{be}}{t_p} \right),$$

$$t_x = \frac{x_p F(x_p, x_0, M_0)^2}{a_0 [1 + 2F(x_p, x_0, M_0)]}.$$

Оценить значение максимальной температуры в области пространственной неоднородности можно не только по данным об изменении скорости или времени прохождения ударной волны, но и по изменению относительной величины регистрируемого сигнала (рис. 2 из работы [4] и аналогичные рисунки из работы [6]). Уменьшение величины сигнала, регистрируемого фотоприемником, определяется, с одной стороны, снижением плотности в области повышенной температуры ($\rho/\rho_0 = T_0/T$, $T > T_0$) и, с другой стороны, падением локального числа Маха. Если экспериментально регистрируется первая производная плотности, то относительное изменение величины сигнала приближенно можно описать как

$$\frac{I_1(j)}{I_1(j_c)} \approx \frac{\partial \rho(j)/\partial x}{\partial \rho(j_c)/\partial x} \approx \frac{T_c}{T} \frac{J_1(M)}{J_1(M_c)},$$

$$J_1(M) \approx 1.24 \{ 1 - \exp[-1.7(M - 1)] \} (M - 1)^{1.78}. \quad (17)$$

Выражение для зависимости максимальной величины модуля первой производной от числа Маха $J_1(M)$ получено аппроксимацией приведенной в Приложении подробной (но громоздкой) аналитической формулы.

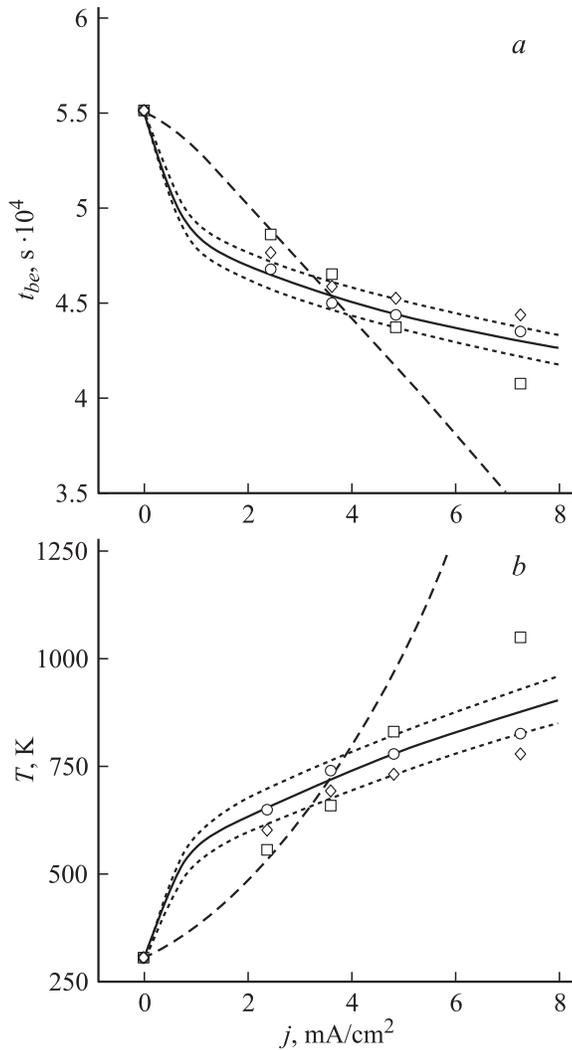


Рис. 3. Время прохождения t между точками регистрации ударной волны с начальным числом Маха $M_0 = M(x_0) = 2.88$ (а) и температура T (при „прямоугольном“ распределении) (б) как функции плотности тока j . а: кружки — экспериментальные данные [4] (рис. 2), все кривые — расчет по формуле (14) (сплошная кривая — температура вычислялась по формуле (21) при $c = 1.7$, верхний пунктир — при $c = 1.6$, нижняя — при $c = 1.8$). Штриховая кривая — расчет по формуле (14), при котором температура вычислялась по формуле (22). Квадраты — расчет по (14), температура определена по относительной амплитуде сигнала решением уравнения (19), ромбы — расчет по формуле (14), температура оценивалась по формуле (26) с использованием экспериментальных данных о времени прохождения ударной волны [4]. б: сплошная кривая — температура вычислялась по формуле (21) при $c = 1.7$, верхний пунктир — при $c = 1.8$, нижняя — при $c = 1.6$, штриховая кривая — расчет по формуле (22). Кружки — температура определялась по экспериментальным данным [4] решением уравнения $t_{be}(T, M_0, x_0, x_b, x_e) = (t_{be})_{exp}$, квадраты — температура определена по относительной амплитуде сигнала решением уравнения (19), ромбы — расчет по формуле (26) с использованием экспериментальных данных о времени прохождения ударной волны [4].

