01;07

Моды трехмерных оптических резонаторов, содержащих селектирующие элементы

© В.Н. Кудашов, А.Б. Плаченов, А.М. Радин

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий,
Санкт-Петербург, Россия
e-mail: amradin@mail.ru

(Поступило в Редакцию 20 мая 2003 г.)

Предлагается модель модовой структуры поля в трехмерных оптических резонаторах, содержащих селектирующие элементы, а также поглощающие или усиливающие поле среды, когда элементы симплектической матрицы 4×4 полного обхода резонатора оказываются комплексными. Модель позволяет контролировать устойчивость резонатора, неэрмитовость высших мод и сложный астигматизм поля собственных колебаний. Сформулированы условия однонаправленной и двунаправленной устойчивости. Приведен пример резонатора, обладающего однонаправленной устойчивостью на первой поперечной моде.

Определения и обозначения

Четырехмерный комплексный вектор-столбец

$$Y = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{1}$$

($\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ — вектор-столбцы размерности 2) будем называть положительным (отрицательным) [1,2], если положительной (отрицательной) является величина

$$\mathrm{Im}(\mathbf{p}^t \mathbf{q}^*) \tag{2}$$

индекс t означает транспонирование, а звездочка — комплексное сопряжение.

Подпространство, все ненулевые векторы которого положительны (отрицательны), будем также называть положительным (отрицательным).

Матрица T размерности 4×4 называется симплектической [3], если для произвольной пары векторов $Y_{1,2}$ вида (1) справедливо равенство

$$\sigma(TY_1, TY_2) = \sigma(Y_1, Y_2), \tag{3}$$

где $\sigma(Y_1, Y_2)$ — кососимметрическое произведение

$$\sigma(Y_1, Y_2) = \mathbf{p}_1^t \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2^t \mathbf{q}_1. \tag{4}$$

Векторы, компоненты которых составляют стобцы симплектической матрицы, образуют симплектический базис.

Два вектора $Y_{1,2}$ называются косоортогональными, если их кососимметрическое произведение (4) равно нулю. Двумерное подпространство, все векторы которого попарно косоортогональны, называется лагранжевой плоскостью [3].

Распространение гауссовых пучков в оптических системах первого порядка

1. Рассмотрим оптическую систему первого порядка [4,5], в которой ось z выбрана совпадающей с оптической осью системы, а поперечные координаты объединены в двумерный вектор $\mathbf{r} = (x, y)^t$. Пусть функции, описывающие состояние светового поля в окрестности оптической оси системы, в главном приближении имеют вид

$$u^{(\pm)}(z, \mathbf{r}) = a(x, \mathbf{r}) e^{\pm ik\tau(z, \mathbf{r})}, \tag{5}$$

где

$$\tau(z, \mathbf{r}) = \tau_0(z) + \frac{1}{2}\mathbf{r}^t H(z)\mathbf{r}, \tag{6}$$

$H(z)$ — симметричная матрица 2×2; зависимость от времени предполагается гармонической.

Знак „+“в (5) соответствует прямой, а „−“ — обратной волне, распространяющимся в направлении возрастания и убывания координаты z соответственно, если функция $\tau_0(z)$ возрастает с ростом z. Предполагается, что описывающие поле исходные уравнения допускают замену k на $-k$, так что функции $u^{(\pm)}$ удовлетворяют им одновременно с одними и теми же $\tau(z, \mathbf{r})$ и $a(z, \mathbf{r})$. При этом прямая волна будет иметь вид сосредоточенного в окрестности луча гауссова пучка, если матрица $H(z)$ имеет при всех значениях z положительно определенную мнимую часть, а для сосредоточенности обратной волны необходима отрицательная определенность мнимой части $H(z)$.

Будем также предполагать, что исходные уравнения допускают в числе прочих и такие решения вида (5), (6), где предэкспоненциальный множитель a в главном приближении не зависит от $\mathbf{r}$, т.е. зависимость от поперечных координат определяется лишь матрицей H.

2. Традиционным способом описания распространения таких пучков является метод лучевых $ABCD$ матриц [6], [7]. Матрицы $H_{\mathrm{in,out}} = H(z_{\mathrm{in,out}})$, соответствующие различным значениям переменной z, оказываются связаны соотношением

$$H_{\mathrm{out}} = (C + DH_{\mathrm{in}})(A + BH_{\mathrm{in}})^{-1}, \tag{7}$$

где A, B, C, D — матрицы размерности 2×2, являющиеся блоками симплектической $ABCD$-матрицы преобразования

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

размерности 4×4. При отсутствии поглощения или усиления поля элементы матриц A, B, C, D являются вещественными, а для оптических систем, содержащих селектирующие элементы (типа гауссовых диафрагм), а также поглощающие (или усиливающие) поле среды, эти матрицы становятся комплексными, при этом матрица T по-прежнему остается симплектической [8].

