01;03

Упрощенное описание мелкомасштабной турбулентности

© А.М. Балонишников

Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет,
197002 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: balonalex@yahoo.co.uk

(Поступило в Редакцию 2 апреля 2003 г.)

Дано упрощенное описание мелкомасштабной неизотропной турбулентности в виде системы трех интегро-дифференциальных уравнений в одномерном импульсном пространстве или системы трех дифференциальных уравнений в частных производных в модифицированном одномерном физическом пространстве. В первом случае неизвестными функциями являются три коэффициента разложения неустойчивой поляризационной фурье-компоненты пульсационной составляющей скорости в ряд Тейлора около наиболее неустойчивого направления; независимыми переменными являются модуль волнового вектора и временна́я координаты.

Введение

Проблема редукции в развитой турбулентности, описываемой уравнениями Навье–Стокса, к системе уравнений с пониженным числом степеней свободы исключительна важна не только с теоретической точки зрения, но и для практических расчетов турбулентных течений в различных приборах и устройствах. Особенно большое число степеней свободы приходится на мелкомасштабную часть турбулентности — от энергосодержащих вихрей до диссипативных вихрей. Современные физические подходы к описанию мелкомасштабной турбулентности содержатся в [1,2].

Один из подходов в построении крупномасштабных моделей турбулентности несжимаемой жидкости состоит в разложении полей скорости и давления на крупномасштабную и мелкомасштабную части (пульсации). Если бы уравнения для мелкомасштабных компонент удалось решить хотя бы приближенно, то, подставив эти решения в уравнения для крупномасштабных компонент, мы получили бы уравнения только для крупномасштабных компонент. До сих пор такой подход был реализован в линейном приближении только с использованием концепции „случайных сил “ [3,4], характеристики которых задаются дополнительно.

В данной работе впервые, насколько известно автору, предложен подход, который, хотя и не позволяет в нынешнем варианте явно выразить пульсационные составляющие через крупномасштабные поля, однако делает задачу „замыкания турбулентности“ квазиодномерной, а не трехмерной.

Вывод основных уравнений в импульсном пространстве

Исходным для анализа будет уравнение для фурье-компонент поляризационных составляющих скорости [5]

$$\left(\partial_t + \nu k^2\right) v^\lambda = J^{\lambda\alpha} v^\alpha + \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\lambda\gamma} \Sigma_{\alpha,\beta,\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \Phi^{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{Bv})^\alpha(\mathbf{p},t)(\mathbf{Bv})^\beta(\mathbf{q},t). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — волновые векторы, три декартовы координаты которых принимают следующий ряд значений: $k_i, p_i, q_i = \pm 2\pi n/L$, где $i = 1, 2.3$; $n = 1, 2, 3, \ldots$; L — масштаб разделяющий мелкомасштабное движение и крупномасштабное; верхние поляризационные индексы $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ принимают значения 1 и 2; $-\nu$ — коэффициент кинематической молекулярной вязкости; $-\mathbf{v}$ — двумерный поляризационный вектор скорости $\mathbf{v}(k, \theta, \eta, t)$, который ищется в сферической системе координат, использованной в [6], в ней $\mathbf{k} = (k\cos\theta\cos\eta, k\sin\theta\cos\eta)$; $\mathbf{J}$ — матрица, имеющая диагональный вид; $\mathbf{B}$ — матрица преобразования поляризационных компонент мелкомасштабной скорости.

На диагонали матрицы $\mathbf{J}$ стоят собственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы $\mathbf{A}$ линейной части (без вязких членов) исходных уравнений [5]

$$\lambda_{1,2} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{Sn}/2 \pm \sqrt{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{Sn})^2/4 + \mathrm{tr}\,[(\mathbf{k}\times\mathbf{S})^2] - (\mathbf{n}\cdot\Omega)^2/4}, \quad (2)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$; $\mathbf{S}$ — тензор скорости деформации крупномасштабной скорости с компонентами $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i)$, U_j — компонента вектора крупномасштабной скорости при $j = 1, 2, 3$; $\partial_j U_i$ означает частотную производную i-компоненты скорости по j-й пространственной декартовой координате; tr — след матрицы; $\mathbf{\Omega}$ — вектор крупномасштабной завихренности $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{U}$.

