01;03

О расчете амплитуды трансляционной моды при нелинейных осцилляциях капли во внешней среде

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, А.Н. Жаров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 февраля 2003 г.)

Показано, что при расчете амплитуд мод капиллярных осцилляций капли идеальной несжимаемой жидкости в несжимаемой идеальной среде, возбуждающихся во втором порядке малости по величине начальной многомодовой деформации равновесной сферической формы за счет нелинейного взаимодействия, в математической постановке задачи условие неподвижности центра масс капли выполняется автоматически. При расчете амплитуды трансляционной моды следует исходить не из условия неподвижности центра масс, как обычно делается из соображений простоты в задачах об осцилляциях капель в вакууме, а из системы гидродинамических граничных условий на межфазной границе.

1. Исследование осцилляций и устойчивости заряженных капель и пузырей в жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, [1–3] и указанную там литературу). Этой проблеме посвящено весьма значительное количество экспериментальных и теоретических исследований, выполненных как в линейном приближении по амплитуде осцилляций [1–3], так и в нелинейном [4–10]. Теоретическое исследование нелинейных осцилляций капель и пузырей началось сравнительно недавно, методика и идеология решения таких задач еще не стали традиционными и многие частные вопросы до сих пор освещены весьма поверхностно, что иногда приводит к ошибкам. В частности, сказанное относится к вопросу о возбуждении трансляционной моды нелинейно осциллирующей капли, обнаруживающемся при расчетах второго и третьего порядков малости [4,8,9,11,12]. Сам факт возбуждения трансляционной моды нелинейно осциллирующей в вакууме капли несжимаемой жидкости вытекает из требования неподвижности центра масс капли. Когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию капли, имеется две и более мод с последовательно возрастающими номерами, то требование неподвижности центра масс приводит к тому, что среди мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, появляется трансляционная мода [9]. Иными словами, возбуждение трансляционной моды компенсирует смещение центра масс капли, проявляющееся вследствие несимметричного относительно центра равновесной сферической капли распределения массы при начальной деформации, в спектре мод которой имеются моды с последовательными номерами. Причем зависимость амплитуды трансляционной моды от времени имеет периодический характер, что при рассмотрении осцилляционной капли в газовой атмосфере превращает каплю в источник акустического излучения дипольного типа [9,13]. Если же капля заряжена, то она становится источником электромагнитного излучения дипольного типа [9,14].

Аналитическое выражение для амплитуды трансляционной моды капли, нелинейно осциллирующей в вакууме, при расчетах второго порядка малости можно получить как из условия неподвижности центра масс, так и из системы гидродинамических граничных условий на свободной поверхности капли. В обоих случаях оно будет иметь один и тот же вид [9]. Ситуация меняется, если рассмотреть осцилляции капли во внешней среде (или же пузыря в жидкости): аналитические выражения для амплитуды трансляционной моды, получаемые из условия неподвижности центра масс и системы граничных условий на межфазной границе, в этом случае оказываются вроде бы различными [11]. В действительности же в [11] условие неподвижности центра масс используется некорректно. Тем не менее в [11] на основе проделанных расчетов делается глобальный вывод о поступательном движении капли (пузыря) с некоторой фиксированной скоростью в результате возбуждения поверхностных осцилляций (в результате перекачки энергии из поверхностных мод в трансляционную, амплитуда которой содержит не зависящее от времени слагаемое). Этот вывод в совокупности с неверной трактовкой наблюдений, проведенных в экспериментах [15], где исследовались закономерности кавитации, привел к появлению еще одной теоретической работы [12], в которой на базе неверного перехода к неинерциальной системе отсчета получено выражение для скорости поступательного движения пузыря в жидкости в отсутствие действия внешних сил только за счет поверхностных осцилляций. Приведенные факты делают актуальным решение проблемы правильного использования условия неподвижности центра масс при расчетах нелинейных осцилляций капель несжимаемой жидкости в несжимаемой идеальной внешней среде при многомодовой начальной деформации.

