01;03

Нелинейные колебания заряженной капли в третьем порядке малости по амплитуде многомодовой начальной деформации

© А.Н. Жаров, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 15 апреля 2003 г.)

Методом многих масштабов найдено решение задачи о нелинейных осцилляциях поверхности заряженной капли идеальной жидкости с учетом поправок третьего порядка малости по величине многомодовой начальной деформации равновесной сферической формы. Показано, что спектр мод, вовлеченных в рельефообразование поверхности капли в произвольный момент времени, существенно зависит от спектра мод, определяющих начальную деформацию капли, который влияет и на величины нелинейных поправок к частотам осцилляций, а следовательно, и на величину нелинейной поправки к критическому значению параметра Рэлея, определяющего устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

1. Известный интерес со стороны исследователей к изучению нелинейной динамики и неустойчивости заряженной поверхности жидкости в различных геометриях связан с многочисленными приложениями феномена в геофизике, технической физике, научном приборостроении и химической технологии [1–3].

Одной из первых работ, посвященных исследованию нелинейных осцилляций поверхности заряженной капли идеальной жидкости, является статья Тсамополуса и Брауна [4], в которой приведено решение задачи о нелинейных колебаниях поверхности заряженной капли при одномодовой начальной деформации, когда начальная форма капли в сферической системе координат (r, ϑ, φ) описывается уравнением

$$r = R + \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \varepsilon P_m(\cos\vartheta),$$

где ε — произвольный малый параметр, определяющий амплитуду начальной деформации, $P_m(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра порядка m, ξ_0 — константа, подобранная так, чтобы объем капли при указанной начальной деформации оставался равным объему сферической капли радиуса R. В [4] аналитическое выражение для образующей капли, совершающей нелинейные осцилляции, было приведено с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде начальной деформации. Кроме того, в [4] были рассчитаны аналитические выражения для нелинейных поправок к частотам осцилляций для фиксированных начальных деформаций, появляющиеся лишь в третьем порядке малости, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными [5]. Однако все исследование было выполнено для ограниченного спектра начальных деформаций формы капли: когда начальная деформация капли определялась второй ($n = 2$), третьей ($n = 3$) или четвертой ($n = 4$) модой.

Исследование, начатое в [4], было продолжено в [6], где во втором порядке приближений по ε была проанализирована ситуация с начальным возбуждением произвольной m-ой моды. В [6] было также показано, что спектр мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, содержит только моды с четными номерами из диапазона $[0.2m]$. Также выяснилось, что нелинейные осцилляции поверхности капли происходят в окрестности фигуры, типа вытянутого сфероида, а не в окрестности сферы, как это следовало из линейного анализа.

Ситуация, когда начальная форма поверхности описывается выражением

$$r = R + \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \xi_1 P_1(\cos\vartheta) + \varepsilon\big(h_{n_1} P_{n_1}(\cos\vartheta) + h_{n_2} P_{n_2}(\cos\vartheta)\big),$$

где ξ_1 — константа, определяемая из условия неподвижности центра масс капли при нелинейных осцилляциях, h_{n_1}, h_{n_2} — константы, учитывающие парциальный вклад каждой моды в начальную деформацию сферической поверхности, рассмотрена в квадратичном приближении по ε в [7]. В работе [7] исследованы также закономерности реализации нелинейного резонансного обмена энергией между модами, имеющем место при условии выполнения соотношения:

$$\omega_{n_1} = 2\omega_{n_2},$$

где $\omega_n = (\sigma/\rho R^3)\sqrt{n(n-1)(n+2-W)}$ — частота n-ой моды капиллярных колебаний капли, $W = Q^2/(4\pi\sigma R^3)$ — параметр Рэлея.

Случай, когда начальная деформация поверхности капли определяется суперпозицией произвольного конечного числа мод, проанализирован в [8]. В такой ситуации начальная форма поверхности капли описывается уравнением

$$r = R + \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \xi_1 P_1(\cos\vartheta) + \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\cos\vartheta),$$

где Ω — множество номеров изначально возбужденных мод, h_m — константа, учитывающая парциальный вклад m моды в формирование начальной деформации сферической формы капли. Исследования, выполненные в [8], были проведены с точностью до величин второго порядка малости по величине ε, что позволило получить аналитические выражения для нелинейных поправок к амплитудам мод. Анализ этих выражений показал, что спектр мод второго порядка малости может содержать как четные, так и нечетные моды. Так, например, при возбуждении двух мод с номерами n_1 и n_2 в спектре второго порядка малости будут содержаться только четные моды с номерами из диапазона $[0, \max\{2n_1, 2n_2\}]$, если n_1 и n_2 имеют одновременно либо четные либо нечетные значения. Если же n_1 четно, а n_2 нечетно, то спектр второго порядка будет содержать четные моды с номерами $[0, \max\{2n_1, 2n_2\}]$ и нечетные из диапазона $[|n_1-n_2|, n_1+n_2]$.

В [9] расчет нелинейных осцилляций заряженной капли в третьем порядке малости по амплитуде начальной деформации был проведен при произвольной одномодовой начальной деформации, получены аналитические выражения для образующей капли и нелинейных поправок к частотам. В [10] указано на существование внутренних нелинейных резонансов, реализующихся в заряженной капле при четырехмодовом взаимодействии, когда начальная деформация капли определена суперпозицией нескольких мод.

В настоящей работе, выполненной в развитие [9,10], предполагается изучить особенности реализации нелинейных осцилляций капли в третьем порядке малости по амплитуде начальной многомодовой деформации и найти в такой ситуации аналитические выражения для поправок к частотам осцилляций.

2. Пусть имеется капля радиуса R идеальной идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного нятяжения σ, несущая заряд Q. Движение жидкости в капле, связанное с ее капиллярными осцилляциями, примем потенциальным с потенциалом скорости ψ. Потенциал электростатического поля собственного заряда в окрестности капли обозначим ϕ. Форму капли будем считать осесимметричной как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение поверхности капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, в произвольный момент времени t запишется в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0. \tag{1}$$

Начальную деформацию формы капли зададим в виде суперпозиции нескольких мод

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \xi_1 P_1(\cos\vartheta) + \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\cos\vartheta); \tag{2}$$

а начальную скорость всех точек на поверхности капли примем нулевой

$$t = 0: \qquad \partial_t \xi = 0, \tag{3}$$

где знак ∂_t означает частную производную по переменной t.

Полная математическая формулировка задачи о капиллярных колебаниях заряженной капли, кроме уравнения поверхности капли (1) и начальных условий (2), (3) содержит [11,12]: уравнения Лапласа для потенциалов скорости жидкости и электрического поля

$$\Delta\psi = 0; \qquad \Delta\phi = 0; \tag{4}$$

условия ограниченности потенциалов

$$r \to 0: \qquad \psi \to 0; \tag{5}$$

$$r \to +\infty: \qquad \nabla\phi \to 0; \tag{6}$$

кинематическое и динамическое граничные условия

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \qquad \frac{dF}{dt} = 0; \tag{7}$$

$$\partial_t\psi + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 = p + p_q - p_{am} - p_\sigma; \tag{8}$$

условие неизменности объема капли

$$\int_V r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3}; \tag{9}$$

$$V = \left\{ r, \vartheta, \varphi \;\middle|\; 0 \le r \le 1 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\};$$

условие неподвижности центра масс

$$\overrightarrow{\int_V} \mathbf{r} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 0; \tag{10}$$

условие постоянства полного заряда

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \overrightarrow{\int_S} \mathbf{n} \cdot \nabla\phi \, dS = -4\pi Q; \tag{11}$$

$$S = \left\{ r, \vartheta, \varphi \;\middle|\; r = 1 + \xi; \quad 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\};$$

условие постоянства электрического потенциала вдоль поверхности

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \qquad \phi = \phi_S(t); \tag{12}$$

в выражениях (4)–(12) p — давление внутри капли в равновесном состоянии: p_q и p_σ — давление электрического поля и капиллярное, p_{am} — атмосферное давление; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности капли; ϕ_S — электрический потенциал поверхности капли.