Элементы матрицы $\mathbf{A}$ определяются соотношением $A^{\gamma\mu} = -\varepsilon_j^\gamma \varepsilon_m^\mu \partial_m U_j$ (здесь и далее повторяющимися индексами подразумевается суммирование); $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2$ — два поляризационных единичных вектора, перпендикулярных вектору $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (\cos\theta\sin\theta, \sin\theta\sin\eta, -\cos\eta)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^1(-\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{k})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^2(-\mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}^2(-\mathbf{k})$, что приводит к соотношениям $v^1(-\mathbf{k}) = -v^{1*}(\mathbf{k})$ и $v^2(-\mathbf{k}) = v^{2*}(\mathbf{k})$ из-за действительности скорости;

$$\Phi^{\gamma\alpha\beta} = -ik_m \varepsilon_j^\gamma(\mathbf{k}) \varepsilon_j^\alpha(\mathbf{p}) \varepsilon_m^\beta(\mathbf{q}).$$

В предлагаемом подходе крупномасштабная скрость характеризуется постоянной составляющей, которая устраняется преобразованием Галилея и постоянным тензором градиента скорости **dU** при рассмотрении динамики мелкомасштабной скорости в отличие от [4], где предполагается линейность крупномасштабной скорости. Поэтому уравнения для мелкомасштабной скорости получаются разными в двух подходах (детали см. в [5]).

Согласно принципу подчинения Хакена [8], неустойчивые моды, являясь параметрами порядка, подчиняют устойчивые моды. Можно пойти дальше этого принципа, предположив, что наибольший вклад в энергетику процесса дают наиболее неустойчивые моды, которых нужно описывать с наибольшей точностью. В [8], кроме того, предполагается, что для стабилизации неустойчивых мод необходимы кубические члены, а выделение наиболее неустойчивых мод осуществляется оператором типа лапласиана. В отличие от этого подхода в данной работе используется более простой метод, состоящий в использовании разложения всех переменных как зависимых, так и независимых в ряды Тэйлора по двум угловым переменным около точек, соответствующих наиболее быстро растущим фурье-гармоникам скорости.

Для иллюстрации метода рассмотрим течение типа Куэтта, в котором у тензора градиента крупномасштабной скорости имеется только одна отличная от нуля переменная $S_{12} = \partial_1 U_2$. В этом случае имеем $\lambda_1 = 1/2\sin(2\theta)\cos^2\eta$, $\lambda_2 = 0$. Величина λ_1 принимает одинаковое максимальное значение в двух точках: $\theta_1 = \pi/4$, $\eta_1 = 0$ и $\theta_2 = 5\pi/4$, $\eta_2 = 0$. Ограничиваясь несколькими членами ряда Тэйлора функции λ_1 вблизи этих точек, получим следующее разложение:

$$\lambda_1 = \frac{S}{2}\left[1 - 2(\theta - \theta_1)^2 - (\eta - \eta_1)^2\right], \tag{3}$$

где $i = 1, 2$.

Соответственно разложения элементов матриц **B** и $\mathbf{B}^{-1}$, составленных из собственных векторов исходной матрицы **A**, имеют вид $b_{11} = 1$, $b_{22} = 1$ (имеется некоторый произвол в выборе матрицы **B**, так как собственные векторы определены с точностью до множителя), $b_{21} = -(\eta - \eta^3/6)[1 + 2(\theta - \theta_1)]$, $b_{12} = -(\eta - \eta^3/6)[1 - 2(\theta - \theta_1)]$.

Элементы обратной матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ равны

$$b_{11}^{-1} = 1 + \eta^2, \qquad b_{22}^{-1} = 1 + \eta^2,$$

$$b_{12}^{-1} = \left(\eta + \frac{7}{6}\eta^3\right)\left[1 - 2(\theta - \theta_i)\right],$$

$$b_{21}^{-1} = \left(\eta + \frac{7}{6}\eta^3\right)\left[1 + 2(\theta - \theta_i)\right].$$

В исходное уравнение (1) для модифицированных с помощью матрицы B поляризационных фурье-компонент скорости **v** входят под знаком суммы волновые векторы $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ ($\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$), которые имеют сферические координаты соответственно (k, θ_k, η_k), (p, θ_p, η_p) и (q, θ_q, η_q).