Отметим, что в экспериментах [15] наблюдались образование, движение и кавитационное исчезновение микропузырьков в жидкости в окрестности вибрирующего на частоте 7.5 kHz металлического образца. Количество образующихся пузырьков было весьма велико: они образовывали облачко в окрестности образца. Бо́льшая часть пузырьков образовывалась и схлопывалась в малой окрестности образца, приводя к его кавитационной эрозии. Однако некоторые из пузырьков вдруг переходили в быстрое хаотическое движение. Это наблюдение и послужило основой для рассуждений [11,12] о направленном движении пузырьков при нелинейных осцилляциях. На наш взгляд, интерпретация наблюдений [15], данная в [11,12], далека от корректной, поскольку очевидно, что поле скоростей течения жидкости в окрестности вибрирующего металлического образца при наложении на поля скоростей хаотически ориентированных интенсивных гидродинамических течений в окрестности кавитирующих пузырьков [16] при одновременном действии поля сил тяжести и архимедовых выталкивающих сил может обеспечить сколь угодно сложное хаотическое движение отдельных пузырьков. Направленного же движения пузырьков в неподвижной жидкости в отсутствие направленных внешних сил только за счет возбуждения поверхностных осцилляций, насколько известно авторам настоящей заметки, никто в экспериментах не наблюдал.

2. Пусть заряженная капля радиуса R идеальной несжимаемой электропроводной жидкости с массовой плотностью ρ_1 помещена во внешнюю среду, которую будем моделировать идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε_* и массовой плотностью ρ_2. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела двух сред обозначим σ, а полный заряд капли — Q.

Рассмотрим капиллярные колебания межфазной поверхности, вызванные малым начальным возмущением ее равновесной сферической формы. Ограничиваясь рассмотрением только осесимметричных искажений границы раздела, запишем уравнение ее поверхности в сферической системе координат с началом в центре масс капли в виде

$$F(r,\Theta,t)\equiv r-r(\Theta,t)\equiv r-R\big[1+\xi(\Theta,t)\big],$$

$$(|\xi|/R)\ll 1; \qquad (1)$$

где $\xi(\Theta,t)$ — безразмерная функция, описывающая деформацию сферической поверхности, связанную с ее осцилляциями.

Малость амплитуд осцилляций капли позволяет провести анализ задачи в рамках модели потенциального движения обеих сред с потенциалами полей скоростей течения жидкости $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ внутри и вне капли соответственно.

Проводимость капли будем принимать достаточно высокой, чтобы характерное время перераспределения заряда по ее поверхности было много меньше характерных гидродинамических временны́х масштабов задачи, чтобы электрическое поле в окрестности капли можно было считать электростатическим в любой момент времени и характеризовать его потенциалом Φ.

Уравнения, описывающие движения жидкости, возникающие в рассматриваемой системе, имеют вид

$$\Delta\psi_1=0 \quad (0\le r<r(\Theta,t));$$

$$\Delta\psi_2=0;\quad \Delta\Phi=0 \quad (r>r(\Theta,t)) \qquad (2)$$

с условиями на границе раздела, описываемой уравнением (1),

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}=\frac{\partial\psi_2}{\partial n};$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\psi_1\cdot\nabla F=0;$$

$$P_1-P_2-\rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-\frac{\rho_1}{2}(\nabla\psi_1)^2+\rho_2\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\frac{\rho_2}{2}(\nabla\psi_2)^2+\frac{\varepsilon_*}{8\pi}\cdot(\nabla\Phi)^2=\sigma\,\mathrm{div}\,\mathbf{n};$$

$$\Phi(\Theta,t)=\Phi_S(t);$$

$$-\frac{\varepsilon_*}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi)dS=Q,\quad S=\begin{cases}r=R[1+\xi(\Theta,t)];\\ 0\le\Theta\le\pi;\\ 0\le\phi\le 2\pi.\end{cases} \qquad (3)$$

Здесь P_1 и P_2 — давление внутри и вне капли в равновесном состоянии; $\mathbf{n}$ — орт внешней (направленной во внешнюю среду) нормали к границе раздела (1); $\Phi_S(t)$ — постоянное вдоль межфазной границы значение электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r},t)$.

