01;03

Новое уравнение для поляризационных фурье-компонент мелкомасштабной скорости несжимаемой жидкости в неизотропной турбулентности

© А.М. Балонишников

Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет,
191002 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: balonalex@yahoo.co.uk, balonale@engec.ru

(Поступило в Редакцию 24 декабря 2002 г. В окончательной редакции 25 февраля 2003 г.)

Предложено новое уравнение для описания мелкомасштабных поляризационных фурье-компонент скорости несжимаемой жидкости в случае неизотропной турбулентности. Установлен вид главного инварианта тензора скорости деформации крупномасштабной скорости, наиболее значимого для подсеточного моделирования развитой турбулентности.

Введение

Большинство исследователей, в том числе и автор данной статьи, полагают, что развитую турбулентность в несжимаемой жидкости можно описывать уравнениями Навье–Стокса (см., например, [1,2]). Основная трудность состоит в том, что современные компьютеры пока не в состоянии решать эти уравнения для больших чисел Рейнольдса (Re), что исключительно важно для многочисленных приложений — слишком большое число степеней свободы оказывается возбужденным. Но все же относительно неплохие результаты были получены применением полуэмпирических моделей. Это косвенно указывает на то, что не все возбуждаемые степени свободы одинаково важны, если мы интересуемся лишь крупномасштабным долговременным поведением развитой турбулентности. Можно предположить, что если мы разобьем стандартным образом мгновенные скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и давление $p(\mathbf{x}, t)$ на крупномасштабные и мелкомасштабные составляющие, то энергетически значимые мелкомасштабные степени свободы будут подстраиваться под крупномасштабные. Один из способов „замыкания турбулентности“ состоит в приближенном решении уравнений для мелкомасштабных компонент скорости и давления, выражая последние через крупномасштабные переменные. Такой подход используется, например, в теории „быстрого искажения турбулентности“ (см., например, [3]). Нами далее будет выведено приближенное уравнение для мелкомасштабной скорости, более простое, чем то, которое используется в [3].

Вывод уравнения для мелкомасштабных поляризационных фурье-компонент скорости в неизотропной турбулентности

Разложим давление $p(\mathbf{x}, t)$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ на крупномасштабные $P(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ и мелкомасштабные составляющие $p'(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

$$p = P + p'; \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}. \tag{1}$$

Полагаем, что $\langle p' \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$, где $\langle \ldots \rangle$ — осреднение по некоторой кубической ячейке с ребром длиной L. Тогда для мелкомасштабных составляющих получим следующие уравнения (см., например, [2]):

$$\partial_t u_i + \partial_k (V_i u_k + V_k u_i) + \rho^{-1} \partial_i p' = \partial_k (\nu \partial_k u_i - u_i u_k + \langle u_i u_k \rangle), \tag{2}$$

где $k = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$; ν — коэффициент молекулярной кинематической вязкости; ρ — плотность жидкости и уравнение несжимаемости

$$\partial_i u_i = 0 \tag{3}$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Крупномасштабная скорость, как известно, также удовлетворяет условию несжимаемости

$$\partial_i V_i = 0. \tag{4}$$

Учитывая уравнения (3) и (4), уравнение (2) можно записать в виде

$$\partial_t u_i + u_k \partial_k V_i + V_k \partial_k u_i + \rho^{-1} \partial_i p' = \nu \partial_k \partial_k u_i - u_k \partial_k u_i + \partial_k \langle u_i u_k \rangle. \tag{5}$$

Для данной ячейки будем считать, что $\langle u_i u_k \rangle = \text{const}$, $V_k = \text{const}$, $\partial_i V_k = \text{const}$. Такое приближение впервые, по-видимому, использовалось в [4] в рамках модели со случайными силами (отметим, что в теории „быстрого искажения турбулентности“ используется приближение Праудмана–Бэтчелора о линейности крупномасштабной или средней скорости [3,5]). В результате принятого предположения о постоянстве макропеременных последний член в правой части (5) пропадает, третий член в левой части уравнения (5) пропадает в системе координат, двигающейся со скоростью $\mathbf{V}$, в которой мы и будем описывать динамику мелкомасштабной турбулентности. В итоге уравнение (5) приобретает вид

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j V_i + \rho^{-1} \partial_i p' - \nu \partial_j \partial_j u_i + u_j \partial_j u_i = 0. \quad (6)$$

Осуществим преобразование Фурье для мелкомасштабных компонент давления и скорости

$$p(\mathbf{x}, t) = \Sigma_k p(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \Sigma_k u_j(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (7)$$

где $\mathbf{k} = (2\pi/L)(n_1, n_2, n_3)$, $n_1, n_2, n_3 = \pm 1, \pm 2, \ldots$; L — ребро кубической ячейки, разделяющей крупномасштабное и мелкомасштабное движение.