Нетрудно показать, что в сферической системе координат используемой здесь как и в [7],

$$\operatorname{tg}\theta_q = \frac{k\sin\theta_k\sin\eta_k - p\sin\theta_p\cos\eta_p}{k\cos\theta_k\cos\eta_k - p\cos\theta_p\cos\eta_p}, \tag{4}$$

$$\sin\eta_q = (k\sin\eta_k - p\sin\eta_p)/q, \tag{5}$$

где

$$q = \sqrt{\begin{matrix} k^2 + p^2 - 2kp\cos\eta_k\cos\eta_p\cos(\theta_k - \theta_p) - \\ -2kp\sin\eta_k\sin\eta_p \end{matrix}}.$$

Тогда разложение θ_q и η_q вблизи углов θ_i и η_i имеют вид

$$\theta_q = \theta_i + \frac{k}{k-p}(\theta_k - \theta_i) + \frac{p}{p-k}(\theta_p - \theta_i),$$

$$\eta_q = \frac{l}{|k-p|}\eta_k - \frac{p}{|k-p|}\eta_p.$$

Из физических соображений $q = |k - p| \le 2\pi\sqrt{3}/L$, $p \le 2\pi\sqrt{3}/L$, где L — масштаб, разделяющий пульсации и крупномасштабное движение.

В моделировании большими вихрями под L можно подразумевать шаг разностной сетки. Из вида приведенных и последующих членов рядов Тэйлора, опущенных здесь, можно сделать вывод, что предложенная аппроксимация будет плохой при больших значениях $k/(k-p)$ и, более того, очень неудачной при $kL \gg 1$, т.е. для мелкомасштабных вихрей, чей размер много меньше размера сетки. К счастью, из эксперимента известно, что в рассматриваемом диапазоне (масштаб сетки L меньше интегрального масштаба турбулентности) спектры напряжений Рейнольдса и энергии уменьшаются степенным образом для инерционного интервала (показатель степени близок к $-5/3$ и -2,) и экспоненциально для диссипативных вихрей [1,2]. Таким образом, если решения уравнений модели дадут не слишком большие вклады от этих вихрей в спектры энергий и напряжений Рейнольдса, то это не существенно скажется на динамике самых крупных из мелкомасштабных вихрей, дающих основной вклад в подсеточные напряжения Рейнольдса.

Следуя принципу подчинения Хакена [8], мы можем положить устойчивые и нейтральные (в рассматриваемом случае) моды $v^2 = 0$. Вблизи самых неустойчивых направлений, определяемых углами θ_i, η_i, наибольший вклад дадут нелинейные члены с коэффициентами

$$\Phi^{111} \approx ik\frac{p}{p-k}(\theta_k - \theta_p),$$

$$\Phi_{112} \approx -ik\left(\frac{k}{|k-p|}\eta_k - \frac{p}{|k-p|}\eta_p - \eta_k\right),$$

остальные коэффициенты $\Phi^{\alpha,\beta,\gamma}$ являются полиномами более высоких степеней по угловым переменным. Следуя работе [7], при $L \to \infty$ мы можем перейти от суммы к интегралу по волновым числам в (1)

$$(2\pi/L)^3\Sigma_k \to \int d^3k.$$

Используя ранее полученные разложения в ряд Тэйлора, мы получим следующее приближенное уравнение для неустойчивых мод v^1:

$$(\partial_t + \nu k^2)v^1 = \lambda_1 v^1 + ik\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{2\pi/L}^{\infty} p^2 dp$$

$$\times \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\eta_p d\eta_p \int\limits_{\theta'_p} d\theta_p Z v^1(\mathbf{p}) v^1(\mathbf{q}), \quad (6)$$

где θ'_p — углы, соответствующие неустойчивым модам.

