

01;05

Закономерности проникновения магнитного поля в полупространство в сверхпроводниках второго рода

© Ю.В. Медведев, И.Б. Краснюк

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,
340114 Донецк, Украина

(Поступило в Редакцию 1 октября 2002 г. В окончательной редакции 11 апреля 2003 г.)

Получены уравнения, моделирующие распределения индукции магнитного поля и плотности тока в полупространстве с учетом степенной вольт-амперной характеристики. Определена скорость распространения фронта намагниченности при заданной средней скорости изменения по времени внешнего магнитного поля на границе образца. Указано интегральное условие на электрическое сопротивление, нелинейно зависящее от магнитного поля, при выполнении которого магнитный поток проникает в образец с конечной скоростью. Дано аналитическое представление решения со степенным граничным режимом, который моделирует изменение магнитного поля на границе области. Рассмотрена обобщенная модель Бина, описывающая распределение плотности тока в окрестности критического тока. Показано, что вне области применимости модели Бина возможны решения типа ударных волн.

Введение

Известно, что в мейсснеровской фазе при $H < H_{c1}$ происходит полное выталкивание магнитного поля из сверхпроводника второго рода, где H_{c1} — нижнее критическое поле. В смешанном состоянии (шубниковской фазе) при $H_{c1} < H < H_{c2}$, где H_{c2} — верхнее критическое поле, магнитное поле проникает в сверхпроводник в форме вихревых нитей (или вихрей). Критическое поле H_{c1} зависит от лондоновской глубины проникновения λ , которая определяет характерный масштаб электромагнитного отклика сверхпроводника в ответ на какие-либо внешние возмущения. При возрастании магнитного поля плотность вихревых линий увеличивается до тех пор, пока коры вихрей не начинают перекрываться при $H = H_{c2}$.

Ниже мы рассмотрим уравнения Максвелла, которые моделируют динамику вихревой системы на макроскопическом уровне, т.е. на пространственных и временных масштабах много больше как лондоновской глубины проникновения, так и характерных масштабов, порождаемых пиннингом. Эти уравнения следует дополнить вольт-амперной характеристикой $j(E, B)$, которая моделирует электромагнитный отклик сверхпроводника, зависящий в свою очередь от динамического поведения вихревой системы.

Нелинейность вольт-амперной характеристики (ВАХ) может быть обусловлена различными причинами: термоактивационным крипом, плавлением вихревой решетки, пиннингом и т.д. Так, если мы имеем дело с крипом магнитного потока, то вихревая решетка приходит в движение [1,2]. При увеличении тока, когда сила Лоренца превышает силу пиннинга, в движение может быть вовлечена вся вихревая решетка и ВАХ становится линейной: это — область вязкого течения магнитного потока [2].

Как отмечено в [3], уравнения ВАХ позволяют интерпретировать экспериментальные результаты по тепловой устойчивости сверхпроводящего состояния композитного сверхпроводника, что представляет собой одну из основных проблем технической сверхпроводимости [3]. Так, в теории термомангнитной неустойчивости возмущающим фактором является внешнее магнитное поле или вводимый в образец ток, именно такую ситуацию мы рассматриваем ниже. При этом мы ограничиваемся случаем, когда температура сверхпроводника остается практически неизменной и равной температуре хладагента.

В Введении показано, что для линейной модели уравнения Максвелла допускают редукцию к уравнению Бюргера с вязкостью, где роль „вязкости“ играет сопротивление $\rho_{f\text{low}}(B)$. Рассматриваются закономерности проникновения магнитного потока в полупространство и указываются интегральные условия на функцию $\rho_{f\text{low}}(B)$, такие что 1) поток проникает в полупространство $x > 0$ на бесконечную глубину с бесконечной скоростью; 2) поток проникает на конечную глубину с конечной скоростью распространения возмущений. Очевидно, что свойством 1 обладают решения линейных моделей, а свойство 2 типично для решений нелинейных задач. Соответствующую модельную краевую задачу можно рассматривать как обобщение модели Бина для линейной ВАХ. Обобщить данную модель для индукции магнитного поля на степенную ВАХ в общем случае не удастся, поскольку в уравнении приходится иметь дело с членом порядка $(\partial B / \partial x)^n$ где n — показатель степени ВАХ. Однако это можно сделать при условии, что электрическое сопротивление не зависит от индукции магнитного поля.

По этой причине в разделе 1 рассматривается модельное уравнение для плотности транспортного тока, устанавливается возможность существования автомодельных волн и показывается, что их скорость проникновения в

образец зависит от безразмерного параметра $\varepsilon = \langle b' \rangle_t^{-2}$: так, при $n = 1$ ток проникает в образец с бесконечной скоростью и применима модель Бина. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $n > 1$ ток проникает в образец в виде волны плотности с убывающей амплитудой и при $n \gg 1$ снова применима модель Бина. В разделе 2 и 3 определяется скорость v проникновения фронта намагниченности, такая что $v \propto n$ и $v \propto \langle b' \rangle_t^{-1}$, т.е. пропорциональна средней скорости увеличения магнитного поля на поверхности образца.