Говорят, что пучок обладает простым астигматизмом, если H — диагональная матрица с различными собственными числами и сложным астигматизмом, если матрица H не является диагональной. Сложный астигматизм заведомо возникает в случае, когда матрицы A, B, C, D недиагональны.

Преобразования поля, при которых матрицы H в функциях (5), (6) преобразуются согласно (7) ($ABCD$-преобразования), в общем случае могут быть с точностью до множителя представлены в виде композиции элементарных преобразований: операций замены переменных, умножения на гауссову функцию и преобразования Фурье по одной или обеим поперечным координатам. В случае, когда блок B — невырожденная матрица, имеет место также представление [8] в виде интегрального оператора $\mathbf{U}^{(\pm)}$ вида

$$(\mathbf{U}^{(\pm)}u)(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} U^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')u(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \qquad (8)$$

с ядром

$$U^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\pm k}{2\pi i\sqrt{\det B}}\, e^{\pm ik\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')},$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}'^t B^{-1}A\mathbf{r}' - 2\mathbf{r}'^t B^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{r}^t DB^{-1}\mathbf{r}\right)$$

причем из симплектичности T вытекает симметричность матриц $B^{-1}A$ и DB^{-1}.

Произведению $ABCD$-матриц соответствует композиция операторов U, которая также является интегральным оператором вида (8), если соответствующий блок B результирующей матрицы невырожден.

3. $ABCD$-преобразования определяются матрицей T с точностью до числового множителя, не зависящего от вида функции. Если известна зависимость $u^{(\pm)}$ от поперечных координат при некотором заданном значении z_{in}, то при произвольном z_{out}

$$u^{(\pm)}(z_{\text{out}}, \mathbf{r}) = \eta^{(\pm)}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}})e^{\pm ik(\tau_0(z_{\text{out}})-\tau_0(z_{\text{in}}))} \times \mathbf{U}^{(\pm)})(z_{\text{out}}, z_{\text{in}})u^{(\pm)}(z_{\text{in}}, \mathbf{r}). \qquad (9)$$

Здесь операторы $U^{(\pm)}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}})$ соответствует $ABCD$-матрицам $T(z_{\text{out}}, z_{\text{in}})$ и представляются в виде комбинации указанных выше элементарных преобразований, а в случае невырожденного блока B допускает представление (8). Кроме того, формула (9) содержит наряду с эйкональным множителем $\exp\{\pm ik(\tau_0(z_{\text{out}}) - \tau_0(z_{\text{in}}))\}$ также некоторые функции $\eta^{(\pm)}$, конкретный вид которых определяется спецификой задачи. Эти функции никак не связаны с формой поперечного распределения и могут быть рассчитаны в приближении коротких волн. Функции $\eta^{(\pm)}$ обладают следующими очевидными свойствами:

$$\eta^{(\pm)}(z, z) = 1,$$

$$\eta^{(\pm)}(z_2, z_1)\eta^{(\pm)}(z_1, z_0) = \eta^{(\pm)}(z_2, z_0). \qquad (10)$$

В дальнейшем будет предполагаться, что $\eta^{(\pm)}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}})$ допускает следующее представление:

$$\eta^{(\pm)}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}}) = \frac{\eta_1(z_{\text{out}})}{\eta_1(z_{\text{in}})}\,\eta_2^{(\pm)}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}}), \qquad (11)$$

причем

$$\eta_2^{+}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}}) = \eta_2^{(-)}(z_{\text{in}}, z_{\text{out}}). \qquad (12)$$

Функция η_1 описывает зависимость поля от локальных свойств среды. В силу нашего предположения о симметрии исходных уравнений относительно замены k на $-k$ функция $\eta_1(z)$ не зависит от направления распространения волны.

Функция η_2 описывает не зависящие от поперечного распределения поля дополнительные скачки фазы и (или) амплитуды, возникающие при прохождении некоторых оптических элементов, расположенных в промежутке между z_{in} и z_{out}, например, при отражении от зеркал (амплитуда испытывает скачок, если зеркало неидеально). Соотношение (11) означает, что при прохождении таких оптических элементов в направлении распространения встречных волн эти волны испытывают одинаковые потери и фазовые сдвиги. В этом отношении поведение функций $\eta_2^{(\pm)}$ аналогично эйкональному множителю $\exp\{\pm ik(\tau_0(z_{\text{out}}) - \tau_0(z_{\text{in}}))\}$.