$$\theta'_p \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$\lambda_1 = \frac{S}{2}\left[1 - 2(\theta - \theta_j)^2 - (\eta - \eta_j)^2\right]; \quad j = 1, 2;$$

$$Z = -\frac{p}{k-p}(\theta_k - \theta_j) - \frac{p}{k-p}(\theta_p - \theta_j)$$

$$+\left(\frac{k}{|k-p|}\eta_k - \frac{p}{|k-p|}\eta_p - \eta_k\right)\left(\frac{k}{|k-p|}\eta_k - \frac{p}{|k-p|}\eta_p\right).$$

Удобно используемую в нашей работе до этого места сферическую систему координат [7] можно видоизменить в „полусферическую", в которой по-прежнему сохраняется связь с декартовой системой координат $\mathbf{k} = (k\cos\theta\cos\eta, k\sin\theta\cos\eta, k\sin\eta)$, однако в нижней полуплоскости величина k пусть принимает отрицательные значения, диапазон изменения угла η сохраняется

$$\eta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

а диапазон изменения угла θ уменьшается в два раза $\theta \in [0, \pi]$. В этой „полусферической" системе координат функция λ_1 имеет максимум только в точке θ_1, η_1. Тогда интегралы в уравнении (6) изменят пределы интегрирования

$$(\partial_t + \nu k^2)v^1 = \lambda_1 v^1 + ik\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} p^2 dp$$

$$\times \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\eta d\eta \int\limits_{0}^{\pi/2} d\theta Z v^1(\mathbf{p}) v^1(\mathbf{q}). \quad (6)$$

Поскольку мы ищем мелкомасштабную скорость, то предполагаем, что крупномасштабные гармоники скорости тождественно равны нулю

$$v^1(\mathbf{p}) = 0, \quad |\mathbf{p}| < \frac{2\pi}{L}; \quad v^1(q) = 0, \quad |\mathbf{q}| < \frac{2\pi}{L};$$

$$v^1(\mathbf{k}) = 0, \quad |\mathbf{k}| < \frac{2\pi}{L}.$$

Метод решения интегрального уравнения путем разложения ядра и неизвестной функции в ряд Тэйлора около некоторой точке известен (см., например, [9]), хотя применялся, по-видимому, достаточно редко. Здесь мы применяем этот метод для интегродифференциального уравнения и лишь для части переменных (в нашем случае только для угловых переменных). Предположив, что точка θ_1, η_1 максимума функции λ_1 будет являться также точкой максимума v^1 по угловым переменным, будем иметь следующие разложения:

$$v^1(k, \theta_k, \eta_k, t) = v_0(k,t) + c(k,t)(\theta_k - \theta_1)^2$$

$$+ d(k,t)\eta_k^2 + f(k,t)\eta_k(\theta_k - \theta_1). \quad (8)$$

Соответственно

$$v^1(q, \theta_q, \eta_q, t) = v_0(q,t)$$

$$+ c(q,t)\left[\frac{p}{p-k}(\theta_p - \theta_1) + \frac{k}{k-p}(\theta_k - \theta_i)\right]^2$$

$$+ d(q,t)d(q,t)\left(\frac{k}{|k-p|}\eta_k - \frac{p}{|k-p|}\eta_p\right)^2$$

$$+ f(q,t)\left[\frac{p}{p-k}(\theta_p - \theta_1) + \frac{k}{k-p}(\theta_k - \theta_1)\right]\frac{k\eta_k - p\eta_p}{|k-p|}. \quad (9)$$

Подставляя разложения в ряды Тэйлора в приближенное уравнение (6), выполнив необходимые интегрирования по угловым переменным и приравняв коэффициенты в обеих частях полученного уравнения при степенях угловых переменных η_k и $(\theta_k - \theta_1)$, мы получим систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $v_0(k,t), c(k,t), d(k,t), f(k,t)$ (из уравнения для f следует, что $f \equiv 0$)

$$\left(\partial_t + \nu k^2 - \frac{S}{2}\right)v_0 = ik\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\left[\frac{\pi\alpha_1}{2}v_0(p)v_0(k-p)\frac{p^4}{(k-p)^2}\right.$$