В результате для фурье-компонент уравнение (6) примет следующий вид:

$$\partial_t u_l(\mathbf{k}, t) + u_j(\mathbf{k}, t) \partial_j V_l + i k_l \rho^{-1} p'(\mathbf{k}, t)$$
$$+ \nu k^2 u_l(\mathbf{k}, t) + i k_n \Sigma_{\mathbf{q}} u_n(\mathbf{q}, t) u_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}, t) = 0, \quad (8)$$

а уравнение (3) запишется как

$$k_l u_l(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (9)$$

Если мы умножим левую и правую части уравнения (8) на k_l, суммируем по l, то, используя уравнение (9), получим выражение

$$\rho^{-1} p' = i u_j \partial_j V_q k_q k^{-2}$$
$$- k_m k_l k^{-2} \Sigma_j u_l(\mathbf{j}, t) u_m(\mathbf{k} - \mathbf{j}, t). \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в уравнение (8), получим следующее уравнение для мелкомасштабных фурье-компонент скорости, которое уже не содержит мелкомасштабных фурье-компонент давления,

$$\partial_t u_l + u_j P_{lq} \partial_j V_q + \nu k^2 u_l + i \big[k_n \Sigma_{\mathbf{p}} u_n(\mathbf{p}, t) u_l(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t)$$
$$- k_l k_m k_j k^{-2} \Sigma_{\mathbf{p}} u_j(\mathbf{p}, t) u_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t) \big] = 0, \quad (11)$$

где $P_{lq} = \delta_{lq} - k_l k_q k^{-2}$.

Нелинейные члены в квадратных скобках могут быть преобразованы к более элегантному виду (см., например, [6]), в результате чего мы получим следующее уравнение:

$$\partial_l u_l + u_j P_{lq} \partial_j V_q + \nu k^2 u_l$$
$$= -\frac{i}{2} P_{lmn}(\mathbf{k}) \Sigma u_m(\mathbf{p}, t) u_n(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t), \quad (12)$$

где $P_{lmn} = k_m P_{ln} + k_n P_{lm}$.

Поскольку три компоненты мелкомасштабной скорости связаны условием несжимаемости (9), то удобно перейти к двум независимым компонентам мелкомасштабной скорости, направленным вдоль векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2$, ортогональных друг другу и вектору $\mathbf{k}$, как это было сделано для изотропной турбулентности [7] в отсутствие градиентов крупномасштабной скорости ∂V,

$$(\partial_t + \nu k^2) u^\gamma(\mathbf{k}, t) = a^{\gamma\mu} u^\mu$$
$$+ \Sigma_{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \Phi^{\gamma\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) u^\alpha(\mathbf{p}, t) u^\beta(\mathbf{q}, t), \quad (13)$$

где верхние индексы пробегают значение $1, 2$; нижние индексы пробегают значения $1, 2, 3$; $a^{\gamma\mu} = -\varepsilon_j^\gamma \varepsilon_m^\mu \partial_m V_j$; $\Phi^{\gamma\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -i k_m \varepsilon_j^\gamma(\mathbf{k}) \varepsilon_j^\alpha(\mathbf{p}) \varepsilon_m^\beta(\mathbf{q})$; входящие в эти формулы вектора имеют декартовы компоненты, выраженные через углы Эйлера, использованные в [7]: $\mathbf{k} = (k \cos\theta \cos\eta, k \sin\theta \cos\eta, k \sin\eta)$, где $\cos\theta = k_1/k''$, $\sin\theta = k_2/k''$, $\cos\eta = k''/k$, $k'' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

При выборе единичного вектора $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ единичный вектор $\varepsilon^1(\mathbf{k})$ вводится соотношением $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{e} \times \mathbf{k}/|\mathbf{e} \times \mathbf{k}|$, при этом $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \mathbf{k} \times \varepsilon^1(\mathbf{k})/|\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{k})|$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (\cos\theta \sin\eta, \sin\theta \sin\eta, -\cos\eta)$. Нетрудно убедиться, что $\boldsymbol{\varepsilon}^1 \times \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \mathbf{k}/k$. Связь обычных фурье-компонент мелкомасштабной скорости (с нижними индексами) с поляризованными (с верхними индексами) дается соотношением (см. [7])

$$u_i(\mathbf{k}, t) = \varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}) u^\mu(\mathbf{k}, t), \quad (14)$$