Начальными условиями являются вид начальной диффузии поверхности раздела и задание нулевой начальной скорости ее движения

$$\xi(\Theta,t=0)=\varepsilon\sum_{i\in\Xi}h_iP_i(\cos\Theta)+\xi_0P_0(\cos\Theta)+\xi_1P_1(\cos\Theta);$$

$$\frac{\partial\xi(\Theta,t=0)}{\partial t}=0. \qquad (4)$$

Здесь ε — амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи; $P_i(\cos\Theta)$ — полином Лежандра i-го порядка; h_i — парциальный вклад i-й колебательной моды в форму начального возмущения

$$\sum_{i\in\Xi}h_i=1,$$

ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые условиями неизменности объема капли (и среды) при осцилляциях границы раздела

$$\int_\Omega\int_0^{r(\Theta,t)}r^2dr\,d\Omega=\frac{4}{3}\pi R^3;\quad d\Omega\equiv\sin\Theta d\Theta\,d\varphi;\quad \Omega=\{0\le\Theta\le\pi;\ 0\le\varphi\le 2\pi\} \qquad (5)$$

и неподвижности центра масс всей системы

$$\frac{\rho_1 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{r(\Theta,t)} \mathbf{r} \cdot r^2 dr d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{r(\Theta,t)}^{L} \mathbf{r} \cdot r^2 dr d\Omega}{\rho_1 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{r(\Theta,t)} r^2 dr d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega} \int\limits_{r(\Theta,t)}^{L} r^2 dr d\Omega} = 0 \qquad (6)$$

соответственно. Условия (5) и (6) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный. В (6) L — характерный линейный размер пространства внешней среды, причем $L \gg R$ (внешняя среда заполняет весьма большой объем, бесконечно большой не в математическом, а в физическом смысле).

3. Нелинейный анализ задачи (2)–(4) может быть проведен методом многих масштабов аналогично тому, как это делалось для капли в вакууме [4,7–10]. Подобное исследование позволяет определить функцию $\xi(\Theta, t)$, представленную в виде ряда по полиномам Лежандра и описывающую временну́ю эволюцию межфазной границы,

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon M_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 M_n^{(2)}(t) + O(\varepsilon^3) \right] P_n(\cos\Theta). \qquad (7)$$

При рассмотрении задачи об осцилляциях поверхности капли в вакууме ($\rho_2 = 0$) условия (5) и (6) накладывали дополнительные ограничения на амплитуды нулевой (объемной) и первой (трансляционной) мод в разложении (7) соответственно, причем эти ограничения согласовались с системой (2)–(4) (т. е., например, выражение для амплитуды трансляционной моды, получаемое из условия неподвижности центра масс, совпадало с получаемым из системы граничных условий). Для случая капли, помещенной во внешнюю среду, роль условия (5) сохраняется (и связано это с модельными предположениями о несжимаемости обеих сред), в то время как использование условия (6) требует более внимательного анализа.

Прежде всего заметим, что, беря проекции интеграла от векторной функции вида $\iint \mathbf{r} \cdot r^2 dr d\Omega$ на орты декартовой системы координат, можно получить эквивалентную систему трех скалярных интегралов

$$\iint r^3 \sin\Theta \cos\varphi dr d\Omega; \qquad \iint r^3 \sin\Theta \sin\varphi dr d\Omega;$$

$$\iint r^3 \cos\Theta dr d\Omega,$$

комбинируя которые, несложно привести эту систему к компактной записи

$$\iint r^3 Y_1^m(\Theta, \varphi) dr d\Omega, \qquad (m = -1; 0; 1),$$

где $Y_1^{\pm 1}(\Theta, \varphi) \sim \sin\Theta \exp(\pm i\varphi)$; $Y_1^0(\Theta, \varphi) \sim cos\Theta$ — сферические функции.