Матрицы $H_\pm(z)$ в случае двусторонне устойчивого кольцевого резонатора

1. В кольцевом оптическом резонаторе поле u после полного обхода должно переходить само в себя, т. е.

$$u(z + l, \mathbf{r}) = u(z, \mathbf{r}) \qquad (13)$$

(l — полная длина резонатора).

Для функций вида (5), (6) это означает, в частности, что

$$H(z + l) = H(z), \qquad (14)$$

т. е, в случае $z_{\text{out}} = z_{\text{in}} + l$ матрица H должна воспроизводиться в результате преобразования (7): $H_{\text{out}} = H_{\text{in}} = H$, откуда

$$H = (C + DH)(A + BH)^{-1}, \qquad (15)$$

где A, B, C, D — блоки матрицы полного обхода резонатора (матрицы монодромии [9]).

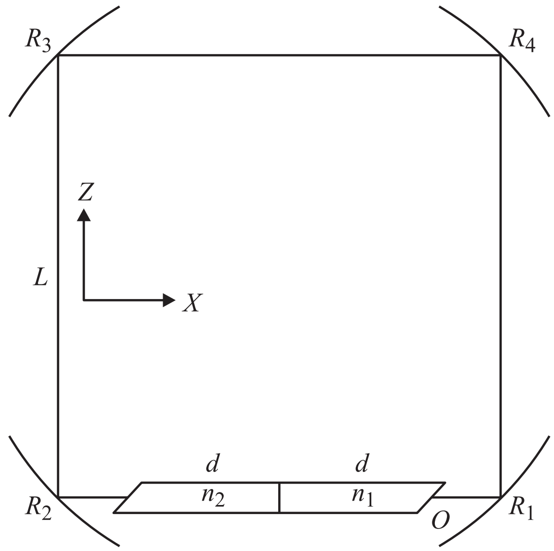

Рис. 1. Принципиальная схема кольцевого резонатора, обладающего односторонней (однонаправленной) устойчивостью на длине волны $\lambda = 0.6328\,\mu m$. Плечо резонатора $L = 10\,$cm, зеркала R_1, R_2, R_3 и R_4 имеют радиусы кривизн 34, 70, 100 и 200 cm, соответственно. Поглощающие диафрагмы на зеркалах e^{-x^2/a^2}, где x — поперечная координата, ширина диафрагмы $a = 10\,$mm. Поглощающая и усиливающая среды имеют постоянные показатели преломления $n_1 = 1.01 + 0.05i$ и $n_2 = 1.01 - 0.05i$ соответственно и расположены по центру плеча симметрично, длина каждой среды 4 cm. Начало координат — у входа в поглощающую среду в точные 0. Номер продольной моды $N = 633375$.

Матрицы монодромии, отвечающие различным значениям z, связаны преобразованием подобия. Наличие сосредоточенного в окрестности оси резонатора решения $u^{(+)}$ ($u^{(-)}$) (5), (6) предполагает, в частности, наличие удовлетворяющей (14) матрицы $H(z)$, мнимая часть которой остается положительно (отрицательно) определенной при всех значениях z. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением наиболее в практическом отношении интересного случая двусторонне устойчивых резонаторов, для которых одновременно существуют удовлетворяющие (13) сосредоточенные решения $u^{(\pm)}$. Отметим, что в случае невещественной матрицы монодромии возможна однонаправленная устойчивость, когда в окрестности оси резонатора сосредоточена лишь одна из двух встречных волн [2], в то время как поле другой волны нарастает при удалении от оси резонатора (неустойчивость). Физическая причина односторонней устойчивости обусловлена полевой невзаимностью. Ранее полевая невзаимность наблюдалась только в двусторонне устойчивых резонаторах (см., например, [10]). Однако тот факт, что она может привести к односторонней устойчивости резонатора ранее никем отмечен не был. Пример резонатора, обладающего однонаправленной устойчивостью на первой поперечной моде, приведен на рис. 1, 2.

Как видно из (9), поперечные распределения полей прямой и обратной волн для произвольного сечения z являются собственными функциями операторов $\mathbf{U}^{(\pm)} = \mathbf{U}^{(\pm)}(z + l, z)$, соответствующих матрице монодромии $T(z + l, z)$.

2. Как показано в [2], из двусторонней устойчивости резонатора вытекает наличие у T пары инвариантных лагранжевых плоскостей, одна из которых положительна, а вторая отрицательна. **q**- и **p**-компоненты векторов, принадлежащих этим плоскостям, связаны соотношениями $p = H_\pm q$, где $H_\pm$ — искомые симметричные решения уравнения (15) со знакоопределенными мнимыми частями. В этом случае матрица T допускает представление в виде произведения трех симплектических матриц

$$T = W\Upsilon W^{-1}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} M_- & 0 \\ 0 & M_+ \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где $M_\pm$ — некоторые матрицы размерности 2×2, связанные в силу симплектичности соотношением $M_-^{-1} = M_+^t$.