Для удобства записи дальнейших выражений расширим множество констант h_m дополнив его так, что при любых $m \in \Omega$ имеем $h_m \equiv 0$.

3. Задачу (1)–(12) будем решать методом многих масштабов [13]. Для этого введем три различных временных масштаба $T_m = \varepsilon^m t$, $m = 0, 1, 2$, а искомые величины задачи представим в виде разложений

$$\phi(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{3} \varepsilon^n \phi^{(n)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4), \qquad (13)$$

$$\phi_S(r, t) = \sum_{n=0}^{3} \varepsilon^n \phi_S^{(n)}(r, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4); \qquad (14)$$

$$\psi(r, \vartheta, t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \psi^{(n)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4);$$

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \xi^{(n)}(\vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4); \qquad (15)$$

где $\phi^{(0)} = Q/r$; $\phi_S^{(0)} = Q$ — решения нулевого порядка малости, т. е. для равновесной сферической поверхности капли.

Подставляя (13)–(15) в (1)–(12) получим задачи различных порядков малости, которые для краткости изложения вынесены в „Приложение А“.

Поскольку уравнение Лапласа (4) является линейным, то в каждом порядке малости потенциалы скорости жидкости и электрического поля будут являться решениями уравнений Лапласа (1А), (10А), (19А), и с учетом условий ограниченности их можно записать в виде

$$\psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) = = \sum_{n=1}^{\infty} r^n D_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2) P_n(\cos\vartheta); \quad m = 1, 2, 3; \qquad (16)$$

$$\phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) = = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta); \quad m = 1, 2, 3. \qquad (17)$$

Заметим, что в выражении (16) суммирование начинается с $n = 1$ поскольку, как известно, потенциал определяется с точностью до произвольной функции времени, что позволяет принять $D_0^{(m)} = 0$.

Функцию, описывающую отклонение формы поверхности капли от сферической в произвольный момент времени, представим в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, T_2) = = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2) P_n(\cos\vartheta); \quad m = 1, 2, 3. \qquad (18)$$

Подстановка выражений (16)–(18) в уравнения (1А)–(9А) позволяет определить явные зависимости величин первого порядка малости от T_0.

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = a_n^{(1)}(T_1, T_2) \cos\big(\omega_n T_0 + \tau_n^{(1)}(T_1, T_2)\big); \qquad (19)$$

$$D_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = \partial_{T_0} M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)/n; \qquad (20)$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = Q M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2). \qquad (21)$$

В выражении (19) амплитудный множитель $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и нелинейная поправка к частоте $\tau_n^{(1)}(T_1, T_2)$ — функции, зависящие только от времен T_1 и T_2.

При решении задачи с точностью до величин первого порядка малости по величине начальной деформации поверхности капли функции $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $\tau_n^{(1)}(T_1, T_2)$ следует считать постоянными, значения которых определяются из начальных условий (9А), и имеют вид

$$a_n^{(1)} = h_n, \quad \tau_n^{(1)} = 0, \quad n \in \Omega. \qquad (22)$$

Из выражений (22) следует, что величины $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ отличны от нуля только когда $n \in \Omega$.

При решении задачи с точностью до величин третьего порядка малости по величине начальной деформации зависимости $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $\tau_n^{(1)}(T_1, T_2)$ от T_1 и T_2 определяются из требования обращения в ноль секулярных членов в задачах второго и третьего порядков малости соответственно, при учете начальных условий (9А).

Подставляя выражения (16)–(21) в уравнения (13А)–(18А) и исключая секулярные члены, найдем, что функции $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $\tau_n^{(1)}(T_1, T_2)$ не зависят от временного масштаба T_1. Явные зависимости величин второго порядка малости от временного масштаба T_0 с учетом (22) можно записать в виде

$$M_0^{(2)}(T_0) = -\sum_{m\in\Omega} \frac{(a_m^{(1)})^2 \cos^2(\omega_m T_0)}{2m+1};$$

$$M_1^{(2)}(T_0) = \sum_{m\in\Omega} \chi_m a_m^{(1)} a_{m+1}^{(1)} \cos(\omega_m T_0)\cos(\omega_{m+1} T_0);$$

$$M_n^{(2)}(T_0, T_1) = a_n^{(2)}(T_1)\cos\big(\omega_n T_0 + \tau_n^{(2)}(T_1)\big) + \sum_{l,m\in\Omega} \frac{a_l^{(1)} a_m^{(1)}}{2} \Big(\lambda_{lmn}^{(+)} \cos\big((\omega_l + \omega_m)T_0\big) + \lambda_{lmn}^{(-)} \cos\big((\omega_l - \omega_m)T_0\big)\Big); \qquad (23)$$

$$F_0^{(2)} = 0; \quad F_n^{(2)}(T_0, T_1, T_2) = Q M_n^{(2)}(T_0, T_1) + Q \sum_{l,m\in\Omega} l K_{lmn} a_l^{(1)} a_m^{(1)} \cos(\omega_l T_0)\cos(\omega_m T_0); \; n \geq 1; \qquad (24)$$

$$D_n^{(2)}(T_0,T_1)=\frac{1}{n}\Bigg\{\partial_{T_0}M_n^{(2)}(T_0,T_1)+\sum_{l,m\in\Omega}\big(l(l-1)K_{lmn}-\alpha_{lmn}\big)$$

$$\times\frac{\omega_l}{l}\,a_l^{(1)}a_m^{(1)}\sin(\omega_l T_0)\cos(\omega_m T_0)\Bigg\};\quad n\geq 1;\qquad(25)$$

где $\chi_m,\lambda_{lmn}^{(+)},\lambda_{lmn}^{(-)},K_{lmn},\alpha_{lmn}$ — коэффициенты, определенные в Приложении В. Выражения для $a_n^{(2)}$ и $\tau_n^{(2)}$, удовлетворяющие начальным условиям (18A), имеют вид

$$a_n^{(2)}=-\sum_{l,m\in\Omega}\frac{h_lh_m}{2}\big(\lambda_{lmn}^{(+)}+\lambda_{lmn}^{(-)}\big),\qquad \tau_n^{(2)}=0.\qquad(26)$$