Если регистрируется вторая производная плотности, то соответствующие формулы имеют вид

$$\frac{I_2(j)}{I_2(j_c)} \approx \frac{\partial^2 \rho(j)/\partial x^2}{\partial^2 \rho(j_c)/\partial x^2} \approx \frac{T_c}{T} \frac{J_2(M)}{J_2(M_c)},$$

$$J_2(M) \approx 1.54 \{1 - \exp[-1.7(M - 1)]\} (M - 1)^{3.07}. \quad (18)$$

В формулах (17) и (18) j_c — значение плотности тока, при котором температура T_c и число Маха M_c известны. Число Маха при других значениях плотности тока есть функция от температуры $M = M(T)$ и вычисляется в точке наблюдения x_e по формулам (7), (8), (13) или (24), (25): $M(T) = V(x_e, x_0, M_0, a_0, T)/a(T(x_e))$. Тогда температура в области тепловой неоднородности оценивается из решения трансцендентного уравнения

$$\left[\frac{I_1(j)}{I_1(j_c)} \right]_{exp} = \frac{I_1(j)}{I_1(j_c)} \quad \text{или} \quad \left[\frac{I_2(j)}{I_2(j_c)} \right]_{exp} = \frac{I_2(j)}{I_2(j_c)}, \quad (19)$$

где $[I_1(j)/I_1(j_c)]_{exp}$ или $[I_2(j)/I_2(j_c)]_{exp}$ — измеренное экспериментально отношение амплитуды сигналов (см., например, рис. 2), а $I_1(j)/I_1(j_c)$ или $I_2(j)/I_2(j_c)$ вычисляется (в зависимости от способа регистрации) по (17) или (18) и по формуле $M(T) = V(x_e, x_0, M_0, a_0, T)/a(T(x_e))$.

Для многих экспериментальных ситуаций полезно использование зависимости температуры газового разряда T от плотности тока, давления и отношения E/p , характеризующего сорт газа. Эта формула предложена В.С. Сухомлиновым [7]

$$T = cT_0\varphi, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1 + \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{0.4} \right] \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^{0.2},$$

$$q = \sqrt{1 - \left(\frac{j_0}{j} \right)^2}, \quad j_0 = \frac{21.383}{\left(\frac{E}{p} \right) p}, \quad (20)$$

где cT_0 — температура окружающей разряд стенки; напряженность поля E берется с В/см, плотность тока j — в мА/см², давление p — в Торг, численная константа определяется выбором единиц.

Константу $c \geq 1$ можно назвать „коэффициентом нагрева“ стенки по отношению к окружающей среде. Формула (20) справедлива только для $j \geq j_0$. Во всей области $j \geq 0$ можно предложить обобщение

$$T = \begin{cases} T_0 \left[\left(1 - \frac{42c}{25\sqrt{3}} \right) \left(\frac{j}{j_0} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{46c}{25\sqrt{3}} \right) \left(\frac{j}{j_0} \right) + 1 \right] & \text{при } j \leq j_0, \\ cT_0\varphi & \text{при } j > j_0. \end{cases} \quad (21)$$

В тех случаях, когда температура стенки определяется средней величиной между температурой T_0 и самой

температурой плазмы, т.е. $T = (T + T_0)c_b\varphi$, где коэффициент c_b порядка 1/2, вместо формулы (21) получаем

$$T = \begin{cases} T_0 \left[\left(\frac{3 - (142/25)c_b\sqrt{3} + 8c_b^2}{(2c_b - \sqrt{3})^2} \right) \left(\frac{j}{j_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{3 - (146/25)c_b\sqrt{3} + 8c_b^2}{(2c_b - \sqrt{3})^2} \right) \left(\frac{j}{j_0} \right) + 1 \right] & \text{при } j \leq j_0, \\ c_b T_0 \varphi & \text{при } j > j_0. \end{cases} \quad (22)$$

Эти формулы позволяют оценивать температуру плазмы, а в нашем случае могут служить для дополнительного контроля получаемых по экспериментальным данным значений температуры.