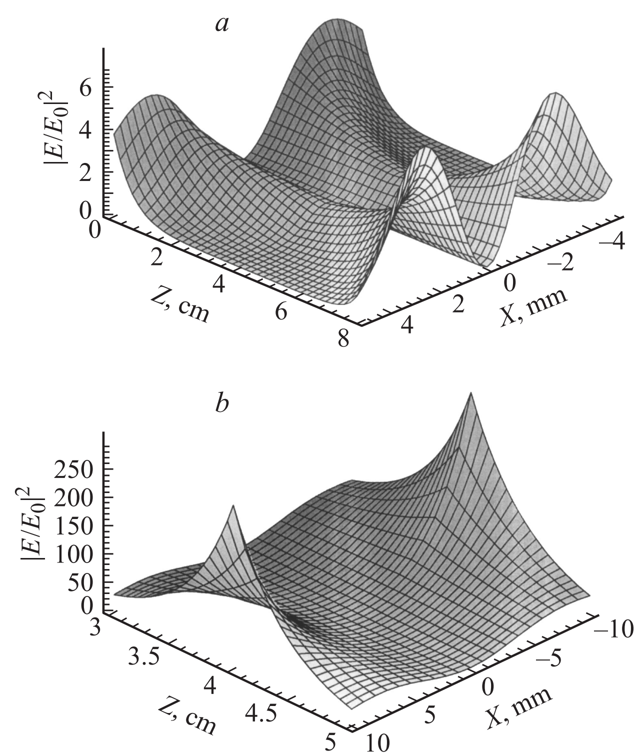

Рис. 2. Зависимости поперечных распределений относительных интенсивностей встречных волн первой поперечной моды на участке оптического контура резонатора для волны, распространяющейся в положительном направлении оси Z (волна устойчива на активном участке, следовательно, устойчива всюду внутри резонатора) (a) и для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси Z (волна локально теряет устойчивость на участке оптического контура от 3.7 до 4.3 cm, в то время как встречная волна (a) устойчива всюду внутри резонатора, следовательно, данный резонатор обладает односторонней устойчивостью) (b).

Первые два столбца $Y_{1,2}^-$ матрицы W принадлежат отрицательной, а последние два $Y_{1,2}^+$ — положительной инвариантной лагранжевой плоскости матрицы T. Представим W в блочном виде

$$W = \begin{pmatrix} Q_- & Q_+ \\ P_- & P_+ \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Тогда искомые матрицы $H_\pm$ представляются в виде

$$H_\pm = P_\pm Q_\pm^{-1}. \tag{18}$$

3. Если матрица T диагонализуема, то $M_\pm$ можно выбрать в виде

$$M_\pm = \begin{pmatrix} e^{\pm i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{\pm i\theta_2} \end{pmatrix},$$

где $e^{\pm i\theta_{1,2}}$ — собственные числа матрицы T, а столбцы $Y_{1,2}^+$ матрицы W — собственные векторы T.

Значения $\theta_{1,2}$, вообще говоря, комплексны. В случае $\theta_1 = -\theta_2$ инвариантные лагранжевы плоскости и соответственно матрицы $H_\pm$ определяются неоднозначно: уравнение (15) имеет континуальное семейство решений [2,11].

Если T не может быть диагонализована, то при правильном выборе W

$$M_+ = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad M_- = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ -e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

В этом случае столбцы W — как собственные, так и присоединенные векторы T.

4. Пусть представление (16) получено для матрицы монодромии T_{in}, отвечающей некоторому сечениию $z = z_{\text{in}}$. Тогда для произвольного сечения $z = z_{\text{out}}$ матрица T_{out} имеет аналогичное представление с той же матрицей Υ, а матрицы $W_{\text{in,out}}$ связаны соотношением

$$W_{\text{out}} = T(z_{\text{out}}, z_{\text{in}}) W_{\text{in}},$$

где $T(z_{\text{out}}, z_{\text{in}})$ — $ABCD$-преобразование от плоскости $z = z_{\text{in}}$ к плоскости $z = z_{\text{out}}$.

Матрицы

$$H_\pm(z_{\text{in,out}}) = P_\pm(z_{\text{in,out}}) Q_\pm^{-1}(z_{\text{in,out}})$$

связаны равенством (7). В двусторонне устойчивом резонаторе знакоопределенность мнимых частей матриц $H_\pm(z)$ сохраняется при всех z.

