

01;04

Учет ионизации и рассеяния при моделировании разряда в скрещенных полях

© А.Ю. Коваленко, Ю.А. Коваленко

Государственное унитарное предприятие „Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина“,
111250 Москва, Россия
e-mail: arkov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 3 апреля 2003 г.)

Рассматривается одномерная математическая модель, позволяющая рассчитывать характеристики разряда в скрещенных электрическом и магнитном полях. Одно из применений модели возможно для электрореактивных двигателей (ЭРД) с замкнутым, или азимутальным, дрейфом электронов.

Введение

В основе двигателей с замкнутым, или азимутальным, дрейфом электронов лежит принцип ускорения ионов самосогласованным электрическим полем, которое создается в плазме вследствие резкого уменьшения поперечной подвижности электронов в магнитном поле. Отличительная особенность электрического разряда в данных двигателях состоит в том, что он горит в скрещенных электрическом и магнитном полях ($E \perp H$), при этом ионная компонента плазмы является немагнитной. Магнитное поле имеет главным образом поперечную компоненту, а электрическое — продольную (рис. 1). Холловский ток при этом оказывается замкнутым азимутально. Его наличие может приводить к полному вытеснению из плазмы внешнего магнитного поля. Нетрудно убедиться, что динамика электронов в пограничном слое между магнитным полем и катодной плазмой является бесстолкновительной, так как при характерной плотности нейтральных атомов порядка 10^{13} см^{-3} и полном сечении столкновений около $3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ длина свободного пробега составляет $\sim 30 \text{ см}$, а длина канала двигателя, как правило, не превышает 5 см (ларморовский радиус электрона $\sim 0.34 \text{ см}$ при напряжении разряда 100 В и магнитном поле 100 Ое).

Постановка задачи

В работе рассматривается „квазibesстолкновительная“ модель слоя пространственного заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях. Впервые подобная задача была рассмотрена в [1], где исследовался случай, когда все частицы плазмы, входя в пограничный слой, имели одну и ту же начальную скорость, перпендикулярную к границе слоя. Однако в отличие от постановки задачи для двигателей с анодным слоем (ДАС) ионы не поступали в слой с анода, а двигались совместно с электронами из катодной плазмы. Были получены решения для распределения потенциала, магнитного поля, концентрации и скоростей по слою. Из решения, в частности, следовало, что на анодной границе концентрация частиц обращается в бесконечность.

Отличительной особенностью ДАС является возможность ускорения ионного пучка без ограничения плотности тока пространственным зарядом, что было продемонстрировано в [2]. В [3] была рассмотрена задача о формировании слоя пространственного заряда, образующегося в поперечном магнитном поле при инжекции ионов с анода, а электронов — с катода в режиме ограничения тока пространственным зарядом. Показано, что возможно два класса решений, различающихся зависимостью продольной скорости электронов от координаты и параметрами катодной плазмы, из которой в слой поступают электроны. Первый класс решений (E -слой) характерен тем, что электроны ускоряются в продольном направлении вблизи катода и тормозятся вблизи анода. Отличительной чертой второго класса решений (H -слой) является торможение электронов в продольном направлении во всей области слоя от катода до анода. Концентрация катодной плазмы для E -слоя в $\sqrt{\varphi_0/\varphi_n}$ больше, чем для H -слоя (φ_0 — разность потенциалов в слое; φ_n — начальная энергия, с которой электроны поступают в слой из катодной плазмы).

Кроме того, при достаточно больших плотностях токов ионов и электронов, значительно превышающих плотности тока Ленгмюра, размер E -слоя оказывается

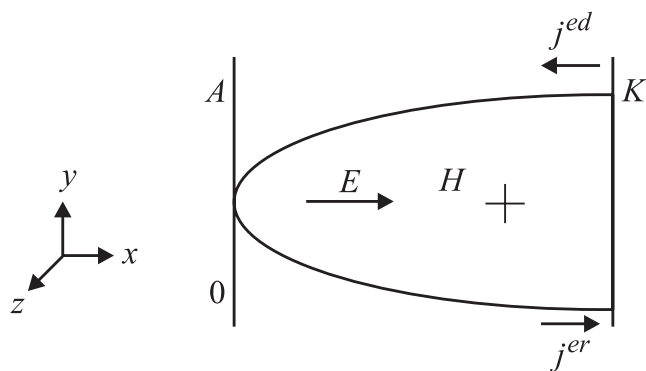


Рис. 1. Слой пространственного заряда.