Подставляя (16)–(21), (23)–(25) в систему уравнений (22А)–(28А) и исключая из решений секулярные слагаемые, находим, что функция $a_n^{(1)}(T_2)$, $a_n^{(2)}(T_1)$ и $\tau_n^{(2)}(T_1)$ не зависят от временных масштабов T_1 и T_2, и равны своим начальным значениям (22) и (26). Для функции $\tau_n^{(1)}(T_2)$ справедливо выражение

$$\tau_n^{(1)}(T_2)=T_2b_n$$

$$=\frac{T_2}{2\omega_n}\Bigg\{\sum_{k\in\Omega}\frac{h_k^2\Xi_n}{2(2k+1)}+\frac{h_n^2(2(n-1)\omega_n^2+\Xi_n)}{4(2n+1)}$$

$$-\frac{\chi_{n-1}h_{n-1}^2}{4}\big(\beta_{n-1,n,1,n-1,n}^{2(+)}+\beta_{n-1,n,1,n-1,n}^{2(-)}\big)$$

$$-\frac{\chi_nh_n^2}{4}\big(\beta_{n+1,n+1,1,n,n}^{1(-)}+\beta_{n+1,n+1,1,n,n}^{2(+)}\big)$$

$$-\sum_{k\in\Omega}\frac{h_k^2}{4}\Big[H_{nkkn}^{1(-)(+)}+H_{knkn}^{2(+)(+)}+H_{knkn}^{2(-)(-)}+(1-\delta_{kn})$$

$$\times\big(H_{kknn}^{1(-)(+)}+H_{kknn}^{2(+)(+)}+H_{nkkn}^{2(-)(-)}\big)\Big]\Bigg\},\qquad(27)$$

а коэффициенты разложений (16)–(18) определяются выражениями

$$M_0^{(3)}(T_0)=-\sum_{k\in\Omega}\frac{2M_k^{(2)}(T_0)}{2k+1}\,h_k\cos(\omega_kT_0)$$

$$-\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{K_{kml}h_kh_mh_l}{3(2l+1)}\cos(\omega_kT_0)\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0);$$

$$M_1^{(3)}(T_0)=-\frac{6}{5}\,M_1^{(2)}(T_0)h_2\cos(\omega_2T_0)$$

$$-3\sum_{m\in\Omega}\sum_{k=0}^{\infty}K_{kml}M_k^{(2)}(T_0)h_m\cos(\omega_mT_0)$$

$$-\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}K_{kmg}K_{gl1}h_kh_mh_l\cos(\omega_kT_0)$$

$$\times\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0);$$

$$M_n^{(3)}(T_0)=-\sum_{k\in\Omega}\frac{h_nh_k^2(2(n-1)\omega_n\omega_k-\Xi_n)}{16(2k+1)\omega_k(\omega_n+\omega_k)}$$

$$\times\big(\cos((\omega_n+2\omega_k)T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)$$

$$-\sum_{k\in\Omega}\frac{h_nh_k^2(1-\delta_{nk})(2(n-1)\omega_n\omega_k+\Xi_n)}{16(2k+1)\omega_k(\omega_n-\omega_k)}$$

$$\times\big(\cos((\omega_n-2\omega_k)T_0)+\cos(\omega_nT_0)\big)+\sum_{k=n-1}^{n+1}\sum_{l\in\Omega}\frac{\chi_lh_kh_lh_{l+1}}{4}$$

$$\times\Bigg\{\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{1(+)}\big(\cos(\psi_{k,l,l+1}^{(+)(+)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\big(\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l+\omega_{l+1})^2\big)}$$

$$+\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{1(-)}D_{k,l+1}^{ln}\big(\cos(\psi_{k,l,l+1}^{(+)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\big(\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l-\omega_{l+1})^2\big)}$$

$$+\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{2(+)}D_{l,n-1}^{kl}D_{k,l+1}^{ln}\big(\cos(\psi_{k,l,l+1}^{(-)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\big(\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l-\omega_{l+1})^2\big)}$$

$$+\frac{\beta_{k,l+1,1,l,n}^{2(-)}D_{l,n-1}^{kl}\big(\cos(\psi_{k,l+1,l}^{(+)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\big(\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l+\omega_{l+1})^2\big)}\Bigg\}$$

$$-\sum_{g=2}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l(\lambda_{lmg}^{(+)}+\lambda_{lmg}^{(-)})}{4}$$

$$\times\Bigg\{\frac{H_{kgn}^{0(+)}\big(\cos((\omega_k+\omega_g)T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_g)^2}$$

$$+\frac{H_{kgn}^{0(-)}\big(\cos((\omega_k-\omega_g)T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_g)^2}\Bigg\}$$

$$+\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l}{4}\Bigg\{\frac{H_{kmln}^{1(+)(-)}\big(\cos(\psi_{klm}^{(+)(+)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l+\omega_m)^2}$$

$$+\frac{H_{kmln}^{1(-)(+)}D_{lm}^{kn}D_{km}^{ln}\big(\cos(\psi_{klm}^{(+)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l-\omega_m)^2}$$

$$+\frac{H_{kmln}^{2(+)(+)}D_{kl}^{mn}D_{km}^{ln}\big(\cos(\psi_{klm}^{(-)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l-\omega_m)^2}$$

$$+\frac{H_{kmln}^{2(-)(-)}D_{kl}^{mn}D_{ml}^{kn}\big(\cos(\psi_{klm}^{(+)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l+\omega_m)^2}\Bigg\};\quad(28)$$

$$F_0^{(3)}(T_0)=Q\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{k+1}{2l+1}\left(\alpha_{kml}-\frac{k(k+1)}{2}\,K_{kml}\right)$$

$$\times h_kh_mh_l\cos(\omega_kT_0)\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0);$$

$$F_n^{(3)}(T_0)=QM_n^{(3)}(T_0)+\sum_{m\in\Omega}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)K_{kmn}F_k^{(2)}(T_0)$$

$$\times h_m\cos(\omega_mT_0)+Q\sum_{k\in\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}(k-1)K_{kmn}M_m^{(2)}(T_0)$$

$$\times h_k\cos(\omega_kT_0)-Q\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{k(k+3)}{2}\,K_{kmg}K_{gln}$$

$$\times h_kh_mh_l\cos(\omega_kT_0)\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0);\quad n\geq 1;\qquad(29)$$

$$D_n^{(3)}(T_0, T_2) = \frac{1}{n}\,\partial_{T_0} M_n^{(3)}(T_0) - \frac{1-\delta_{1n}}{n}\,h_n b_n \sin(\omega_n T_0)$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{m\in\Omega}\sum_{k=1}^{\infty}\big(k(k-1)K_{kmn} - \alpha_{kmn}\big)D_k^{(2)}(T_0)h_m\cos(\omega_m T_0)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k\in\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}\big(k(k-1) - \alpha_{kmn}\big)M_m^{(2)}(T_0)\omega_k h_k \sin(\omega_k T_0)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k,m,l\in\Omega}\sum_{g=0}^{\infty}\left(\frac{k(k-1)}{2}\,K_{kmg} - \alpha_{kmg}\right)(k-2)K_{gln}\omega_k$$

$$\times\, h_k h_m h_l \sin(\omega_k T_0)\cos(\omega_m T_0)\cos(\omega_l T_0); \quad n \ge 1, \quad (30)$$

где Ξ_n, $\beta^{1(\pm)}_{kmgln}$, $\beta^{2(\pm)}_{kmgln}$, $H^{0(\pm)}_{kgn}$, $H^{1(\pm)(\pm)}_{kmln}$, $H^{2(\pm)(\pm)}_{kmln}$, $\psi^{(\pm)(\pm)}_{kml}$, D^{kn}_{lm} — коэффициенты, вынесенные в „Приложение B“, δ_{kn} — символ Кронекера.