Далее будут приведены примеры использования предложенных выше методов определения температуры (рис. 3–6). Если давление в области тепловой неоднородности совпадает с давлением вне ее, то при известном давлении P_1 и известном значении температуры вне тепловой неоднородности T_0 эти методы позволяют полностью определить основные параметры в области неоднородности.

2. Определение температуры плазмы по измеренным параметрам ударной волны

Достаточно полная информация об условиях и результатах эксперимента дана в [3,4]. В этих работах с помощью двух лазеров регистрировалось время прохождения ударной волны между двумя точками регистрации. Измерения проводились в воздухе при давлениях 1.6 и 10 Torr. Ударная волна проходила через плазму газового разряда, причем направление прикладываемого электрического поля было перпендикулярно направлению распространения ударной волны. Разряд мог располагаться в различных участках рабочей камеры. Обозначения, принятые для описания пространственного распределения создаваемой разрядом тепловой неоднородности, приведены на рис. 1.

Характерный вид осциллограмм, по которым определяется время прохождения ударной волны между точками наблюдения, приведен на рис. 2 [4]. Подставив время движения в однородной (без плазмы) среде $t = 0.00055$ s в формулу (15), определим число Маха непосредственно в месте расположения диафрагмы $M_0 = 2.88$, что совпадает с данными работ [3,4]. Затем можно для контроля рассчитать (по формулам (10) и (14)) время движения ударной волны при ненулевых токах, используя для определения температуры формулы (21) и (22). Температура стенки разрядной камеры в работах [3,4] не измерялась, поэтому коэффициент c в формуле (21) мы подбираем из оценки мощности, вкладываемой в разряд. На рис. 3, *b* приведены сплошной кривой результаты расчета по формуле (21) при $c = 1.7$, а пунктир соответствует $c = 1.6$ (нижняя кривая) и 1.8 (верхняя кривая).