много меньше величины ларморовского радиуса электрона. Размер H -слоя близок к величине ларморовского радиуса электронов. В ходе решения в [3] не учитывалось влияние столкновений и ионизации на движение ионов и электронов. Данная статья является развитием работы [3].

Математическая модель

Рассмотрим слой пространственного заряда, формирующегося между металлическим анодом с потенциалом φ_0 и плазмой, потенциал которой равен 0 (рис. 1). Из катодной плазмы в слой поступает поток электронов с начальной энергией φ_n и плотностью тока j_0 .

Металлический анод (эквипотенциальный) расположен вплотную к точке „отсечки“, где продольная скорость электронов равна 0 ($V_x^e = 0$), а поперечная скорость электронов

$$V_y^e = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_a^2} \right), \quad \gamma_a = 1 + \frac{e(\varphi_0 + \varphi_n)}{mc^2}, \quad (1)$$

где c — скорость света, e — заряд, m — масса электрона.

Испытав „отсечку“ благодаря действию поперечного магнитного поля электроны, не принявшие участия в столкновениях, возвращаются на катод с плотностью тока j_c , испытавшие столкновения считаются „выброшенными“ на анод [3] и не учитываются в модели.

Сквозь анод в слой поступает поток газа с плотностью тока $n_g^0 \cdot V_g$ (n_g^0 — концентрация, V_g — скорость нейтралов), который ионизируется в слое в результате столкновений с электронами. В итоге в катодную плазму влетает поток ионов и поток газа с плотностью тока $n_g^c \cdot V_g$ (n_g^c — концентрация нейтралов на катодной границе плазмы). Магнитное поле на аноде равно внешнему H_0 и уменьшается к катоду благодаря влиянию поперечного, холловского тока электронов. Электрическое поле на катоде равно 0, так как катодом является граница квазинейтральной плазмы.

В отличие от [3] для описания данной задачи считаем необходимым рассмотреть уравнения непрерывности для потоков заряженных частиц и потока газа. Кроме того, интегрирование полученной системы уравнений мы будем проводить с анода, что потребует соответствующих изменений в уравнениях, описывающих задачу.

Поток электронов, стартуя с катода, достигает анода и затем движется в обратном направлении. Поэтому можно рассматривать два потока электронов: прямой j^{ed} и обратный j^{er} . Направление движения обратного потока электронов совпадает с положительным направлением оси x , а направление движения прямого потока противоположно направлению оси x в выбранной системе координат.

Тогда уравнения непрерывности для j^{ed} и j^{er} с учетом одномерности задачи (все переменные зависят только от

оси x) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} j^{ed} &= z_t \cdot n^{ed}(x) + z_k \cdot n^{ed}(x) \\ z_t &= \langle \sigma_t \cdot v^e \rangle = \sigma_t (V^e(x)) V^e(x), \\ \frac{d}{dx} j^{er} &= -z_t \cdot n^{er}(x) - z_k \cdot n^{er}(x) \\ z_k &= \langle \sigma_k \cdot v^e \rangle = \sigma_k (V^e(x)) V^e(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где z_t — частота рассеяния электрона на нейтральных атомах, v^e — скорость электрона, z_k — частота кулоновского рассеяния, σ_t — сечение рассеяния электрона на нейтральных атомах, σ_k — сечение кулоновского рассеяния электронов, $V^e(x)$ — средняя скорость электрона в точке наблюдения x .

В силу закона сохранения энергии и обратимости задачи о движении электронов в электрических и магнитных полях скорость у электронов прямого и обратного потока одинакова в точке наблюдения x , компоненты скорости V_y^e совпадают по величине и направлению, а компоненты скорости V_x^e различаются только направлением. Учитывая это, из системы (2) следует, что

$$j_x^{ed} \cdot j_x^{er} = \text{const} = j_x^e(0)^2,$$

так как при $x = 0$ плотности прямого и обратного потока электронов совпадают.

В ходе решения задачи мы будем задавать значения функций на аноде, но величина полной плотности электронного тока на аноде $j_x^e(0)$ заранее неизвестна, так как электроны поступают в слой из катодной плазмы с плотностью потока j_0 . Решение системы (2) позволяет связать величины j_0 и $j_x^e(0)$ через полученное для выбранного $j_x^e(0)$ решение с обратной плотностью электронного тока на катоде — $j_x^e(x_c)$.