Подставляя (18) в (1), найдем выражение для образующей капли в виде

$$r(\vartheta, T_0, T_2) = 1 + \varepsilon\sum_{m\in\Omega} M_n^{(1)}(T_0, T_2)P_n(\cos\vartheta)$$

$$+\,\varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}\big(M_n^{(2)}(T_0) + \varepsilon M_n^{(3)}(T_0)\big)P_n(\cos\vartheta). \quad (31)$$

4. Для анализа выражения (31) заметим, что амплитуды отклонения поверхности капли от равновесной сферической формы пропорциональны следующим выражениям (см. выражения (23) и (28)):

$$M_g^{(2)} \sim \sum_{k,m\in\Omega} K_{kmg}, \quad M_n^{(3)} \sim \sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega} K_{kmg}K_{gln},$$

где коэффициенты K_{kmg} отличны от нуля, только если $|k-m| \le g \le |k+m|$ и $k+m+g$ — четное число.

Таким образом, если изначально возбуждается только одна мода, т.е. $\Omega = \{n_1\}$, то во втором порядке малости возбуждаются только четные моды с номерами из диапазона $0 \le g \le 2n_1$, а в третьем порядке при четном n_1 возбуждаются четные моды из диапазона $0 \le n \le 3n_1$, а при нечетном n_1 возбуждаются нечетные моды из диапазона $1 \le n \le 3n_1$. Таким образом, при четном n_1 поверхность капли формируется четными модами из диапазона $[0, 3n_1]$, а при нечетном n_1 — всеми модами из диапазона $[0, 2n_1]$ и нечетными из диапазона $[2n_1+1,\ 3n_1]$.

Если изначально возбуждаются две моды с номерами n_1 и n_2, т.е. $\Omega = \{n_1, n_2\}$, то множество мод вовлеченных в формирование поверхности капли еще более расширяется.

Так если n_1 и n_2 — четные числа, то спектр мод второго порядка содержит только четные моды с индексами из диапазона $0 \le g \le \max\{2n_1, 2n_2\}$, а спектр третьего порядка формируется четными модами из диапазона $0 \le n \le \max\{3n_1, 3n_2\}$, т.е. суммарная поверхность капли формируется четными модами из диапазона $[0, \max\{3n_1, 3n_2\}]$.

Если номера изначально возбужденных мод n_1 и n_2 являются нечетными, то во втором порядке малости возбуждаются четные моды с номерами из диапазона $0 \le g \le \max\{2n_1, 2n_2\}$, а в третьем порядке малости участвуют в формировании поверхности только нечетные моды с номерами, удовлетворяющими условию $1 \le n \le \max\{3n_1, 3n_2\}$; т.е. поверхность формируется всеми модами из диапазона $[0, \max\{2n_1, 2n_2\}]$ и нечетными с номерами из промежутка $[\max\{2n_1+1, 2n_2+1\},\ \max\{3n_1, 3n_2\}]$.

Если же номера изначально возбужденных мод таковы, что n_1 четное, а n_2 нечетное, то спектр второго порядка малости содержит моды с четными номерами из диапазона $0 \le g \le \max\{2n_1, 2n_2\}$ и нечетные с номерами $|n_1 - n_2| \le g \le n_1 + n_2$. Спектр же третьего порядка малости содержит четные моды с номерами из диапазона $0 \le n \le \max\{3n_1, n_1 + 2n_2\}$ и нечетные с номерами $1 \le n \le \max\{3n_2, 2n_1 + n_2\}$. В итоге суммарная поверхность капли формируется четными модами из диапазона $[0, \max\{3n_1, n_1 + 2n_2\}]$ и нечетными с номерами из промежутка $[1, \max\{3n_2, 2n_1 + n_2\}]$. Видно, что учет величин третьего порядка малости по величине начальной деформации приводит к существенному расширению спектра мод, вовлеченных в формирование поверхности капли.

Учет величин третьего порядка малости приводит к нелинейному сдвигу частот изначально возбужденных мод, пропорциональному квадрату амплитуды начальной деформации ε^2. Знак поправки к частоте всегда отрицателен, а ее величина существенно зависит от спектра мод, вовлеченных в формирование поверхности капли в начальный момент времени, и от величины заряда капли. Так, если изначально возбуждаются две моды, одна из которых основная $n = 2$, то наблюдается увеличение поправок к частотам по сравнению с ситуацией одномодовой начальной деформации поверхности капли, исследованной в [4]. На рис. 1 приведены зависимости поправок к частотам различных пар мод, возбужденных в начальный момент времени, от величины безразмерного параметра W. Видно, что величина поправки к частоте основной моды зависит от того, какая из мод возбуждается вместе с ней в начальный момент времени: с ростом номера моды, возбуждающейся одновременно с основной, величина поправки к частоте основной моды увеличивается. Если вспомнить, что критические условия реализации неустойчивости капли определяются требованием перехода с ростом параметра W квадрата частоты основной моды через нуль [3,9], то становится ясно, что учет нелинейной поправки к частоте основной моды приводит к снижению критического значения параметра W в соответствии с выражением [9] $\omega_2^2 + 2\cdot\varepsilon^2\cdot b_2 = 0$. Вытекающая из этого соотношения нелинейная поправка к критическим условиям реализации неустойчивости капли тем заметнее, чем более высокая мода возбуждается в начальный момент времени одновременно с основной.