Учитывая сказанное, условие неподвижности центра масс для капли в среде (6) запишем в виде

$$\frac{\int\limits_{\Omega} \left[\rho_1 \int\limits_{0}^{r(\Theta,t)} r^3 dr + \rho_2 \int\limits_{r(\Theta,t)}^{L} r^3 dr \right] Y_1^m(\Theta, \varphi) d\Omega}{\int\limits_{\Omega} \left[\rho_1 \int\limits_{0}^{r(\Theta,t)} r^2 dr + \rho_2 \int\limits_{r(\Theta,t)}^{L} r^2 dr \right] d\Omega} = 0.$$

Проводя интегрирование по радиальной координате, получим

$$\frac{\frac{L}{4} \int\limits_{\Omega} \left[\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \frac{r^4(\Theta,t)}{L^4} \right] Y_1^m(\Theta, \varphi) d\Omega}{\frac{1}{3} \int\limits_{\Omega} \left[\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \frac{r^3(\Theta,t)}{L^3} \right] d\Omega} = 0.$$

Заметим далее, что знаменатель этого выражения есть конечная величина, поскольку (см. (5))

$$\int\limits_{\Omega} d\Omega = 4\pi; \qquad \int\limits_{\Omega} r^3(\Theta, t) d\Omega = 4\pi R^3,$$

а первый интеграл в числителе равен нулю в силу известного свойства сферических функций

$$\int\limits_{\Omega} Y_1^m(\Theta, t) d\Omega = 0.$$

В результате условие неподвижности центра масс системы капля–среда можно записать в виде

$$\frac{3(\rho_1 - \rho_2)}{16\pi \left[\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \frac{R^3}{L^3} \right]} \int\limits_{\Omega} \frac{r^4(\Theta, t)}{L^3} Y_1^m(\Theta, t) d\Omega = 0. \qquad (8)$$

Очевидно, что, выбирая достаточно большим линейный размер внешней среды L, равенство (8) можно сделать справедливым со сколь угодно большой степенью точности для произвольной функции $r(\Theta, t)$.

Таким образом, в задаче об осцилляциях поверхности капли, находящейся во внешней среде достаточно большого, но конечного объема, условие неподвижности центра масс такой системы выполняется автоматически. Следовательно, амплитуда трансляционной моды в разложении (7) должна определяться из граничных условий (2)–(4). Сам факт возбуждения трансляционной моды сохраняет компенсационный смысл, т. е., как и для капли в вакууме, возбуждение трансляционной моды компенсирует смещение центра масс капли, вносимое колебательными поверхностными модами [9].

Отметим, что переход в выражении (8) к случаю отсутствия внешней среды ($\rho_2 = 0$) приводит к условию

$$\frac{3}{16\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{r^4(\Theta, t)}{R^3} Y_1^m(\Theta, t) d\Omega = 0,$$

справедливость которого уже не очевидна, поэтому данное условие должно учитываться в полной формулировке задачи о поверхностных колебаниях капли в вакууме, что обычно и делается [4,7–9].

Заключение

При решении задач о расчете нелинейных осцилляций капель несжимаемой идеальной жидкости в несмешивающейся с ней несжимаемой идеальной среде условие неподвижности центра масс удовлетворяется автоматически, поэтому расчет амплитуды трансляционной моды следует проводить на основе системы гидродинамических граничных условий на границе раздела фаз.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Жаров А.Н., Ширяева С.О.* // Электрон. обраб. материалов. 1999. № 6. С. 9–21.
[3] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
[4] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
[5] *Basaran O.A., Scriven L.E.* // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
[6] *Feng Z., Leal L.G.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 266. P. 209–242.
[7] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
[8] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 163–174.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
[10] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
[11] *Benjamin T.B., Ellis A.T.* // J. Fluid Mech. 1989. Vol. 212. P. 65–80.
[12] *Feng Z.* // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
[13] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Гаибов А.Р., Белоножко Д.Ф.* // ПЖТФ. 2001. Т. 27. Вып. 22. С. 7–13.
[14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Голованов А.С.* // ПЖТФ. 2001. Т. 27. Вып. 20. С. 65–71.
[15] *Kornfeld M., Suvorov L.* // J. Appl. Phys. 1944. Vol. 15. P. 495–506.
[16] *Диденкулов И.Н., Селивановский Д.А., Семенов В.Е., Соколов И.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 2. С. 183–197.