Используя приведенные выше рассуждения легко показать, что суммарная плотность электронов в точке x равна

$$\begin{aligned} n_e(x) &= n^{ed}(x) + n^{er}(x) \\ &= j_x^2(0) \left(i^{er}(x) + \frac{1}{i^{er}(x)} \right) / |V_x^e(x)|, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$i^{er}(x) = \frac{j_x^{er}}{j_x^e(0)}.$$

Таким образом, для построения замкнутой системы уравнений достаточно использовать только уравнение непрерывности для обратного потока электронов.

В [3] ионы поступали в слой с анодной поверхности. Здесь мы будем считать, что с анодной поверхности поступает в слой поток газа, который ионизируется электронами.

В результате ионизации происходит уменьшение плотности потока газа при его движении от анода к катоду.

Это „выгорание“ газа можно найти, интегрируя уравнение непрерывности,

$$\frac{dj_g(x)}{dx} = -z_i(x) \cdot n_e(x), \quad j_g(0) = j_g^0, \quad (4)$$

где $j_g(x)$ — плотность потока нейтралов, $n_e(x)$ — концентрация электронов, j_g^0 — плотность потока нейтралов на аноде.

Ионы, образовывавшиеся в результате ионизации газа в слое двигаются к катоду без столкновений под действием электрического поля. Будем считать, что магнитное поле не влияет на движение иона. В этом случае плотность пространственного заряда ионов в точке наблюдения выражается хорошо известным интегралом от точки рождения ионов до точки наблюдения.

Для упрощения задачи и сведения ее к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (вместо решения системы интегродифференциальных уравнений) применим для рассмотрения движения ионов хорошо известный метод трубок тока. Для решения задачи необходимо использовать также уравнения движения электронов, уравнения Пуассона и уравнение для магнитного поля. Необходимо также учесть замену переменных вида $V_x^e = dx/dt$. Рассматриваемая задача стационарная и при введении замены $V_x^e(x) = dx/dt$ следует помнить, что t не является временем в обычном понимании. Ионы проходят расстояние dx за гораздо большее время. И если dx в уравнениях для ионов и электронов одинаково, то

$$dx = V_x^+(x) dt^+ = V_x^e \cdot dt \quad \text{и} \quad dt^+ = \frac{V_x^e(x)}{V_x^+(x)} dt. \quad (5)$$

где $V_x^+(x)$ — скорость ионов, dt^+ — „ионное“ время.

Это соотношение необходимо использовать при решении уравнения движения ионов. В модели были использованы следующие нормировки,

$$L_0 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \frac{mc^2}{eH_0}; \quad t_0 = \frac{mc}{eH_0}; \quad \eta = \frac{\varphi}{\varphi_0};$$

$$h = 1 - \frac{H}{H_0}; \quad \gamma_0 = 1 + \frac{e(\varphi_0 + \varphi_n)}{mc^2}. \quad (6)$$

При сделанных предположениях поставленную задачу можно описать следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv_x^e}{d\tau} = \frac{e_x}{\gamma_0 + 1} + v_y^e(1 - h),$$

$$\frac{dv_y^e}{d\tau} = -v_x^e(1 - h),$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 0.5i_0 \left(i + \frac{1}{i} \right) v_y^e,$$

$$\frac{de_x}{d\tau} = \frac{0.5}{\gamma_0 - 1} \left(i_0 \left(i + \frac{1}{i} \right) - n^+ v_x^e \right),$$

$$\frac{di}{d\tau} = -\chi_t \left(j_g \left(F_t(\gamma) + \frac{\sigma_i^{\max}}{\sigma_t^{\max}} F(\gamma) \right) + 4.0U_g \frac{10^{-8} \cdot n^+}{g \cdot \sigma_i^{\max} \cdot (\gamma - 1)^2} \right) i \cdot v^e,$$

$$\frac{dj_g}{d\tau} = -k j_g \left(i + \frac{1}{i} \right) v^e F(\gamma),$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = v_x^e e_x,$$

$$\frac{dj_k^+}{d\tau} = g k j_g \left(i + \frac{1}{i} \right) v^e F(\gamma) \quad (\tau_{k-1} < \tau < \tau_k)$$