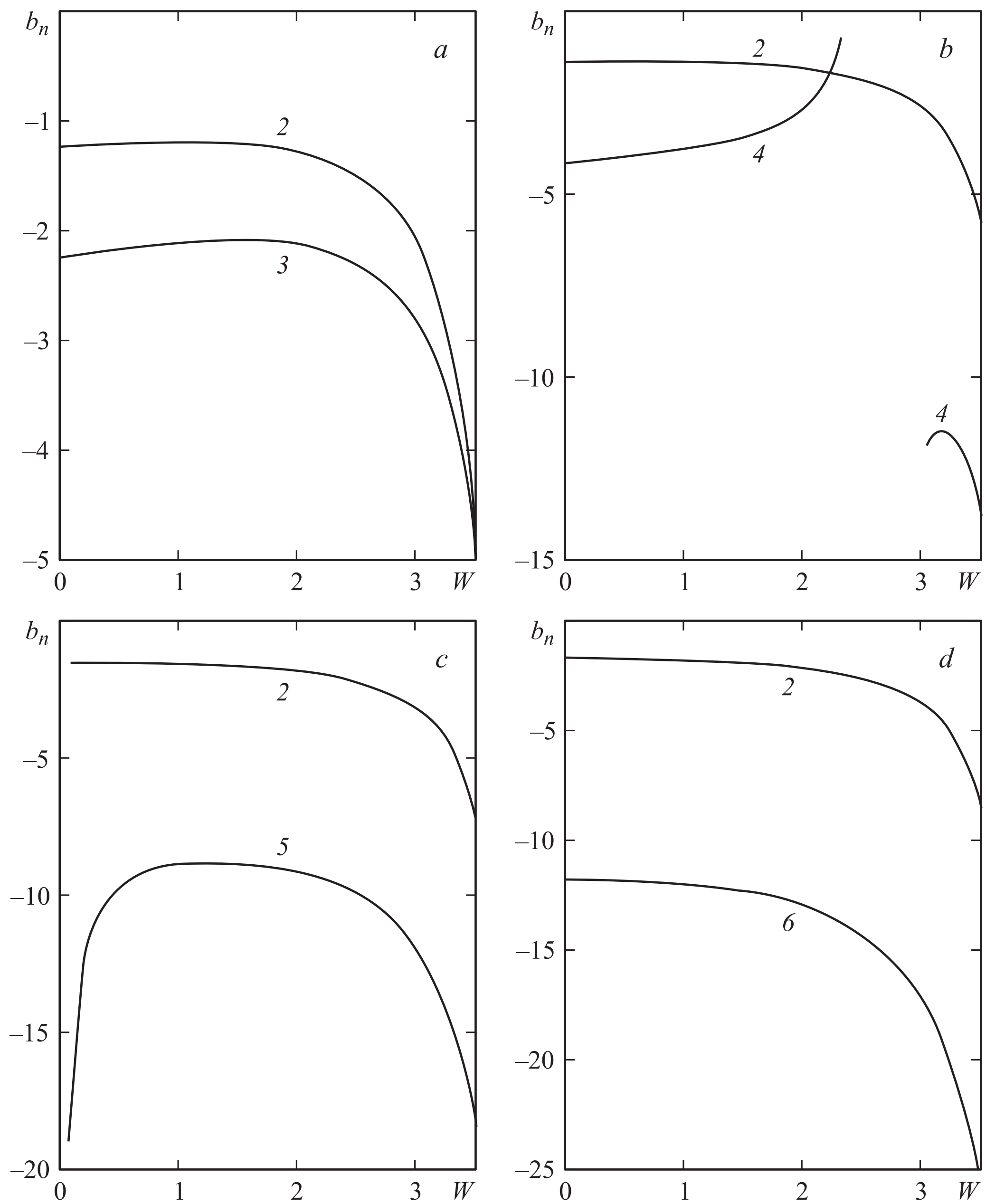

Рис. 1. Зависимости коэффициента b_n от параметра Рэлея $W = Q^2/4\pi$ при начальном возбуждении различных пар мод. a — начальная деформация определена второй и третьей модами, b — начальная деформация определена второй и четвертой модами, c — начальная деформация определена второй и пятой модами, d — начальная деформация определена второй и шестой модами. Номер кривой совпадает с номером изначально возбужденной моды.

Разрыв кривой, соответствующей поправке к частоте четвертой моды, на рис. 1, b связан с внутренним нелинейным резонансным взаимодействием между четвертой и шестой модами [4,8,9].

Численный анализ выражения (31) указывает на то, что наибольшим отклонениям от равновесного состояния подвергаются элементы поверхности капли, располагающиеся в окрестности оси симметрии (рис. 2, 3). Это связано с тем, что только при углах ϑ, близких к $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, наблюдается суммирование колебаний отдельных мод. Вдали от этих значений ϑ формируется более гладкая волнообразная поверхность. Указанная тенденция тем выше, чем больше значение номеров изначально возбужденных мод.

Напряженность электростатического поля на свободной поверхности капли определяется выражением

$$E = E_n^{(0)} + \varepsilon \sum_{m\in\Omega} E_n^{(1)} P_n(\cos\vartheta) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (E_n^{(2)} + \varepsilon E_n^{(3)}) P_n(\cos\vartheta); \qquad (32)$$

$$E_n^{(0)} = Q = 2\sqrt{\pi W}; \qquad E_n^{(1)} = Q(n-1)\,M_n^{(1)};$$

$$E_n^{(2)} = (n+1)F_n^{(2)} - 2QM_n^{(2)} + Q\sum_{k,m\in\Omega}\Big[\big(3-(m+1)(m+2)\big)K_{kmn} + \alpha_{kmn}/2\Big]h_k h_m\cos(\omega_k T_0)\cos(\omega_m T_0);$$

$$E_n^{(3)} = (n+1)F_n^{(3)} - 2QM_n^{(3)} + \sum_{\substack{k\in\Omega\\ m=0}}^{\infty}\big(\alpha_{kmn} - (m+1)(m+2)K_{kmn}\big)h_k\cos(\omega_k T_0)F_m^{(2)} - Q\sum_{\substack{m=0\\ k\in\Omega}}^{\infty}(k+4)(k-1)K_{kmn}h_k\cos(\omega_k T_0)M_m^{(2)} + Q\sum_{\substack{g=0\\ k,m,n\in\Omega}}^{\infty}\Big[\big((k+1)(k+2)(k+3)/2-4\big)K_{kmg} - \big((l+1)/2+k+l\big)\alpha_{kmg}\Big]K_{gln}\, h_k h_m h_l\cos(\omega_k T_0)\cos(\omega_m T_0)\cos(\omega_l T_0).$$

Согласно данным расчетов по (32), напряженность поля собственного заряда в окрестности нелинейно осциллирующей капли существенно возрастает на полюсах капли при ее вытягивании (см. рис. 4, 5), что может привести к зажиганию у поверхности капли коронного разряда. Это обстоятельство представляет интерес в связи проблемой инициирования разряда молнии [14,15]. Согласно существующим представлениям разряд, молнии может начаться с коронного разряда в окрестности падающей в облаке обводненной градины или крупной капли. Признанию такого механизма инициирования разряда молнии препятствует то, что собственные заряды капель, регистрируемые при натурных измерениях в грозовых облаках, слишком малы для того, чтобы коронный разряд мог зажечься в окрестности невозмущенной

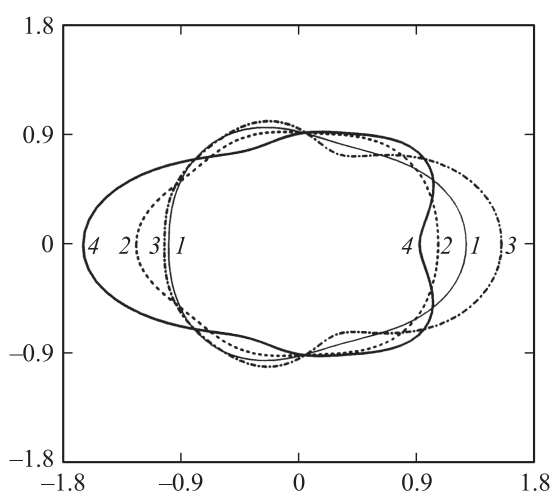

Рис. 2. Контур образующей капли при начальном возбуждении второй и третьей мод для $\varepsilon = 0.3$, $W = 3.7$, $h_2 = h_3 = 0.5$; $t = 0$ (*1*), 1 (*2*), 3 (*3*), 4 (*4*).

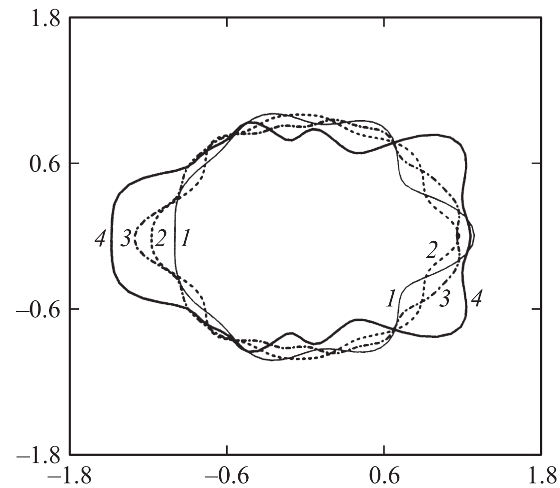

Рис. 3. Контур образующей капли при начальном возбуждении шестой и седьмой мод для $\varepsilon = 0.3$, $W = 3.4$, $h_6 = h_7 = 0.5$; $t = 0$ (*1*), 0.5 (*2*), 1 (*3*), 2 (*4*).