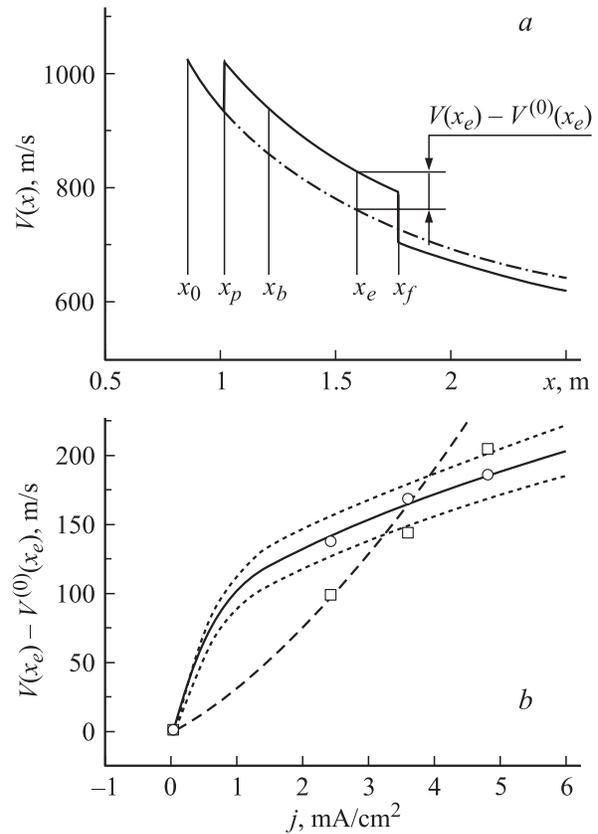


Рис. 4. Распределение скорости ударной волны по координате (*a*) и приращение скорости за счет прохождения пространственной неоднородности (*b*). *a*: сплошная кривая — скорость ударной волны $V(x)$ с начальным числом Маха $M_0 = 2.88$, штрихпунктир — скорость ударной волны $V^{(0)}(x)$ с тем же $M_0 = 2.88$, но при движении в однородной среде (расчет по формуле (7)). *b* — разность приведенных на рис. 4, *a* скоростей в точке наблюдения x_e . Температура при расчете по формуле (14) (рис. 3, *b*) определялась: по формуле (21) (сплошная кривая — при $c = 1.7$, верхний пунктир — при $c = 1.8$, нижний — при $c = 1.6$), по формуле (22) (штриховая кривая), по экспериментальным данным работы [4] ($p = 1.6$ Torr) по времени прохождения (кружки) и по изменению амплитуды сигнала (квадраты).

Штриховая кривая рассчитана с использованием формулы (22) при $c_b = 1/2$. Для расчета значений, отмеченных квадратами, использована температура, полученная по экспериментально измеренным относительным амплитудам сигнала (этот метод оценки T описан в разделе 1). Можно считать, что формула (21) более удачно описывает экспериментальную ситуацию. Зависимости температуры от плотности тока определены из решения уравнения $t_{be}(T, M_0, x_0, x_b, x_e) = (t_{be})_{\text{exp}}$. По-видимому, оценки температуры, полученные по относительной амплитуде сигнала, менее точны, чем определение температуры по измерениям времени.

На рис. 4, *a* дан пример расчета скорости движения ударной волны как функции координаты (сплош-

ная кривая, формула (13) при $T = 473$ К). Штрихпунктир дает результат расчета по той же формуле при $T = T_0 = 300$ К, т.е. в отсутствие тепловой неоднородности. Разность этих кривых дает прирост скорости в точке наблюдения x_e за счет влияния тепловой неоднородности (рис. 4, *b*).

Авторы работы [6] получили данные о прохождении ударной волны в плазме аргона (рис. 5, *a*) и азота (рис. 5, *b*). Измерение времени в этой работе проведено по осциллограммам (вид которых аналогичен приведенным на рис. 2). Очевидно, что в этом случае оценки температуры по времени прохождения ударной волны