$$\begin{cases} j_k^+(\tau) = 0 & \text{при } \tau < \tau_{k-1}, \\ j_k^+(\tau) = \text{const} = j_k^+(\tau_k) & \text{при } \tau \geq \tau_k, \end{cases}$$

$$\frac{dv_k^+}{d\tau} = -\frac{2}{(\gamma_0 + 1)} e_x v_x^e \quad (\tau_k < \tau),$$

$$\frac{dx}{d\tau} = v_x^e, \quad (7)$$

где

$$\chi_0 = n_g \sigma_i^{\max} L_0 i_0 \sqrt{\frac{M}{m}} = gk; \quad \chi_T = n_g^0 \sigma_i^{\max} L_0;$$

$$\sigma_i(\gamma) = \sigma_i^{\max} F_t(\gamma);$$

$$\gamma_3 = (\gamma_0 - 1)(\gamma_0 + 1); \quad \gamma = \sqrt{1 + \gamma_3 \cdot ((v_x^e)^2 + (v_y^e)^2)};$$

$$\sigma_i(\gamma) = \sigma_i^{\max} F(\gamma);$$

$$n^+ = \sum_{i=1}^n \frac{j_i^+(x)}{|V_i^+(x)|} j_g(0) = g \cdot j_T;$$

$$j^e(0) = i_0 \cdot \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot j_T; \quad j_T = \frac{H^2}{8\pi} \frac{1}{Mc \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\gamma_0^2 - 1}}.$$

Здесь v_x^e — скорость электрона вдоль оси x ; v_y^e — скорость электрона вдоль оси y ; v^e — полная скорость электрона; H, h — магнитное поле и величина размагничивания соответственно; e_x — электрическое поле вдоль оси x ; i — электронный ток; i_0 — обратный электронный ток, задаваемый на аноде; j_g — плотность потока нейтралов; η — потенциал; $j_k^+(x)$ — плотность ионного тока в k -й „трубке тока“, $V_k^+(x)$ — скорость ионов в k -й „трубке тока“ в точке наблюдения; $n^+(x)$ — концентрация ионов.

Транспортное сечение задавалось сплайном, кулоновское — как функция, обратно пропорциональная квадрату энергии, а сечение ионизации задавалось через аппроксимацию Лотца [4]

$$\sigma_i^{\max} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2 \quad \text{при } E = 2.66 \text{ V}$$

$$\text{и } \sigma_t = 8.9 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad \text{при } E > 10, \sigma_k = \frac{10^{-12}}{E^2} \text{ V},$$

$$\sigma_i = \sum_{\alpha} a_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\text{Ln}\left(\frac{E}{U_i}\right)}{EU_i} \cdot \left[1 - b_{\alpha} \cdot \exp\left(c_{\alpha} - \left(\frac{E}{U_i} - 1\right)\right) \right],$$

$$\sigma_i^{\max} = 7.5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2, \quad (8)$$

где $a_{\alpha}, b_{\alpha}, c_{\alpha}$ — константы, зависящие от рода газа; q_{α} — число эквивалентных электронов на оболочке α ; E — энергия электрического поля.

Математическая модель, созданная на основе представленной системы уравнений, численно решает систему $2 \cdot n + 8$ дифференциальных уравнений, где n — число трубок тока. Решается краевая задача с заданными на аноде и катоде граничными условиями с использованием „математического пакета программ“ MathCad.

Основными исходными данными в модели являются величина магнитного поля, расход газа, приложенная разность потенциалов. Для решения также необходимо знать начальную скорость электрона и концентрацию электронов на катодной границе слоя. Скорость электрона выбирается из физических соображений, а именно, что электроны из катодной плазмы поступают с тепловой скоростью. Как показали расчеты, если выбирать T_e в пределах 1–5 eV то эти различия решений для выбранного режима двигателя несущественны. Концентрация электронов задается, используя соотношение (2), через обратный (стартующий с анода) электронный ток. Методом стрельбы ищется решение, которое удовлетворяет исходным условиям на катоде, а именно достижение нуля электрическим полем и поперечной скоростью электронов должно происходить в одной точке, что определяет границу катодной плазмы, и при заданной начальной энергии электрона и избыточном отрицательном заряде. Электрическое поле на аноде также является варьируемым параметром. Максимум его величины легко оценить из строгого условия магнетронной отсечки электронов на аноде

$$|e_x| \geq \frac{v_y^e (1 - h)(\gamma_0 + 1)}{c}. \quad (9)$$

Тестирование модели проводилось по известному аналитическому „вакуумному“ решению для случая, когда отсутствуют ионизация и рассеяние в слое.