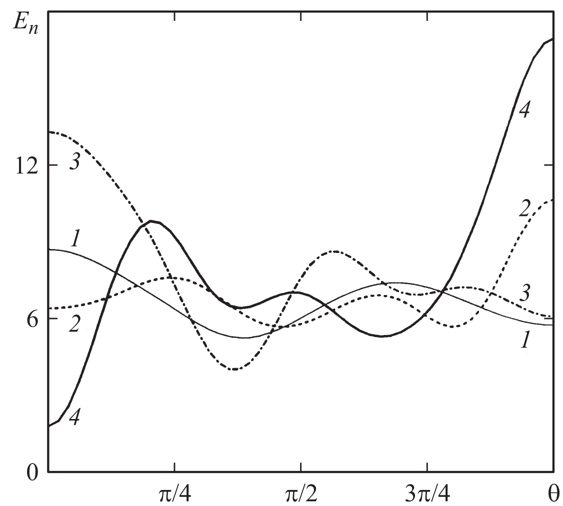

Рис. 4. Зависимость напряженности электрического поля у поверхности капли E от полярного угла ϑ при тех же значениях параметров, что и на рис. 2.

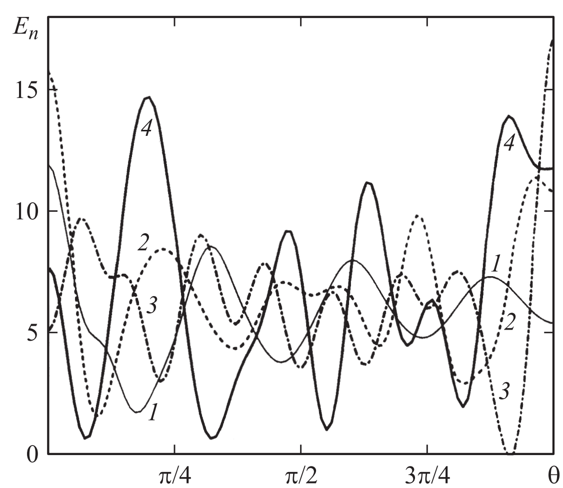

Рис. 5. Зависимость напряженности электрического поля у поверхности капли E от полярного угла ϑ при тех же значениях параметров, что и на рис. 3.

Резонансные комбинации номеров мод и величины параметра Рэлея

n	l	k	m	W
2	20	8	17	1.98141
2	29	12	24	1.39884
2	30	17	21	0.460245
2	9	6	6	0.0460245
2	17	11	11	1.35905
2	25	16	16	1.42339
2	28	18	18	2.9609
3	23	15	15	2.18618
3	28	18	18	0.450789
4	26	17	17	0.577818

капли [16]. Обнаруженный факт значительного усиления электростатического поля у вершин нелинейно осциллирующей капли позволяет посмотреть на обсуждаемую проблему с новых позиций.

Расчеты, приведенные на рис. 2–5, выполнены для случая отсутствия резонансного взаимодействия мод, которое требует отдельного детального рассмотрения [17]. Тем не менее возможность резонансного обмена энергией между модами существует.

Из выражений (28) для нелинейных поправок третьего порядка малости к амплитудам осцилляций $M_n^{(3)}(t)$ несложно видеть, что они имеют резонансный вид: содержат знаменатели, обращающиеся при определенных условиях в нуль. Все новые по сравнению с квадратичным приближением [4,8,9] резонансы соответствуют четырехмодовому взаимодействию капиллярных осцилляций капли, когда частоты резонансно взаимодействующих мод связаны друг с другом одним из соотношений

$$\omega_n \pm \omega_k \pm \omega_l \pm \omega_m = 0.$$

Среди множества реализующихся в заряженной капле внутренних нелинейных резонансов наибольший интерес в связи с проблемой инициирования разряда молнии в грозовых облаках [14,15] представляют такие, в которых основная мода ($n = 2$) увеличивает свою амплитуду за счет перекачки энергии из более высоких мод при докритических в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду значениях параметра Рэлея $W < 4$. Согласно данным расчетов, проведенных во втором порядке малости [6,8,17,18], когда реализуются только трехмодовые резонансы, наинизшая мода, способная приобретать энергию у высоких мод за счет резонансного взаимодействия есть третья. В расчетах третьего порядка малости, когда реализуется четырехмодовое взаимодействие появляется возможность резонансной раскачки и второй моды. Так, если ограничиться условиями

$$\omega_n + \omega_k - \omega_l - \omega_m = 0; \quad W \le 4,$$

то в диапазоне номеров мод $2 \le n, k, l, m \le 30$ реализуются более десятка резонансных четырехмодовых ситуаций, в семи из которых участвует вторая мода. Первые десять из возможных четырехмодовых резонансов приведены в таблице, из которой видно, что первые три резонанса являются истинно четырехмодовыми, а остальные вырожденными, когда в рамках четырехмодового взаимодействия одна из мод участвует дважды.

Заключение

Учет величин третьего порядка малости по амплитуде начальной многомодовой деформации капли позволяет получить нелинейные поправки к частотам капиллярных колебаний капли, которые существенно зависят от величины заряда капли и от спектра изначально возбужденных мод и приводят к появлению нелинейных поправок к критическому для реализации неустойчивости капли значению параметра Рэлея. Учет величин третьего порядка малости по амплитуде начальной многомодовой деформации при расчете образующей нелинейно осциллирующей капли позволяет проследить тенденцию к вытягиванию капли вдоль оси симметрии. Это косвенно указывает на то, что эмиссионные выступы капли формируются наложением большого числа высоких мод [19].

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Выделение задач различного порядка малости

После подстановки разложений (13)–(15) в систему уравнений (1)–(12), выделяя слагаемые пропорциональные ε^1, несложно получить задачу первого порядка малости

$$\Delta\Psi^{(1)} = 0; \qquad \Delta\phi^{(1)} = 0; \tag{1A}$$

$$r \to 0: \qquad \psi^{(1)} \to 0; \tag{2A}$$

$$r \to +\infty: \qquad \nabla\phi^{(1)} \to 0; \tag{3A}$$

$$r = 1: \qquad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(1)}; \tag{4A}$$

$$\partial_{T_0}\psi^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\,\partial_r\phi^{(0)}(\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(0)}) + 2\xi^{(1)} + \Delta_\Omega\xi^{(1)}; \tag{5A}$$

$$\int_{-1}^{1}\xi^{(1)}d(\cos\vartheta) = 0; \qquad \int_{-1}^{1}\xi^{(1)}P_1 d(\cos\vartheta) = 0; \tag{6A}$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)})\right\}d(\cos\vartheta) = 0; \tag{7A}$$

$$\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t); \tag{8A}$$

$$t = 0: \qquad \xi^{(1)} = \varepsilon\sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\cos\vartheta); \quad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = 0. \tag{9A}$$