причем имеют место соотношения

$$\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}^\mu = 0, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu(\mathbf{k}) \times \boldsymbol{\varepsilon}^\lambda(\mathbf{k}) = \delta_{\mu\lambda}, \quad (16)$$

$$\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_j^\mu(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}). \quad (17)$$

С помощью замены переменных $\mathbf{u} = B\mathbf{v}$, где матрица B составлена из собственных векторов матрицы A: $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, $A\mathbf{b}_{1,2} = \lambda_{1,2} \mathbf{b}_{1,2}$, матрицу A можно привести к диагональному виду — матрице J, на диагонале которой будут стоять собственные числа λ_1, λ_2 (в общем случае к жордановой матрице [8]), само уравнение (13) в этом случае примет вид

$$(\partial_t + \nu k^2) v^\lambda = J^{\lambda\mu} v^\mu$$
$$+ (B^{-1})^{\lambda\gamma} \Sigma_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \Phi^{\gamma\alpha\beta} (B\mathbf{v})^\alpha(\mathbf{p}) (B\mathbf{v})^\beta(\mathbf{q}), \quad (18)$$

где λ_1, λ_2 определяются соотношением

$$\lambda_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q}, \quad (19)$$

где

$$P = \varepsilon_j^1 \varepsilon_m^1 \partial_m V_j + \varepsilon_j^2 \varepsilon_m^2 \partial_m V_j, \quad (20)$$

$$Q = (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^1 \partial_m V_j)(\varepsilon_l^2 \varepsilon_p^2 \partial_p V_l) - (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^2 \partial_m V_j)(\varepsilon_j^2 \varepsilon_j^1 \partial_j V_l). \quad (21)$$

Если разложить стандартным образом переменную $\boldsymbol{\partial}\mathbf{V}$ на симметричную и антисимметричную части $\partial_m V_j = S_{jm} + \Omega_{jm}$, где

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i V_j + \partial_j V_i), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i V_j - \partial_j V_i),$$

ввести единичный вектор $\mathbf{n}$ с компонентами $n_i = k_i/k$, то, используя свойства векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^\lambda$ и условие несжимаемости (4), выражение для величин P и Q можно упростить

$$P = -n_i n_j S_{ij}, \tag{22}$$

$$Q = (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^1 S_{mj})(\varepsilon_l^2 \varepsilon_p^2 S_{lp}) - (\varepsilon_j^1 \varepsilon_m^2 S_{mj})^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2, \tag{23}$$

где вектор завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ определяется стандартным образом $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}$ или $\Omega_i = 2\varepsilon_{ijk}\Omega_{kj}$, где ε_{ijk} — компоненты тензора Леви–Чевитты.

Исключив вспомогательные вектора $\boldsymbol{\varepsilon}^\lambda$, покажем, что величина Q непосредственно определяется ориентацией вектора $\mathbf{k}$ (или $\mathbf{n}$) по отношению к тензору $\boldsymbol{\partial}\mathbf{V}$. Выражение (23) можно переписать следующим образом:

$$Q = (\varepsilon_m^1 \varepsilon_l^2 - \varepsilon_l^1 \varepsilon_m^2)\varepsilon_j^1 \varepsilon_p^2 S_{mj} S_{lp} + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2. \tag{24}$$

Определяя антисимметричный тензор $\tau_{ml} = \varepsilon_m^1 \varepsilon_l^2 - \varepsilon_l^1 \varepsilon_m^2$ и выписывая члены в правой части (24), отличные от нуля, с $m \neq l$, получим

$$Q = (\tau_{12} S_{1j} S_{2p} + \tau_{13} S_{1j} S_{3p} + \tau_{23} S_{2j} S_{3p})\tau_{jp} + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2. \tag{25}$$

Нетрудно убедиться, что $\tau_{12} = n_3$, $\tau_{23} = n_1$, $\tau_{13} = -n_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} Q = {} & n_3^2(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) + n_2^2(S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31}) \\ & + n_1^2(S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32}) + 2n_1 n_2(S_{23}S_{13} - S_{12}S_{33}) \\ & + 2n_1 n_3(S_{12}S_{23} - S_{22}S_{13}) \\ & + 2n_2 n_3(S_{12}S_{13} - S_{11}S_{23}) + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2. \end{aligned}$$