Анализ результатов расчета

Результаты расчетов для различных режимов представлены на рис. 2, 3. По оси абсцисс отложена относительная длина слоя, которая близка к ларморовскому радиусу электрона для параметров расчета.

На рис. 2 приведены результаты расчета по ксенону, соответствующие параметрам эксперимента: $q = 0.57 \text{ A}$, $U = 150 \text{ V}$, $H = 282 \text{ Oe}$, $I = 2.2 \text{ A}$, $p_k = 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ Torr}$. Из рис. 2 видно (кривая j_g), что выгорание газа составляет всего лишь $\sim 40\%$, концентрация катодной плазмы равна $1.4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, размагничивание не превышает нескольких процентов.

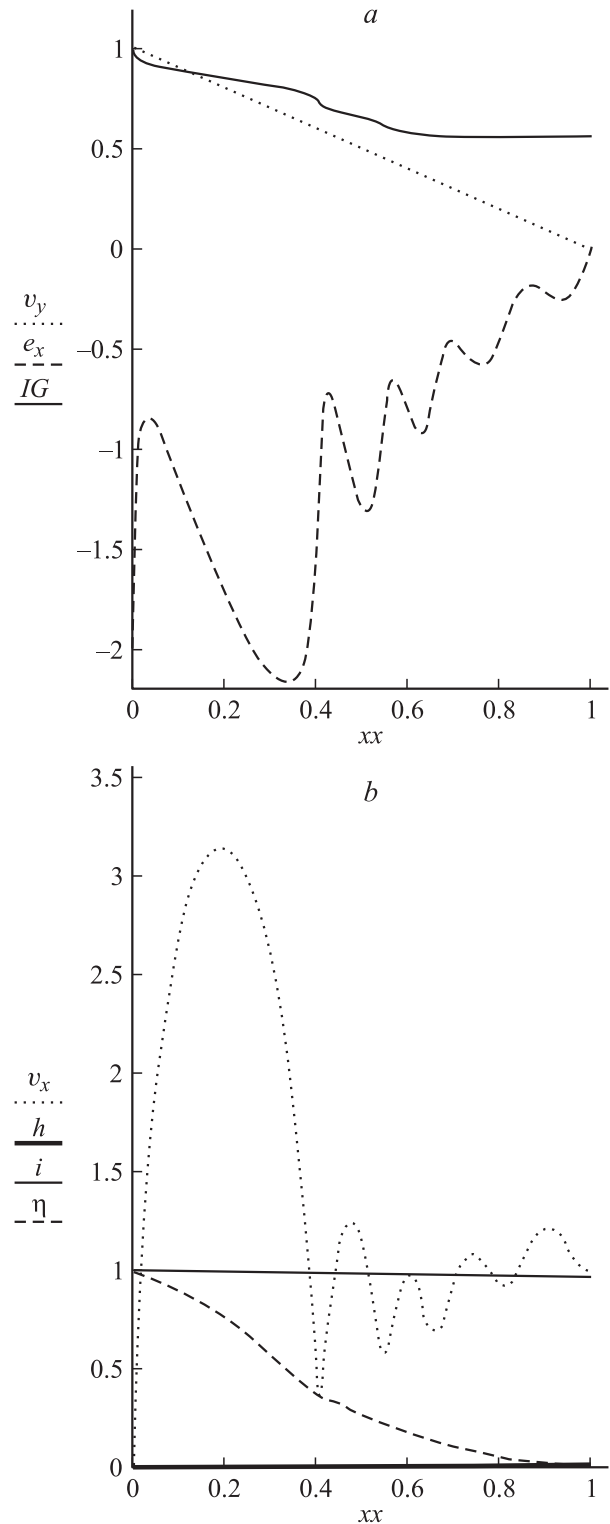


Рис. 2. Результат компьютерного моделирования для параметров: расход Xe 0.57 A, $U = 150 \text{ V}$, $H = 282 \text{ Oe}$, $T_e = 1.85 \text{ eV}$ ($I_p = 0.94 \text{ A}$), $L_0 = 0.148 \text{ cm}$.