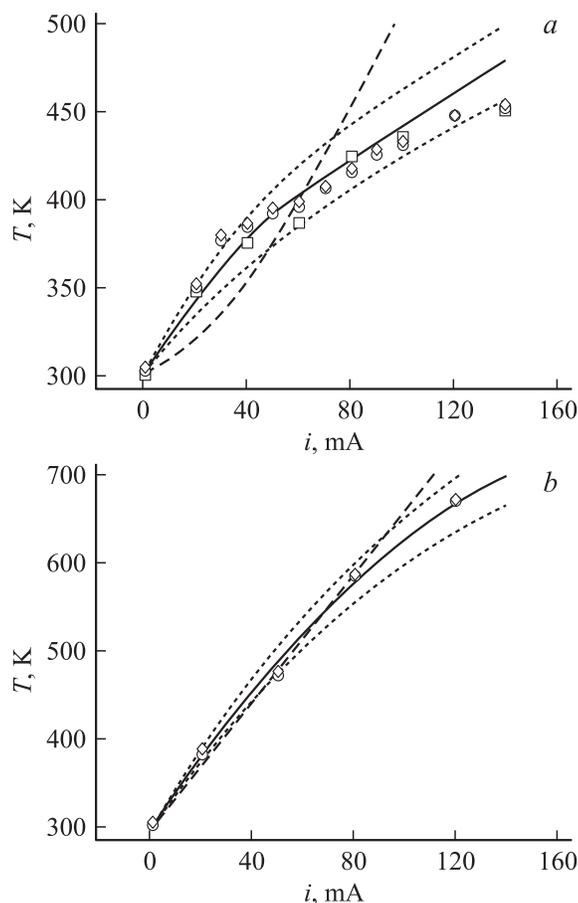


Рис. 5. Зависимость температуры от тока при прохождении ударной волны через разряд в аргоне (*a*) при $p = 30$ и в азоте (*b*) при $p = 10$ Торг. Кружки — температура определялась решением уравнения $t_p(T, M_0, x_0, x_b, x_e) = (t_p)_{\text{exp}}$ или расчетом по формуле (26) с использованием экспериментальных данных о времени прохождения ударной волны [6], квадраты — температура определена по относительной амплитуде сигнала [6] решением уравнения (19). *a*: сплошная кривая — температура вычислялась по формуле (21) при $c = 1.15$, верхний пунктир — при $c = 1.2$, нижний — при $c = 1.1$, штриховая кривая — расчет по формуле (22). *b*: сплошная кривая — температура вычислялась по формуле (21) при $c = 2.1$, верхний пунктир — при $c = 2.2$, нижний — при $c = 2.0$, штриховая кривая — расчет по формуле (22).

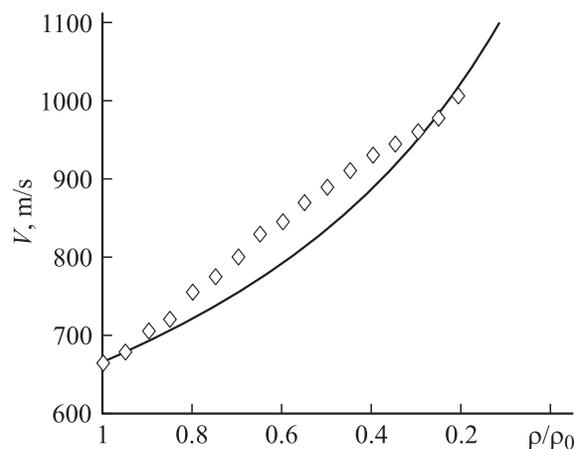


Рис. 6. Скорость ударной волны в зависимости от относительного распределения плотности. Точки — эксперимент [8], кривая рассчитана по формуле (24), в которой начальное число Маха определено по формуле (33), давление $p = 60$ Торг. Плотность изменялась по закону $\rho_i(x)/\rho_{i0} \approx 0.2 + 0.8(x - x_p)/(x_f - x_p)$ [8].

имеют примерно ту же точность, что и оценки по амплитуде сигнала.

В работе [8] измерены распределения скорости ударной волны по координате при различных начальных скоростях ударной волны при прохождении ударной волной неоднородности с линейно меняющейся плотностью $\rho_1(x)/\rho_{10} \approx 0.2 + 0.8(x - x_p)/(x_f - x_p)$ (эта зависимость определена в работе [8] экспериментально). Оценка температуры изложенным в Приложении методом двух скоростей дала значение максимальной температуры $T = 1404$ К, что хорошо соответствует оценке $T \approx 1370$ К, которую приводят сами авторы работы [8]. На рис. 6 дано сопоставление результатов расчета скоростей ударной волны как функции расстояния от теплового источника с экспериментальными данными работы [8]. Хорошее совпадение результатов расчета с экспериментом дает основание считать, что и этот метод оценки температуры дает достаточно надежный результат.

Заключение

В работе получены формулы для оценки параметров плазмы несколькими независимыми методами по экспериментальным данным о параметрах ударных волн, проходящих через тепловую неоднородность. Эти формулы позволяют рассчитать скорость ударной волны и время ее прохождения между точками наблюдения. Сопоставление предложенных методов с результатами экспериментов позволяет надеяться, что эти методы могут быть успешно использованы для оценки параметров плазмы в различных экспериментальных ситуациях.

Приложение

Функция $f(t)$ в однородной среде имеет вид

$$f(t) = \frac{2(M_0 - 1)\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}. \quad (23)$$

Это выражение для $f(t)$ можно подставить в первое из уравнений (1) в качестве нулевого приближения, заменив зависимость от t на зависимость от x по формуле (5). Тогда при движении ударной волны в среде с пространственной неоднородностью для скорости ударной волны можно получить простую приближенную формулу

$$V(x, x_0, M_0, a_0, T) \approx a(T(x)) + a_0 F(x, x_0, M_0), \quad (24)$$

где T — максимальное значение температуры в среде с температурной неоднородностью, $M_0 = M(x_0)$.