В инвариантном виде имеем

$$Q = -\frac{1}{2} tr\left[(\mathbf{n} \times \mathbf{S})^2\right] + \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2, \tag{26}$$

где след тензора $tr[(\mathbf{n} \times \mathbf{S})^2] = \varepsilon_{ijk} n_j S_{kp} \varepsilon_{pab} n_a S_{bi}$.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = {} & \frac{1}{2} tr(\mathbf{CS}) \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{4}[tr(\mathbf{CS})]^2 + \frac{1}{2} tr[(\mathbf{n} \times \mathbf{S})^2] - \frac{1}{4}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $C_{ij} = n_i n_j$ и $tr(\mathbf{CS}) = C_{ij} S_{ji}$.

Таким образом, мы получили уравнение (18), которое приближенно описывает динамику мелкомасштабных поляризационных мод в условиях анизотропии крупномасштабного движения. Линейная часть этого уравнения существенно определяется значением λ_1 и λ_2.

Анализ результатов и заключение

Полученное уравнение, прежде всего его линейная часть, имеет более простой вид, чем уравнение, используемое в теории „быстрого искажения турбулентности" (см., например, [3,5]), что делает дальнейший аналитический анализ более простым. Согласно принципу подчинения Хакена [9] (частый случай теорем о центральном многообразии [10]), динамика нелинейных систем в первую очередь определяется наиболее неустойчивыми модами (в нашем случае соответствующих λ_1 по направлениям, максимизирующим λ_1). В подсеточном моделировании турбулентности используется до сих пор параметризация Смагоринского, при которой коэффициент подсеточной турбулентной вязкости ν_t определяется исключительно инвариантом тензора скорости деформации $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ji}}$: $\nu_t = c_1 L^2 S$, где c_1 — некоторая эмпирическая константа. Однако иногда лучшие результаты дает использование модуля завихренности $|\boldsymbol{\Omega}|$: $\nu_t = c_2 L^2 |\boldsymbol{\Omega}|$ [11], где c_2 — также эмпирическая константа. В рамках нашего подхода для параметризации коэффициента ν_t нужно использовать прежде всего действительную часть $(\Re(\lambda_1))_{\max}$

$$\nu_t = c_3 L^2 \big(\Re(\lambda_1)\big)_{\max}, \tag{28}$$

где максимум берется по всем направлениям вектора $\mathbf{k}$, c_3 — эмпирическая константа.

Величину $(\Re(\lambda_1))_{\max}$ можно назвать главным инвариантом тензора градиента скорости $\boldsymbol{\partial}\mathbf{V}$, поскольку именно она в первую очередь определяет величину ввода энергии от крупномасштабного движения к мелкомасштабному, за исключением областей с большой завихренностью крупномасштабного движения и малыми значениями компонент тензора $\mathbf{S}$, для которых величина $\max \Re(\lambda_1)$ мала по модулю, и мы имеем дело с двумя комплексно-сопряженными числами λ_1 и λ_2. Эта область требует специального анализа. Дальнейшее упрощение динамики мелкомасштабного движения будет предложено в следующей работе.

Список литературы

[1] *Frisch U.* Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov A.N. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[2] *Moulden T.H.* // Handbook of Turbulence. Fundamental and Applications / Ed. by W. Frost, T.H. Moulden. New York: Plenum Press. 1977. Vol. 1. Chapter 2. (Турбулентность. Принципы и применения. Пер. с англ. / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. 535 с.).

[3] *Nazarenko S., Kevlahan N.-K.R., Dubrulle B.* // Physica D. 2000. Vol. 139. P. 158–176.

[4] *Скворцов Г.Е., Тимохов Л.В.* // Вестник ЛГУ. 1980. № 13. С. 106–110.

[5] *Batchelor G.K., Proudman I.* // Q.J. Mech. Appl. Math. 1954. Vol. 7. P. 83–91.

[6] *McComb W.D.* // Rep. Prog. Phys. 1995. Vol. 58. P. 1117—1168.

[7] *Lee J.* // J. Math. Physics. 1975. Vol. 16. N 7. P. 1359–1366.

[8] *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.

[9] *Haken H.* Synergetics. An Introduction. New York: Springer Verlag, 1978. (Хакен Г. Синегетика. М.: Мир, 1980. 404 с.).

[10] *Davey A., DiPrima R.C., Stuart J.T.* // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 31. P. 17–52.

[11] *Peyret R., Taylor T.D.* Computational Methods for Fluid Flow. New York: Springer Verlag, 1983 (Перье Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.).