На рис. 3 рассчитано решение, соответствующее параметрам слоя, описанным в аналитическом бесстолкновительном решении [1] и работе [3] для режима H -слоя, так как продольная скорость электронов от катода к аноду

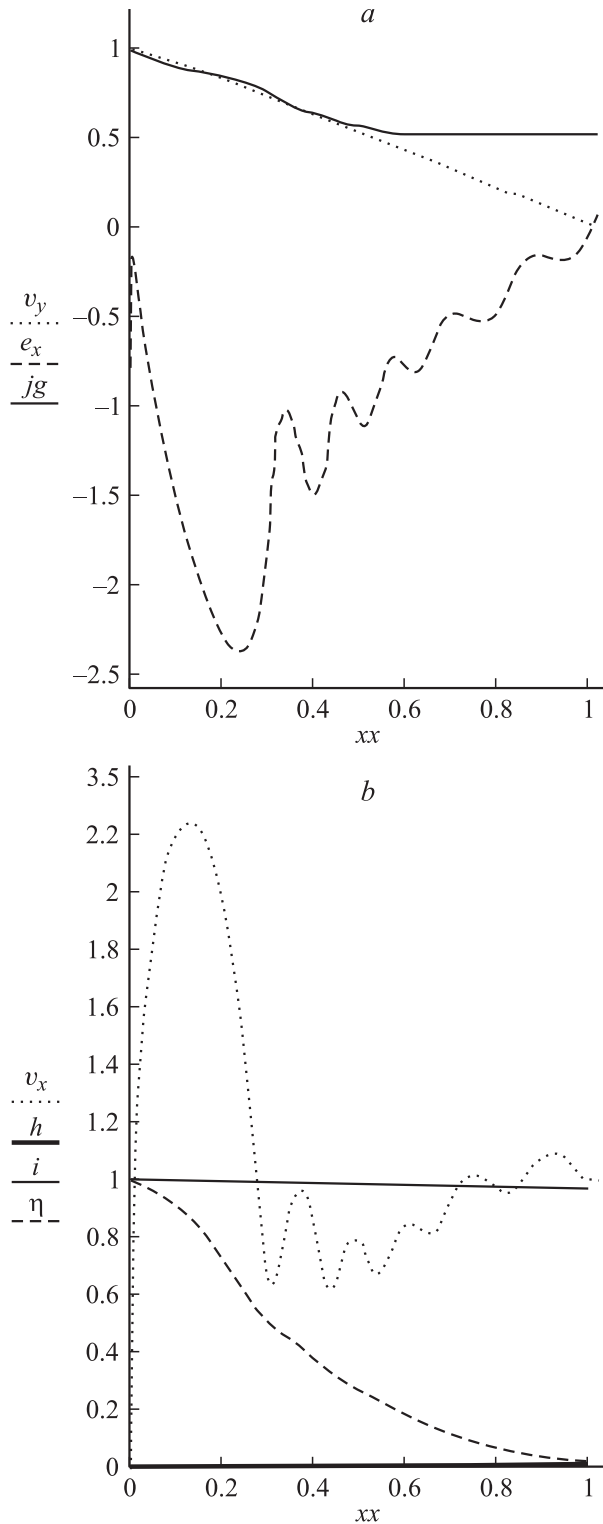


Рис. 3. Результаты компьютерного моделирования для параметров: расход Хе 0.75 А, $U = 95$ В, $H = 282$ Ое, $T_e = 2.1$ eV ($I_p = 1.54$ А), $L_0 = 0.12$ см.

падает. При этом выгорание составляет 100% и вся зона ионизации находится вблизи анода, а размагничивание достигает на катодной границе слоя 60%.

Различие решений (рис. 2 и 3) заключается в различной длине зоны эффективной ионизации нейтралов (кривая j_g), степени выгорания газа, величине размагничивания в слое (h), длине слоя. Все представленные результаты свидетельствуют о решении типа H -слоя.