Слагаемые, пропорциональные ε^2, определяют задачу второго порядка малости, которая имеет вид

$$\Delta\psi^{(2)} = 0; \qquad \Delta\phi^{(2)} = 0; \tag{10A}$$

$$r \to 0: \qquad \psi^{(2)} \to 0; \tag{11A}$$

$$r \to +\infty: \qquad \nabla\phi^{(2)} \to 0; \tag{12A}$$

$r = 1:$

$$\partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)} - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}; \tag{13A}$$

$$\partial_{T_0}\psi^{(2)} + \partial_{T_1}\psi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)} + \frac{1}{2}\,(\partial_r\psi^{(1)})^2$$
$$+ \frac{1}{2}\,(\partial_\vartheta\psi^{(1)})^2 = \frac{1}{8\pi}\big\{2\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)}$$
$$+ (\xi^{(1)})^2\big((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}\big)$$
$$+ (\partial_\vartheta\phi^{(1)})^2 + (\partial_r\phi^{(1)})^2 + 2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}$$
$$+ 2\xi^{(1)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)} + \partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)}\big)\big\}$$
$$+ 2\xi^{(2)} + \Delta_\Omega\xi^{(2)} - 2(\xi^{(1)})^2 - 2\xi^{(1)}\Delta_\Omega\xi^{(1)}; \tag{14A}$$

$$\int_{-1}^{1}\big(\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2\big)d(\cos\vartheta) = 0;$$
$$\int_{-1}^{1}\big(2\xi^{(2)} + 3(\xi^{(1)})^2\big)P_1 d(\cos\vartheta) = 0; \tag{15A}$$

$$\int_{-1}^{1}\Big\{\partial_r\phi^{(2)} + \xi^{(1)}\big(\partial_{rr}\phi^{(1)} + 2\partial_r\phi^{(1)}\big) + \xi^{(2)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\big)$$
$$+ (\xi^{(1)})^2\Big(\frac{1}{2}\,\partial_{rrr}\phi^{(0)} + 2\partial_{rr}\phi^{(0)} + \partial_r\phi^{(0)}\Big) - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}\Big\}$$
$$\times d(\cos\vartheta) = 0; \tag{16A}$$

$$\phi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} + \frac{1}{2}\,\big(\xi^{(1)}\big)^2\partial_{rr}\phi^{(0)} = \phi_S^{(2)}(t); \tag{17A}$$

$t = 0:$

$$\xi^{(2)} = -\sum_{m\in\Omega}\frac{h_m P_0(\cos\vartheta)}{2m+1} - \frac{3}{2}\sum_{l,m\in\Omega} h_l h_m K_{lml} P_1(\cos\vartheta);$$

$$\partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)} = 0. \tag{18A}$$

Задача третьего порядка малости определяется слагаемыми, пропорциональными ε^3, и имеет вид

$$\Delta\psi^{(3)} = 0; \qquad \Delta\phi^{(3)} = 0; \tag{19A}$$

$$r \to 0: \qquad \psi^{(3)} \to 0; \tag{20A}$$

$$r \to +\infty: \qquad \nabla\phi^{(3)} \to 0; \tag{21A}$$

$r = 1:$

$$\partial_{T_0}\xi^{(3)} + \partial_{T_1}\xi^{(2)} + \partial_{T_2}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(3)} - \partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}$$
$$- \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(2)} + \xi^{(2)}\partial_{rr}\psi^{(1)} + \xi^{(1)}\big(\partial_\vartheta\xi^{(1)}(2\partial_\vartheta\psi^{(1)}$$
$$- \partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}) + \partial_{rr}\psi^{(2)}\big) + \frac{1}{2}\,(\xi^{(1)})^2\partial_{rrr}\psi^{(1)}; \tag{22A}$$

$$\partial_{T_0}\psi^{(3)} + \partial_{T_2}\psi^{(1)} + \partial_{T_1}\psi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_1}\psi^{(1)} + \partial_\vartheta\psi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(2)}$$
$$+ \partial_r\psi^{(1)}\partial_r\psi^{(2)} + \xi^{(2)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)} + \xi^{(1)}\big(\partial_{rT_0}\psi^{(2)}$$
$$+ \partial_\vartheta\psi^{(1)}(\partial_{r\vartheta}\psi^{(1)} - \partial_\vartheta\psi^{(1)}) + \partial_r\psi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)}\big)$$
$$+ \frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\partial_{rrT_0}\psi^{(1)} = \frac{1}{8\pi}\Big\{2\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)}$$
$$+ (\xi^{(1)})^3\Big(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)} + \frac{1}{3}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrrr}\phi^{(0)}\Big)$$
$$+ 2\big(\partial_\vartheta\phi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)} + \partial_r\phi^{(1)}(\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + \partial_r\phi^{(2)})$$
$$+ \partial_r\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(3)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)}\big)$$
$$+ 2\xi^{(1)}\Big(\xi^{(2)}\big((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)}\big) + \partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(2)}$$
$$+ \partial_\vartheta\phi^{(1)}(\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)} - \partial_\vartheta\phi^{(1)}) + \partial_r\phi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(1)}$$
$$+ \partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(2)}\Big) + (\xi^{(1)})^2\big(\partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)} + 2\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)}$$
$$+ \partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(1)}\big)\Big\} + (2 + \Delta_\Omega)\xi^{(3)} + 2\xi^{(1)}\big((\xi^{(1)})^2$$
$$- (2 + \Delta_\Omega)\xi^{(2)}\big) - 2\xi^{(2)}\Delta_\Omega\xi^{(1)} + 3(\xi^{(1)})^2\Delta_\Omega\xi^{(1)}$$
$$- (\partial_\vartheta\xi^{(1)})^2\partial_{\vartheta\vartheta}\xi^{(1)} - \frac{1}{2}(\partial_\vartheta\xi^{(1)})^2\Delta_\Omega\xi^{(1)}; \tag{23A}$$

$$\int_{-1}^{1}\big(3\xi^{(3)} + 6\xi^{(1)}\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^3\big)d(\cos\vartheta) = 0; \tag{24A}$$

$$\int_{-1}^{1}\big(\xi^{(3)} + 3\xi^{(1)}\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^3\big)P_1(\cos\vartheta)d(\cos\vartheta) = 0; \tag{25A}$$

$$\int_{-1}^{1}\Big\{\partial_r\phi^{(3)}+\xi^{(3)}(\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)})+\xi^{(2)}(\partial_{rr}\phi^{(1)}+2\partial_r\phi^{(1)})$$
$$+(\xi^{(1)})^3\left(\frac{1}{6}\,\partial_{rrrr}\phi^{(0)}+\partial_{rrr}\phi^{(0)}+\partial_{rr}\phi^{(0)}\right)$$
$$+(\xi^{(1)})^2\left(\frac{1}{2}\,\partial_{rrr}\phi^{(1)}+2\partial_{rr}\phi^{(1)}+\partial_r\phi^{(1)}\right)$$
$$+\xi^{(1)}\Big(\xi^{(2)}(\partial_{rrr}\phi^{(0)}+4\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)})+2\partial_r\phi^{(2)}$$
$$+\partial_{rr}\phi^{(2)}-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)}\Big)-\partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}$$
$$-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)}\Big\}d(\cos\vartheta)=0; \qquad (26A)$$

$$\phi^{(3)}+\xi^{(1)}\partial_r\phi^{(2)}+\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(1)}+\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}+\frac{1}{2}\,(\xi^{(1)})^2\partial_{rr}\phi^{(1)}$$
$$+\xi^{(1)}\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}+\frac{1}{6}\,(\xi^{(1)})^3\partial_{rrr}\phi^{(0)}=\phi_S^{(3)}(t); \qquad (27A)$$

$$t=0:\quad \xi^{(3)}=-\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l}{3(2l+1)}K_{kml}P_0(\cos\vartheta)$$
$$-\left(\frac{9}{5}\,h_2\sum_{k,m\in\Omega}h_kh_mK_{kml}+\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}h_kh_mh_lK_{kmg}K_{gl1}\right)$$
$$\times P_1(\cos\vartheta);$$

$$\partial_{T_0}\xi^{(3)}+\partial_{T_1}\xi^{(2)}+\partial_{T_2}\xi^{(1)}=0; \qquad (28A)$$

где $K_{mln}=(C^{n0}_{m0l0})^2$, а C^{n0}_{m0l0} — коэффициенты Клебша–Гордана [20].