5. Если $z_{\text{out}} = z_{\text{in}} + l$, то $T(z + l, z)$ — матрица монодромии и, согласно (16),

$$W(z + l) = W(z)\Upsilon,$$

откуда

$$Q_\pm(z + l) = Q_\pm(z) M_\pm, \quad P_\pm(z + l) = P_\pm(z) M_\pm.$$

Очевидно, равенство (14) будет выполнено, поскольку общий правый множитель, у матриц $P_\pm$ и $Q_\pm$ никак не отразится на результирующей матрице $H_\pm$ (18).

6. Рассмотрим функции

$$\psi_0^\pm(z, r) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{k}{\sqrt{\det Q_\pm(z)}} e^{\pm ikr^t H_\pm(z) r/2}. \tag{19}$$

При произвольном фиксированном значении z функции ψ_0^+ и ψ_0^- удовлетворяют условию

$$\langle \psi_0^+(z, \mathbf{r}),\ \psi_0^-(z, \mathbf{r})\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_0^+(z, \mathbf{r}) \psi_0^-(z, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1, \tag{20}$$

$\langle , \rangle$ — вещественное скалярное произведение по поперечным координатам.

Кроме того, $\psi_0^\pm$ при $z = z_{\text{in,out}}$ как функции поперечных координат связаны соотношением

$$\psi^{(\pm)}(z_{\text{out}}, \mathbf{r}) = U^{(\pm)}(z_{\text{out}}, z_{\text{in}}) \psi^{(\pm)}(z_{\text{in}}, \mathbf{r}).$$

В результате полного обхода резонатора ($z_{\text{out}} = z_{\text{in}} + l$) матрицы $Q_\pm$ приобретают множители $M_\pm$, а функции (19) — множители $\lambda_0^\pm = (\det M_\pm)^{-1/2}$. Очевидно,

$$\lambda_0^\pm = e^{\mp i(\theta_1+\theta_2)/2} \quad \text{или} \quad \lambda_0^\pm = e^{\mp i\theta}. \tag{21}$$

Таким образом, при произвольном z функции (19) — собственные функции операторов полного обхода резонатора $U^\pm$ с собственными значениями (21).

Из (9) следует, что встречные волны, соответствующие фундаментальной моде, описываются функциями вида

$$u_0^\pm(z, r) = \eta^\pm(z) e^{\pm ik\tau_0(z)} \psi_0^\pm(z, \mathbf{r}), \tag{22}$$

где функция $\eta^\pm(z)$ равна функции $\eta^\pm(z, z')$, умноженной на некоторую числовую константу, для какого-либо z' (в силу (10) z' может быть любым).

Возможные значения k, определяемые из условия (13), будут приведены ниже.

Операторы рождения—уничтожения

1. Применим операторы $U^{(\pm)}$ к вектор-функциям $\pm\sqrt{i/k}\nabla u$ (∇ — двумерный градиент по поперечным координатам) и $\sqrt{k/i}\mathbf{r}u$. Дифференцированием и интегрированием по частям формулы (8) можно с учетом симплектичности матрицы T получить следующие соотношения:

$$U^{(\pm)}\left(\pm\sqrt{i/k}\nabla u\right) = A^t\left(\pm\sqrt{i/k}\nabla U^{(\pm)}u\right) + C^t\left(\sqrt{k/i}\mathbf{r}U^{(\pm)}u\right),$$

$$U^{(\pm)}\left(\sqrt{k/i}\mathbf{r}u\right) = B^t\left(\pm\sqrt{i/k}\nabla U^{(\pm)}u\right) + D^t\left(\sqrt{k/i}\mathbf{r}U^{(\pm)}u\right),$$

или иначе

$$\mathbf{U}^{(\pm)} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{i/k}\nabla \\ \sqrt{k/i}\mathbf{r} \end{pmatrix} u = T^t \begin{pmatrix} \pm\sqrt{i/k}\nabla \\ \sqrt{k/i}\mathbf{r} \end{pmatrix} U^{(\pm)} u. \tag{23}$$

Отметим, что коммутационное соотношение (23) носит универсальный характер и выполняется для любых операторов $U^{(\pm)}$, в том числе и для тех, функциональное преставление которых отлично от (8).