$$+ \alpha_1\beta_1 c(p)v_0(k-p)\frac{p^4}{(k-p)^2}$$

$$+ \frac{\pi}{2}\alpha_2 d(p)v_0(k-p)\frac{p^4}{(k-p)^2}$$

$$+ \alpha_1\beta_1 v_0(p)c(k-p)\frac{p^6}{(k-p)^4}$$

$$+ \alpha_1\beta_2 c(p)c(k-p)\frac{p^6}{(k-p)^4} + \alpha_2\beta_1 d(p)c(k-p)\frac{p^6}{(k-p)^4}$$

$$+ \frac{\pi}{2}\alpha_2 v_0(p)d(k-p)\frac{p^6}{(k-p)^4} + \beta_1\alpha_2 c(p)d(k-p)\frac{p^6}{(k-p)^4}$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\alpha_3 d(p)d(k-p)\frac{p^6}{(k-p)^4}\right], \quad (10)$$

$$\left(\partial_t + \nu k^2 - \frac{S}{2}\right)C + Sv_0 = ik^3\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^6}{(k-p)^6}\left[\alpha_1 \frac{\pi}{2} v_0(p)c(k-p)\right.$$
$$\left. + \alpha_1\beta_1 c(p)c(k-p) + \frac{\pi}{2}\alpha_2 d(k)c(k-p)\right], \qquad (11)$$

$$\left(\partial_t + \nu k^2 - \frac{S}{2}\right)d + \frac{S}{2}v_0 = ik^3\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^6}{(k-p)^6}\left[\frac{\pi}{2}\alpha_1 c(p)d(k-p)\right.$$
$$\left. + \alpha_1\beta_1 c(p)d(k-p) + \frac{\pi}{2}\alpha_2 d(k)d(k-p)\right], \qquad (12)$$

где

$$\alpha_i = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta^{2i}\cos\eta d\eta, \quad \beta_i = \int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^{2i} d\theta,$$

откуда $\alpha_1 \approx 0.93$, $\alpha_2 \approx 0.96$, $\alpha_3 \approx 1.29$, $\beta_1 \approx 0.32$, $\beta_3 \approx 0.12$, если $m = (2\pi/L)\sqrt{3}$ — модуль наименьшего волнового числа, из физических соображений из интегралов должна вырезаться область $|k-p| < m$ и $|p| < m$, поскольку эта область соответствует крупномасштабному движению. Решить вышенаписанную систему уравнений требует уже гораздо меньше компьютерного времени, чем исходную систему, из-за одномерности задачи в пространстве волновых чисел даже для очень больших сеточных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_L = SL^2/\nu$. Полученную систему интегродифференциальных уравнений можно свести к безразмерному виду, осуществив преобразование $K = kL$, $T = tS/L$, $D = d/(SL)$, $V(K) = v_0/(SL)$, $C(K) = c/(SL)$. Если дополнительно ввести новые переменные $G = D/k^4$, $Q = C/k^4$, $F = V/k^2$, то мы можем избавиться от волновых чисел в знаменателях подынтегральных функций

$$\left(\partial_T + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}K^2 - \frac{1}{2}\right)K^2 F = iK(2\pi)^{-3}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dP\left[\frac{\pi}{2}\alpha_1 F(P)F(K-P)P^6 + \alpha_1\beta_1 Q(p)F(k-p)p^8\right.$$
$$+ \frac{\pi}{2}\alpha_2 p^8 G(p)F(K-P) + \alpha_1\beta_1 P^8 F(P)Q(K-P)$$
$$+ \alpha_1\beta_2 P^{10}Q(P)Q(K-P)\alpha_2\beta_1 P^{10}G(P)Q(K-P)$$
$$+ \frac{\pi}{2}\alpha_2 P^8 F(P)G(K-P) + \beta_1\alpha_2 P^{10}Q(P)G(K-P)$$
$$\left. + \frac{\pi}{2}\alpha_3 P^{10}G(P)G(K-P)\right), \qquad (13)$$

$$\left(\partial_T + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}K^2 - \frac{1}{2}\right)K^2 Q + F = iK(2\pi)^{-3}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2}\alpha_1 P^6 F(P)Q(K-P) + \alpha_1\beta_1 P^8 Q(P)Q(K-P)\right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2}\alpha_2 P^8 G(P)Q(K-P)\right], \qquad (14)$$

$$\left(\partial_T + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}K^2 - \frac{1}{2}\right)K^2 G + \frac{1}{2}F = iK(2\pi)^{-3}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2}\alpha_1 P^6 F(P)G(K-P) + \alpha_1\beta_1 P^8 Q(P)G(K-P)\right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2}\alpha_2 P^8 G(P)G(K-P)\right]. \qquad (15)$$

Мы получили систему из трех интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F(K,T)$, $Q(K,T)$, $G(K,T)$.