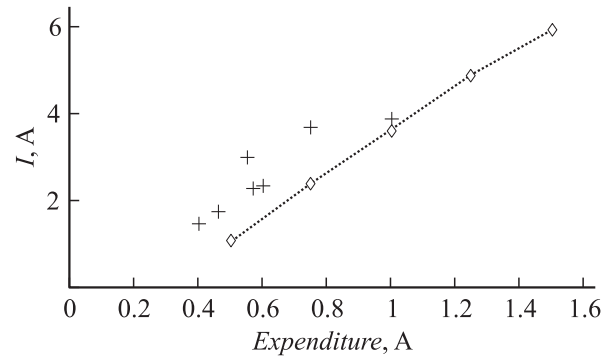


Рис. 4. Ток разряда от расхода через двигатель при $T = 200$ В, $H = 282$ Ое, ксенон.

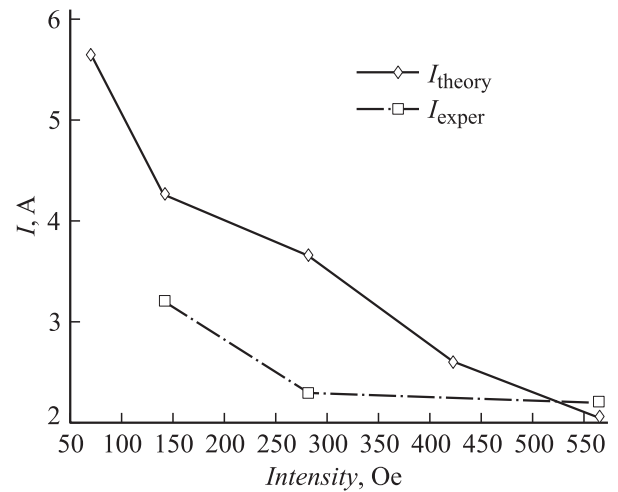


Рис. 5. Ток разряда от магнитного поля при $U = 200$ В, расход Хе 1 А ($T_e = 1.2$ eV).

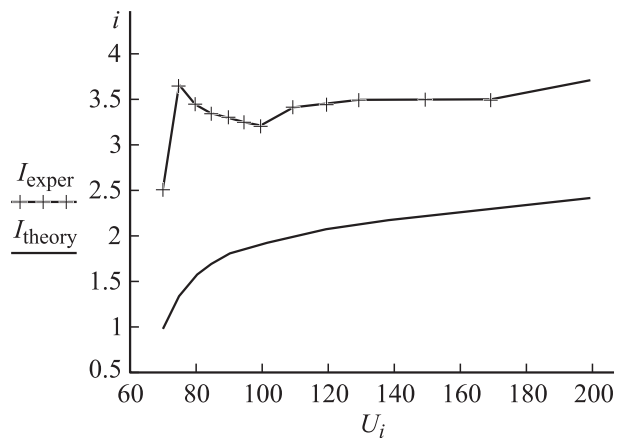


Рис. 6. ВАХ. Расход Хе 0.75 А, $H = 282$ Ое.

Зависимости тока разряда от расхода, рассчитанные с помощью программы и полученные экспериментально, представлены на рис. 4, а от магнитного поля — на рис. 5, вольт-амперные характеристики — на рис. 6. Полученные решения (рис. 4–6) качественно совпадают с экспериментальными. Отличие связано с пренебрежением в математической модели двукратноионизованными ионами и рассеянными электронами.

Заключение

Построенная одномерная „квазибесстолкновительная“ математическая модель слоя пространственного заряда, формирующегося между металлическим анодом и плазмой, в скрещенных электрическом и магнитном полях корректно описывает и позволяет производить расчет параметров H -слоя.

При определенных режимах работы двигателя электрическое поле в модели может стремиться к нулю (почти его достигать, но не быть равным, так как иначе модель перестает быть корректной) внутри слоя вблизи анода ($x = 0$). Это свидетельствует о возможности образования анодной плазмы, что может служить критерием перехода из режима H -слоя в E -слой.

Для более корректного расчета в рамках модели необходимо учитывать влияние рассеянных электронов.

Список литературы

- [1] *Chapman S., Ferraro V.* // *Jorn. Geophys. Rec.* 1952. Vol. 57. P. 15.
- [2] *Жаринов А.В., Попов Ю.С.* // *ЖТФ.* 1967. Т. 37. Вып. 2.
- [3] *Власов М.А., Жаринов А.В., Коваленко Ю.А.* // *ЖТФ.* 2001. Т. 71. Вып. 12. С. 34–42.
- [4] *Справочник физических величин / Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова.* М.: Энергоатомиздат, 1991.