2. Пусть Y — некоторый вектор вида (1). Рассмотрим операторы

$$\Lambda_Y^{(\pm)} = \pm\sqrt{i/k}(\mathbf{q}^t\nabla) + \sqrt{k/i}(\mathbf{p}^t\mathbf{r}).$$

Операторы $\Lambda_Y^{(\pm)}$ сопряжены в смысле вещественного скалярного произведения $\langle , \rangle$ (20)

$$\langle \Lambda_Y^{(+)} u, v\rangle = \langle u, \Lambda_Y^{(-)} v\rangle. \quad (24)$$

Домножив слева (23) на Y^t, получим

$$U^{(\pm)}\Lambda_Y^{(\pm)} u = \Lambda_{TY}^{(\pm)} U^{(\pm)} u. \quad (25)$$

Если $Y_{1,2} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}_{1,2}\\ \mathbf{p}_{1,2}\end{pmatrix}$ — некоторые векторы и $\Lambda_{Y_{1,2}}^{(\pm)}$ — соответствующие им операторы, то для коммутатора этих операторов справедливо равенство

$$[\Lambda_{Y_1}^{(\pm)}, \Lambda_{Y_2}^{(\pm)}] = \mp\sigma(Y_1, Y_2). \quad (26)$$

3. Пусть $\{Y_1^-, Y_2^-, Y_1^+, Y_2^+\}$ — симплектический базис. Для операторов

$$\Lambda_{\pm j} = \Lambda_{Y_j^\pm}^{(\pm)}, \quad \Lambda_{\pm j}^* = -\Lambda_{Y_j^\mp}^{(\pm)} \quad (27)$$

справедливы соотношения

$$i)\ [\Lambda_{\pm j}, \Lambda_{\pm i}] = [\Lambda_{\pm j}^*, \Lambda_{\pm i}^*] = 0,$$

$$ii)\ [\Lambda_{\pm j}, \Lambda_{\pm i}^*] = \delta_{ij},$$

$$iii)\ \Lambda_{\pm j}^t = \Lambda_{\mp j}^*, \quad (28)$$

вытекающие из (24), (26) и условия симплектичности (3). Операторы $\Lambda_{\pm j}^*$, $\Lambda_{\pm j}$ будем называть операторами рождения и уничтожения соответственно.

Высшие моды

1. Пусть $\{Y_{1,2}^\pm\}$ — столбцы матрицы W (17) и $\Lambda_{\pm j}^*$, $\Lambda_{\pm j}$ — соответствующие операторы рождения и уничтожения (27). Применив к функциям $\psi_0^\pm$ (19) операторы уничтожения, получаем равенства

$$\Lambda_{\pm j}\psi_0^\pm(\mathbf{r}) = 0. \quad (19)$$

Введем функции

$$\psi_{n_1n_2}^\pm = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}}\Lambda_{\pm 1}^{*n_1}\Lambda_{\pm 2}^{*n_1}\psi_0^\pm. \quad (30)$$

Они удовлетворяют условию вещественной биортогональности

$$\langle \psi_{n_1n_2}^+, \psi_{m_1m_2}^-\rangle = \delta_{n_1m_1}\delta_{n_2m_2}. \quad (31)$$

2. Рассмотрим теперь вопрос о собственных подпространствах операторов $U^{(\pm)}$. Предположим вначале, что матрица монодромии T диагонализируема. Тогда векторы Y_j^+ собственные для T и из (25) получаем $U^{(\pm)}\Lambda_{\pm j}^* = e^{\mp i\theta_j}\Lambda_{\pm j}^* U^{(\pm)}$. Из этого равенства и из (30) следует

$$U^{(\pm)}\psi_{n_1n_2}^\pm = \lambda_{n_1n_2}^{(\pm)}\psi_{n_1n_2}^\pm,$$

$$\lambda_{n_1n_2}^{(+)} = \exp\left\{\mp i\left[\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \left(n_2+\frac{1}{2}\right)\theta_2\right]\right\}. \quad (32)$$

Таким образом, функции $\psi_{n_1n_2}^\pm$ являются собственными для операторов $U^{(\pm)}$ с собственными числами $\lambda_{n_1n_2}^{(\pm)}$. Поскольку в отличие от вещественного случая значения $\theta_{1,2}$ могут быть произвольными (не обязательно вещественными), то собственные числа (32) уже не обязаны лежать на единичной окружности. Из (32) вытекает совпадение собственных чисел операторов $U^{(+)}$ и $U^{(-)-1}$, описывающих преобразование прямой и обратной волн при обходе резонатора в направлениях, совпадающих с направлениями их распространения.

Кратные собственные числа возникают в случаях, когда либо по крайней мере одно из значений $\theta_{1,2}$ вещество и рационально соизмеримо с π (или равно нулю), либо аргументы $\theta_{1,2}$ совпадают или отличаются на π, а модули рационально соизмеримы между собой.