Следующее приближение дается более сложной формулой

$$V(x, x_0, M_0, a_0, T) \approx a(T(x)) + a_0 F(x) \times \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq x_p, \\ \sqrt{\frac{1 + F(x_p) \left(\frac{x_0}{x}\right)^{1/3} + \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{1/3}\right] \frac{F(x)^2}{F(x_p)}}}{1 + F(x_p)} & \text{при } x > x_p, \end{cases}$$

$$F(x) = F(x, x_0, M_0), \quad F(x_p) = F(x_p, x_0, M_0) = \text{const}. \quad (25)$$

Сопоставление с численным решением точных уравнений показывает правильность этих формул при различных видах распределения температуры.

Для неоднородности „прямоугольного“ вида (рис. 1) самый простой метод оценки температуры в области тепловой неоднородности состоит в замене зависимости от x скорости под интегралом (14) на ее значение в точке, расположенной посередине между точками наблюдения x_b и x_e (при $x_b \geq x_p$, $x_e \leq x_f$). Тогда для температуры получится оценка

$$T \approx \frac{1}{\gamma R} \left[\frac{x_e - x_b}{(t_{be})_{\text{exp}}} - a_0 F\left(\frac{x_e + x_b}{2}, x_0, M_0\right) \right]^2. \quad (26)$$

Температуру в области пространственной неоднородности можно оценить по измерениям пространственного распределения скорости ударной волны для двух различных начальных чисел Маха M_{01} и M_{02} , если максимальное значение скорости достигается непосредственно после входа ударной волны в тепловую неоднородность. Величина максимальной скорости в этом случае определяется формулой

$$V_{\text{max}} = a_0 \left(M_p - 1 + \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right), \quad (27)$$

где $a_0 M_p$ — скорость ударной волны непосредственно перед входом в тепловую неоднородность, M_p — соответствующее ей число Маха, T — максимальное значение температуры в области тепловой неоднородности.

Если распределения двух скоростей измерены, то можно составить систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} V_{1\text{max}} &= \left(M_{1p} - 1 + \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right) a_0, \\ V_{2\text{max}} &= \left(M_{2p} - 1 + \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right) a_0, \\ V_{10} &= V^{(0)}(x_m, x_0, M_{1p}, a_0), \\ V_{20} &= V^{(0)}(x_m, x_0, M_{2p}, a_0), \end{aligned} \quad (28)$$

где в левой части каждого уравнения стоят экспериментально измеренные значения максимальных скоростей $V_{1\text{max}}$, $V_{2\text{max}}$ и скоростей V_{10} , V_{20} в точке x_m , заведомо находящейся за областью пространственной неоднородности.

Значение величины x_0 , определяющей выбор системы координат, остается неизвестным параметром, левые части двух последних уравнений вычисляются по формуле (7). Система содержит четыре неизвестные величины M_{1p} , M_{2p} , T и x_m/x_0 . Решение системы можно свести к кубическому уравнению относительно величины M_{1p}

$$A_3 M_{1p}^3 + A_2 M_{1p}^2 + A_1 M_{1p} + A_0 = 0,$$

$$A_3 = 2g - 2, \quad A_2 = 2gq - 5g - 4q + 5,$$

$$A_2 = -4gq + 4g - 2q^2 + 6q - 4,$$

$$A_0 = 2gq + q^2 - 2q - g + 1,$$

$$g = \frac{(2V_{10} - a_0)(V_{20} - a_0)^2}{(V_{10} - a_0)^2(2V_{20} - a_0)}, \quad q = \frac{V_{2\text{max}} - V_{1\text{max}}}{a_0}. \quad (29)$$

Наибольший по величине корень этого уравнения дает значение M_{1p} , по которому вычисляются остальные величины

$$T = \frac{[V_{1\text{max}} - a_0(M_{1p} - 1)]^2}{\gamma R}, \quad M_{2p} = q + M_{1p},$$

$$x_0 = \frac{(x_m - x_0)_{\text{exp}}(V_{10} - a_0)^2(2M_{1p} - 1)}{(a_0 M_{1p} - V_{10})(2M_{1p}V_{10} - V_{10} - a_0 M_{1p})}, \quad (30)$$

где $(x_m - x_0)_{\text{exp}}$ — измеренное экспериментально расстояние от источника ударной волны до точки x_m , в которой измерялись скорости V_{10} , V_{20} .