Вывод основных уравнений в физическом пространстве

Осуществим преобразование фурье-функций $F(K,T)$, $G(K,T)$, $Q(K,T)$ как фунций переменной K [10]

$$\Phi(F) \equiv g(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(K)e^{-i\xi K}dK. \qquad (16)$$

Обратное преобразование Фурье определим как

$$F(K) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi K}d\xi. \qquad (17)$$

Пусть свертка определена как

$$F(K) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(K-P)F_2(P)\,dP. \qquad (18)$$

Тогда по хорошо известной теореме о свертке имеем соотношение [10]

$$\Phi(F) = \Phi(F_1)\Phi(F_2). \qquad (19)$$

Известно также [10], что умножение на $(-iK)$ исходной функции сводится к дифференцированию фурье-преобразованной функции

$$\partial_\xi \Phi(F) = \Phi\big(-iKF(K)\big). \qquad (20)$$

Если применить преобразование Фурье (15) к обеим частям системы уравнений (12)–(14), то, используя два вышеупомянутых свойства преобразования Фурье, получим систему в частных производных

$$\left(\partial_T - \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\,\partial_\xi^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_\xi^2 X = (2\pi)^{-3}\partial_\xi$$
$$\times\left(-\frac{\pi}{2}\,\alpha_1 X\partial_\xi^6 X + \alpha_1\beta_1 X\partial_\xi^8 Y + \frac{\pi}{2}\,\alpha_2 X\partial_\xi^8 Z\right.$$
$$+\,\alpha_1\beta_1 Y\partial_\xi^8 X - \alpha_1\beta_2 Y\partial_\xi^{10} Y - \alpha_2\beta_1 Y\partial_\xi^{10} Z$$
$$\left.+\,\frac{\pi}{2}\,\alpha_2 Z\partial_\xi^8 X - \beta_1\alpha_2 Z\partial_\xi^{10} Y - \frac{\pi}{2}\,\alpha_3 Z\partial_\xi^{10} Z\right), \qquad (21)$$

$$\left(\partial_T - \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\,\partial_\xi^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_\xi^2 Y - X = (2\pi)^{-3}\partial_\xi$$
$$\times\left(-\frac{\pi}{2}\,\alpha_1 Y\partial_\xi^6 X + \alpha_1\beta_1 Y\partial_\xi^8 Y + \frac{\pi}{2}\,\alpha_2 Y\partial_\xi^8 Z\right), \qquad (22)$$

$$\left(\partial_T - \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\,\partial_\xi^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_\xi^2 Z - \frac{1}{2}X = (2\pi)^{-3}\partial_\xi$$
$$\times\left(-\frac{\pi}{2}\,\alpha_1 Z\partial_\xi^6 X + \alpha_1\beta_1 Z\partial_\xi^8 Y + \frac{\pi}{2}\,\alpha_2 Z\partial_\xi^8 Z\right), \qquad (23)$$

где $\Phi(F) = X(\xi, t)$, $\Phi(Q) = Y(\xi, t)$, $\Phi(G) = Z(\xi, t)$ — неизвестные функции.

Поскольку модуль безразмерного волнового числа для пульсаций $|k| \geq 2\pi\sqrt{3}$, с другой стороны, $|\mathbf{K}| = (2\pi/l)\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$, где $n_x = 1, 2, 3, \ldots$; $n_y = 1, 2, 3, \ldots$; $n_z = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, $|\mathbf{K}| = (2\pi/l)\sqrt{3}$, откуда $l = 1$, т.е. $\xi \in [0, 1]$ при решении системы уравнений (20)–(22).