3. Остановимся на случаях, когда значения $\theta_{1,2}$ совпадают с точностью до знака $\theta_1 = \pm\theta_2 = \theta$ и матрица T обладает двумя двумерными (при $\theta \neq 0, \pi$) собственными подпространствами, отвечающими собственным числам $e^{\pm i\theta}$. Тогда собственные векторы Y_j^+ определяются неоднозначно, что в свою очередь приводит к неоднозначности в определении операторов $\Lambda_{\pm j}^*$, $\Lambda_{\pm j}$ и соответственно функций (30), а в случае $\theta_1 = -\theta_2$ — также и (19). Тем не менее на структуре собственных подпространств операторов $U^{(\pm)}$ такая неоднозначность, разумеется, никак не сказывается.

а) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Подпространства $X_\pm^N$ — линейные оболочки функций $\{\psi_{n_1n_2}^{(+)}, n_1 + n_2 = N\}$ (значения N неотрицательны) являются собственными подпространствами операторов $U^{(\pm)}$ размерности $N+1$. Соответствующие собственные числа равны $\exp\{\mp i(N+1)\theta\}$.

б) $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$. Подпространства $\tilde{X}_\pm^N$ — линейные оболочки функций $\{\psi_{n_1n_2}^{(\pm)}, n_1 - n_2 = N\}$ (знак N произволен) являются бесконечномерными собственными подпространствами операторов $U^{(\pm)}$. Соответствующие собственные числа равны $\exp\{\mp iN\theta\}$.

При ином выборе базисных векторов $Y_j^\pm$ функции $\{\psi_{n_1n_2}^{(\pm)}\}$ изменятся, однако все они будут принадлежать тем же самым инвариантным подпространствам. В частности, континуальные семейства функций $\psi_0^\pm$ (19) в случае $\theta_1 = -\theta_2$ принадлежат подпространствам $\tilde{X}_\pm^0$.

Дополнительное выражение возникает, если θ вещество и рационально соизмеримо с π.

4. Пусть теперь матрица T не приводится к диагональному виду. В этом случае собственными функциями

оператора $U^{(+)}$ являются только функции ψ_{0n}^{+}. Нетрудно получить формулу

$$U^{(+)}\psi_{n,N-n}^{+} = e^{-i(N+1)\theta}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}\sqrt{\frac{n!(N-j)!}{j!(N-n)!}}\,\psi_{j,N-j}^{+}. \tag{33}$$

Обозначим через X_{+}^{N} линейную оболочку функций $\{\psi_{0,N}^{+}, \psi_{1,N-1}^{+}, \dots, \psi_{N,0}^{+}\}$. Из (33) следует, что подпространство X_{+}^{N} является инвариантным для оператора $U^{(+)}$, и матрица сужения $U^{(+)}$ на это подпространство в выбранном базисе имеет верхнетреугольную форму.

Собственными функциями оператора $U^{(-)}$ являются функции ψ_{n0}^{-}. Кроме того,

$$U^{(-)}\psi_{n,N-n}^{-} = e^{i(N+1)\theta}\sum_{j=n}^{N}\frac{1}{(j-n)!}\sqrt{\frac{j!(N-n)!}{n!(N-j)!}}\,\psi_{j,N-j}. \tag{34}$$

Аналогично, обозначая через X_{-}^{N} линейную оболочку функций $\{\psi_{0,N}^{-}, \psi_{1,N-1}^{-}, \dots, \psi_{N,0}^{-}\}$, мы видим, что подпространство X_{-}^{N} является инвариантным для оператора $U^{(-)}$ и матрица сужения $U^{(-)}$ на это подпространство в выбранном базисе имеет нижнетреугольную форму.

Собственные функции резонатора и собственные значения волновых чисел

1. Выше построена система собственных функций и собственных чисел операторов $U^{(\pm)}$, описывающих с точностью до множителя преобразование прямой и обратной волн при обходе резонатора в направлении возрастания координаты z. Теперь можно приступить к решению задачи о построении решений, удовлетворяющих условию (13). В выбранном сечении поперечное распределение поля будет удовлетворять, согласно (9), условию

$$u^{(\pm)}(\mathbf{r}) = c_{\pm}e^{\pm ik\Delta\tau}(U^{(\pm)}u^{(\pm)})(\mathbf{r}),$$

из которого, в частности, можно определить собственные значения волновых чисел резонатора k. Здесь $\Delta\tau = \tau_0(z+l) - \tau_0(z)$, $c_{\pm} = \eta^{\pm}(z+l, z) = \eta_2^{\pm}(z+l, z)$ (функции η_1 в силу условий (11) не дают вклада в $c_{\pm}$), причем (12) следует, что $c_{-} = c_{+}^{-1}$.