Вычисленное значение x_0 (рис. 1) и известное значение $(x_m - x_0)_{\text{exp}}$ определяют все необходимые для расчета координаты, что позволяет для контроля рассчитать распределение скорости по формулам (8), (13), (24) или (25).

Если измерение давления невозможно по техническим причинам, то, измеряя экспериментально время прохождения t_{be} между двумя точками вне пространственной неоднородности, можно определить число Маха на выходе из ударной трубы по формуле (15) $M_0 = M_0(t_{be})$, а затем вычислить по хорошо известным формулам давление в рабочем объеме P_1 по давлению P_4 и

температуре T_4 в камере высокого давления в ударной трубе

$$P_1 = \frac{P_4}{z} \left\{ 1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(z - 1)\sqrt{\frac{\gamma T_0}{\gamma_4 T_4}}}{\sqrt{2\gamma[2\gamma + (\gamma + 1)(z - 1)]}} \right\}^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}},$$

$$z = \frac{P_2}{P_1} = \frac{(2M_0 - 1)\gamma + 1}{\gamma + 1}, \quad (31)$$

где γ_4 — показатель адиабаты газа в камере высокого давления.

Для оценки величины максимума первой производной от плотности можно использовать формулу, полученную по данным работы [9],

$$\left. \frac{\partial \rho(x, M)}{\partial x} \right|_{x=x_{\max}} \approx \frac{(1-y)^2 [(1-2y)(\sqrt{y^2 - y + 1} - 1) - 2y^2]}{(2y - 1 + \sqrt{y^2 - y + 1})^3} M,$$

$$y = \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{(\gamma + 1)M^2}. \quad (32)$$

Формула (17) дает достаточно точную аппроксимацию этого выражения.

Начальное число Маха при движении в однородном пространстве можно определить по известной скорости V_m , измеренной в точке x_m , если разрешить относительно M_0 уравнение (7)

$$M_0 = B_m + \sqrt{(B_m - 1)B_m}$$

$$\left(B_m = \frac{x_m}{x_0} \frac{(V_m - a_0)^2}{(2V_m - a_0)a_0} + 1 \right). \quad (33)$$

Эта формула пригодна для оценки исходного числа Маха и в том случае, если точка x_m находится за пределами пространственной неоднородности, поскольку скорость ударной волны в этой области близка к скорости в отсутствие неоднородности (рис. 4, а при $x > x_f$).

Автор благодарит В.С. Сухомлинова за полезные обсуждения и И.Н. Скобло за техническую помощь.

Список литературы

- [1] *Gentle K.W., Ingard U.* // Appl. Phys. Lett. 1964. Vol. 5. N 5. P. 105–106.
- [2] *Gentle K.W., Ingard U., Bekefi G.* // Nature. 1964. Vol. 23. N 4952. P. 1369–1370.
- [3] *Van Wie D.M., Wesner A.L., Gauthier L.R.* // Proc. 3^d Workshop on Weakly Ionized Gases. Norfolk, 1999. AIAA-99-4824.
- [4] *Van Wie D.M., Gauthier L.R.* Труды II симпозиума „Термохимические процессы в плазменной аэродинамике“. СПб., 2001. 130 с.
- [5] *Sukhomlinov V.S., Kolosov V.Y., Sheverev V.A.* et al. // Proc. 9th Intern. Space Plane and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, 1999. AIAA 99-4943.

- [6] *Ganguly B.N., Bletzinger P.* // Proc. Weakly Ionized Gases Workshop. Colorado. 1997. Vol. 2. P. HH1–HH13.
- [7] *Sukhomlinov V.S., Kolosov V.Y., Sheverev V.A.* et al. // J. Fluid. Mech. 2000. Vol. 473. P. 245–264.
- [8] *Пискарева М.В., Шугаев Ф.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1978. Т. 19. № 3. С. 11–18.
- [9] *Golyatin V.Y., Kuranov A.L., Kuchinsky V.V.* et al. // Proc. 32^d AIAA Plasmadynamics and Lasers Conf. 4th Weakly Ionized Gases Workshop. Anahem, 2001. AIAA-2001-3055.