По видимому, нужно наложить следующие граничные условия при решении системы уравнений (20)–(22):

$$X(0, T) = Y(0, T) = Z(0, T)$$
$$= X(1, T) = Y(1, T) = Z(1, T) = 0, \qquad (24)$$

$$\partial_\xi X(0, T) = \partial_\xi Y(0, T) = \partial_\xi Z(0, T) = \partial_\xi X(1, T)$$
$$= \partial_\xi Y(1, T) = \partial_\xi Z(1, T) = 0. \qquad (25)$$

Поскольку при поставленных граничных условиях (24)–(25) система уравнений (20)–(22) будет вырождаться на границе, то дополнительных граничных условий на более высокие производные накладывать не нужно.

Следует отдельно рассмотреть вопрос о постановке периодических граничных условий, поскольку при получении системы уравнений (21)–(23) использовались ряды Фурье.

Заключение

В данной работе показано, что трехмерные уравнения пульсаций скорости можно приближенно свести к системе трех одномерных уравнений. Как и для известного оригинального уравнения Бюргерса (с источником) [11], следует ожидать, что у полученной системы может быть несколько аттракторов. Из этих аттракторов нужно отобрать те, которые даудут максимум по угловым переменным неустойчивой моде $v^1(\mathbf{k}, t)$, чтобы модель была непротиворечивой. Тогда можно надеяться, что полученные спектры энергии и напряжений Рейнольдса будут согласовываться с экспериментами, а сам подход может быть использован для подсеточного моделирования развитой турбулентности. Кроме того, автор надеется, что полученные решения подтвердят или опровергнут гипотезу об „отрицательной диффузии" удельной скорости диссипации турбулентной энергии [12]. Исследовать уравнения можно как численно, так и численно-асимптотически при $\mathrm{Re}_L \to \infty$, что соответствует развитой турбулентности. Возможно, что методы ренормализационной группы [13], эффективные для однородной изотропной турбулентности, будут полезны и для неоднородной турбулентности в построении приближенных решений уравнений модели. Включение в рассмотрение второй составляющей мелкомасштабной скорости v^2 не слишком усложнит уравнения модели и, возможно, потребуется для описания ядер когерентных вихрей — областей с преобладанием крупномасштабной завихренности над сдвигом [14]. Подход естественным образом обобщается на магнитную гидродинамику и, возможно, на другие типы турбулентных течений, в том числе сжимаемых жидкостей и газов.

Список литературы

[1] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика. Т 2. СПб.: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.

[2] *Frisch U.* Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: University Press, 1995. 648 p.

[3] *Скворцов Г.Е.* // Вестник ЛГУ. 1979. Т. 13. Вып. 3. С. 94–98.

[4] *Nazarenko S., Kevlahan N.K.-R., Dubrulle B.* // Physica D. 2000. Vol. 139. P. 158–164.

[5] *Балонишников А.М.* // ЖТФ. 2002. Т. 73. Вып. 10. С. 000.

[6] *Lee. J.* // J. Math. Phys. 1975. Vol. 16. N 7. P. 1359–1366.

[7] *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 254 с. (Bryano A.D. Local Method of Nonlincar Analysis of Differential Equations. Berlin: Springer Verlag, 1989. 268 p.).

[8] *Haken H.* Synergetics. An Introduction. Berlin: Springer Verlag, 1978. 398 p. (Хакен Г. Синергетика. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 404 с.).

[9] *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. Киев.: Наукова думка, 1986. 369 с.

[10] *Mathews Jon, Walker R.L.* Mathematical Methods of Physics. New York: W.A. Benjamin, inc., 1964. 368 p. (Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972).

[11] *Bargers J.M.* // Advances in Appl. Mech. 1948. Vol. 1. P. 171–250.
[12] *Balonishnikov A.M.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. N 2. P. 1390–1394.
[13] *Adzhemyan L.Ts., Antonov N.V., Vasiliev A.N.* Field Theoretical Renolmalization Group in Fully Developed Turbulence. London: Gordon and Breach Publ., 1999. 354 p.
[14] *Dubief Y., Delcayre F.* // J. Turbulence. 2000. Vol. 1. P. 2–22. (http://jot.iop.org).