Функции $u^{(\pm)}$ являются собственными функциями операторов $U^{(\pm)}$, т.е. с точностью до множителя совпадают с функциями (30) (или их линейными комбинациями при совпадении собственных чисел). Тогда в случае диагонализируемой матрицы T

$$c_{\pm}e^{\pm ik\Delta\tau}\lambda_{mn}^{(\pm)} = 1. \tag{35}$$

Поскольку $c_{-} = c_{+}^{-1}$ и $\lambda_{mn}^{(-)} = \lambda_{mn}^{(+)-1}$, то (35) для прямой и обратной волн определяет одну и ту же систему условий, которая с учетом (32) может быть представлена в виде

$$-i\ln c + k\Delta\tau - \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_2\right] = 2\pi N,$$

где $c = c_{+}$, N — некоторое натуральное число.

Отсюда определяется дискретный набор значений k

$$k_{Nmn} = \left\{2\pi N + \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta_1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_2\right] + i\ln c\right\}\Big/\Delta\tau. \tag{36}$$

В случае, если T не диагонализируема, то

$$k_{Nm} = \{2\pi N + (2m+1)\theta + i\ln c\}/\Delta\tau. \tag{37}$$

2. Пусть $\{\psi_{nm}^{\pm}(z_0, r)\}$ — набор функций (30), построенных в сечении $z = z_0$. С помощью операторов $U^{(\pm)}(z, z_0)$ распространим их по всему резонатору

$$\psi_{nm}^{(\pm)}(z, r) = U^{(\pm)}(z, z_0)\psi_{nm}^{\pm}(z_0, r). \tag{38}$$

Для каждого сечения z функции (38) представляются в виде (30), где операторы $\Lambda_{\pm j}^{*}(z)$ определяются столбцами матрицы $W(z)$. Остается в силе также условие биортогональности по поперечным координатам (31)

$$\langle\psi_{nm}^{+}(z, r),\ \psi_{st}^{-}(z, r)\rangle = \delta_{ns}\delta_{mt}.$$

3. В результате с учетом вышесказанного получаем набор собственных функций резонатора (соответствующих k_{Nnm})

$$u_{nm}^{\pm}(z, r) = \eta^{\pm}(z)\exp(\pm ik_{Nnm}\tau_0(z))\psi_{nm}^{\pm}(z, r),$$

где функция $\eta^{\pm}(z)$ определяется так же, как в (22).

В случае, если T не диагонализируема, собственные функции, соответствующие k_{Nn}, равны

$$u_n^{+}(z, r) = \eta^{+}(z)\exp(ik_{Nn}\tau_0(z))\psi_{0n}^{+}(z, r),$$

$$u_n^{-}(z, r) = \eta^{-}(z)\exp(-ik_{Nn}\tau_0(z))\psi_{n0}^{-}(z, r). \tag{39}$$

4. Значения k, определяемые из (36), (37), оказываются, вообще говоря, комплексными, и, строго говоря, в качестве условия сосредоточенности решений $u^{(\pm)}$ следует использовать знакоопределенность мнимой части матрицы kH, а не матрицы H. Кроме того, невещественность k скажется на характере зависимости волнового поля от времени: наряду с гармонической составляющей возникает также экспоненциальный рост (если преобладает усиление) или затухание (если преобладает поглощение). Для того чтобы эти процессы были не слишком быстрыми, мнимая часть k (при достаточно больших N) должна быть мала по сравнению с вещественной. Тогда комплексность k не оказывает решающего влияния на факт сосредоточенности решения (мнимые части H и kH будут знакоопределены одновременно).

Заключение

Таким образом, в настоящей работе 1) дано представление высших мод для волн различных направлений в терминах операторов рождения и уничтожения и указана связь между операторами рождения и уничтожения для волн противоположных направлений; 2) установлена биортогональность систем мод для волн различных направлений в смысле вещественного скалярного произведения; 3) выписаны собственные значения волновых чисел кольцевых оптических резонаторов в терминах собственных чисел $ABCD$-матриц; 4) приведен пример резонатора, обладающего однонаправленной устойчивостью на первой поперечной моде (рис. 1, 2).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской федерации (грант № E00-3.2-164).

Список литературы

[1] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
[2] *Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М.* // Опт. и спектр. 2002. Т. 93. № 5. С. 851–859.
[3] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
[4] *Bastiaans M.J.* // Optik. 1991. Vol. 88. N 4. P. 163–168.
[5] *Головнин И.В., Ковригин А.И., Коновалов А.Н., Лаптев Г.Д.* // Квантовая электрон. 1995. Т. 22. № 5. С. 461–463.
[6] *Kogelnik H.* // Bell Syst. Techn. J. 1965. Vol. 44. N 3. P. 455–493.
[7] *Джеррард А., Берч Дж.М.* Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 341 с.
[8] *Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. № 2. С. 330–335.
[9] *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. С. 265–302.
[10] *Ананьев Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990. 263 с.
[11] *Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. № 1. С. 130–136.