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Выражения для коэффициентов задачи

$$H^{1(+)(-)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{1(+)}_{kmgln}\lambda^{(+)}_{lmg}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(-)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(-)}_{kmgln};$$

$$H^{1(-)(+)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{1(-)}_{kmgln}\lambda^{(-)}_{lng}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(+)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(+)}_{kmgln};$$

$$H^{2(+)(+)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{2(+)}_{kmgln}\lambda^{(+)}_{lmg}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(+)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(+)}_{kmgln};$$

$$H^{2(-)(-)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{2(-)}_{kmgln}\lambda^{(-)}_{lng}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(-)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(-)}_{kmgln};$$

$$H^{0(+)}_{mgn}=\big(\Pi^0_{mgn}-\Pi^1_{mgn}\omega_m\omega_g-\Pi^2_{mgn}\omega_g^2\big)\big(\lambda^{(+)}_{mmg}+\lambda^{(-)}_{mmg}\big);$$
$$H^{0(-)}_{mgn}=\big(\Pi^0_{mgn}+\Pi^1_{mgn}\omega_m\omega_g-\Pi^2_{mgn}\omega_g^2\big)\big(\lambda^{(+)}_{mmg}+\lambda^{(-)}_{mmg}\big);$$

$$\beta^{1(+)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}-\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l+\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l+\omega_m)^2;$$
$$\beta^{1(-)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}-\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l-\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l-\omega_m)^2;$$
$$\beta^{2(+)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}+\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l+\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l+\omega_m)^2;$$
$$\beta^{2(-)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}+\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l-\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l-\omega_m)^2;$$

$$\mu^{1(-)}_{kmgln}=\Lambda^1_{kmgln}-\Gamma^1_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$
$$\mu^{1(+)}_{kmgln}=\Lambda^1_{kmgln}+\Gamma^1_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$
$$\mu^{0(-)}_{kmgln}=\Lambda^0_{kmgln}-\Gamma^0_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$
$$\mu^{0(+)}_{kmgln}=\Lambda^1_{kmgln}+\Gamma^0_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\Lambda^0_{kmgln}=\frac{1}{2k}\Big\{K_{gln}\Big(\alpha_{kmg}\big(kn(l+3l^2-2(k+2)W)$$
$$+2(k-2)\omega_k^2\big)+K_{kmg}\big(kn(4-6k(k+1)$$
$$+(k^3-2(m+1)(m+2)-k^2(n-9)$$
$$-k(3n+2m(m+3)-22))W)-(k-1)k(k-n-2)\omega_k^2\big)\Big)$$
$$-2kn\alpha_{kmg}\sum_{\nu=1}^{[l/2]}(2l-4\nu+1)K_{g,l-2\nu,n}\Big\}$$

$$\Lambda^1_{kmgln}=\big((g-n-1)K_{gln}-\alpha_{gln}/g\big)\big((m-1)K_{kmg}-\alpha_{kmg}/m\big)$$
$$\times\omega_m^2+Wnk\big((g+1)(l+n-g-2)K_{gln}+\alpha_{gln}\big)K_{kmg};$$

$$\Gamma^0_{kmgln}=\Big((k-1)\big(k-2(n+1)\big)K_{kmg}/2$$
$$-\big((k-1)(m+n)-m\big)\alpha_{kmg}/(km)\Big)K_{gln}$$
$$+\big((k-1)(k-2)K_{klg}/2-(k-2)\alpha_{klg}/k\big)K_{gmn};$$

$$\Gamma^1_{kmgln}=-\big((g-n-1)K_{gkn}-(n+k)\alpha_{gkn}/(kg)\big)$$
$$\times\big((m-1)K_{lmg}-\alpha_{lmg}/m\big)-\big((g-n-1)K_{gln}-\alpha_{gln}/g\big)$$
$$\times\big((m-1)K_{kmg}-\alpha_{kmg}/m\big);$$

$$\Pi^0_{kmn}=\Big(\omega_k^2(n-k+1)+2kn(k+1)+2mn(m+1)-4n$$
$$+nW\big((n-k-5)(k-1)+(m+1)(k+n-m-2)\big)\Big)K_{kmn}$$
$$+(\omega_k^2/k+nW)\alpha_{kmn};$$

$$\Pi^1_{kmn}=(m+k-n-2)K_{kmn}-(n+k+m)\alpha_{kmn}/(mk);$$
$$\Pi^2_{kmn}=(m-n-1)K_{kmn}-\alpha_{kmn}/m;$$
$$\Xi_k=\omega_k^2+2k^2(k+1)-4k-5k(k-1)W;$$
$$\psi^{(+)(+)}_{kml}=\omega_k+\omega_m+\omega_l;\quad \psi^{(+)(-)}_{kml}=\omega_k+\omega_m-\omega_l;$$
$$\psi^{(-)(-)}_{kml}=\omega_k-\omega_m-\omega_l;$$
$$\lambda^{(\pm)}_{mln}=\big(\gamma_{mln}\pm\omega_m\omega_l\eta_{mln}\big)/\big(\omega_n^2-(\omega_m\pm\omega_l)^2\big);$$

$$\alpha_{mln} = -C^{n0}_{m0l0}C^{n0}_{m(-1)l1}\sqrt{m(m+1)l(l+1)};$$

$$\gamma_{mln} = K_{mln}\big[\omega_m^2(n-m+1) + 2n\big(l(l+1)-1\big) + \big(l(m+1)$$

$$- m(2m-2n+7)+3\big)nW/2\big] + \alpha_{mln}\big[\omega_m^2/m + nW/2\big];$$

$$\eta_{mln} = K_{mln}(n/2-m+1) + \alpha_{mln}(1+n/(2l))/m;$$

$$D^{kn}_{lm} = 1 - \delta_{lm}\delta_{kn}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФФИ (№ 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Bailey A.G.* // Atomisation and Spray Technology. 1986. Vol. 2. P. 95–134.
[2] *Дудников В.Г., Шабалин А.Л.* Препринт ИЯФ СО АН СССР. № 87–63. Новосибирск, 1987. 66 с.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[4] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
[5] *Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P.* // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 308. P. 1–14.
[6] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
[7] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
[8] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
[9] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 36–45.
[10] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[12] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[13] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[14] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
[15] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
[16] *Облака и облачная атмосфера. Спр.* / Под ред. И.П. Мазина и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[17] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
[18] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 45–51.
[19] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
[20] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.