Результаты данной работы мотивированы исследованиями [2], где рассматривалась аналогичная задача, однако зависимость $\rho_{f\text{low}}(B)$ не учитывалась. В [2] получено линейное убывание электромагнитного поля E на конечную глубину, а в данной работе получено степенное убывание магнитной индукции и плотности тока на конечную глубину. Что касается скорости распространения магнитного потока, то результаты в основном идентичны: при $n \rightarrow \infty$ имеет место переход к модели критического состояния. Экспоненциальные ВАХ в данной работе не рассматривались.

Данные результаты можно рассматривать как слабое обобщение модели критического состояния Бина, в которой наклоном ВАХ пренебрегают. В аналогичном аспекте можно рассматривать результаты работы [2]. По сравнению с моделью [2] в данной работе учитывается явная зависимость $\rho_{f\text{low}}(B)$ для линейной ВАХ и обобщается концепция, согласно которой в ответ на любое возмущение протекает ток с плотностью, равной j_c . Оказывается, что учет слабых возмущений в окрестности точки $j = j_c$ несуществен в случае большой скорости проникновения поля E , т.е. имеет место модель Бина, и приводит к затуханию плотности тока при малых значениях скорости. Учет сильных возмущений в окрестности критического значения приводит к возникновению многозначной ударной волны плотности, однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения. В результате учет даже слабых неоднородных возмущений плотности тока в окрестности критического тока приводит к гидродинамической модели распределения тока, а учет зависимости электрического сопротивления от индукции магнитного поля приводит к необходимости учитывать изменение градиента магнитного поля, т.е. по существу неоднородные распределения плотности тока $j \neq j_c$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B = \mu_0 j, \quad (1)$$

где B — индукция магнитного поля, E — электромагнитное поле, j — плотность транспортного тока, μ_0 — магнитная проницаемость среды.

Зависимость от тока определим согласно форме вольт-амперной характеристики $j(E, B)$, которая моделирует электромагнитный отклик сверхпроводника, зависящий в свою очередь от динамического поведения вихревой системы.

Рассмотрим жесткий сверхпроводник во внешнем магнитном поле H , направленном вдоль Z -оси и параллельном поверхности $x = 0$ образца, который занимает полупространство $x > 0$ [2, рис. 1]. Тогда магнитная индукция может быть представлена в форме [1]

$$B(x) = H \exp(-x/\lambda) + B_v(x),$$

где первое слагаемое описывает мейсснеровское состояние, а второе определяется распределением вихрей.

При $B_v(x) \equiv 0$ имеет место локальная связь $B = N\Phi_0$, где N — плотность вихрей, Φ_0 — квант магнитного потока при условии, что лондоновская глубина проникновения много меньше некоторого характерного масштаба $\langle B' \rangle_t$ изменения магнитной индукции [2]. Это означает, что уравнения (1) описывают поведение системы вихрей на макроскопическом масштабе, т.е. пространственный и временной масштабы превышают характерные масштабы, отвечающие пиннингу [4], что в свою очередь означает выполнение неравенства $j > j_c$. Обратная ситуация $j < j_c$, когда магнитная индукция B в каждой точке определяется вкладом вихрей, локализованных в области порядка λ , в данной работе не рассматривается.

В простейшей ситуации $U < T$, где T — температура, величиной термоактивационного барьера U , который препятствует движению вихрей, можно пренебречь, а свойства образца моделировать соотношением [4]

$$E = \rho_{f\text{low}}(B)j, \quad (2)$$

где $\rho_{f\text{low}} = \rho_n B / H_{c2}$, а ρ_n — сопротивление в нормальном состоянии.

В результате из соотношений (1) и (2) нетрудно получить уравнение Бюргерса

$$\mu_0 B'_t - \frac{\partial \rho_f(B)}{\partial B} (\nabla B)^2 = \rho_{f\text{low}}(B) \Delta B$$

(дифференцирование этого соотношения по x и замена $U = \partial B / \partial x$ приводит к уравнению Бюргерса с „вязкостью“ в общепринятой записи).

Это уравнение для модели критического состояния допускает редукцию к уравнению

$$\mu_0 B'_t = \rho_{f\text{low}}(B) \Delta B.$$

Заметим также, что из соотношений

$$\partial_x E = -\partial_t B \quad \text{и} \quad -\partial_x B = \mu_0 j$$

нетрудно получить уравнение

$$\mu_0 \partial_t j = \Delta E,$$

которое исследовалось в работе [2].

Существуют следующие модели ВАХ: линейная модель

$$E = \begin{cases} \rho_f(B)(j - j_c) & \text{при } j > j_c, \\ 0 & \text{при } j < j_c \end{cases} \quad (3)$$

и нелинейные модели [2]

$$E = E_c \left(\frac{j}{j_c} \right)^n; \\ E = E_c \exp \left(\frac{j - j_c}{j_\delta} \right) - E_0, \quad (4)$$

где плотность тока j_δ и феноменологический показатель степени n определяют крутизну нарастания ВАХ.

Плотность тока j_c определена при напряженности электрического поля E_c . Для модели критического состояния Бина зависимостями от индукции B для плотности тока $j_c(B)$ и сопротивления $\rho_f(B)$ можно пренебречь. В [2] показано, что при $n \rightarrow \infty$ и $J_\delta \rightarrow 0$ модели (4) переходят в модель критического состояния.

Для линейной модели (3) можно записать уравнение

$$E'_t = \frac{\rho_f}{\mu_0} \partial_{xx} E. \quad (5)$$

которое в безразмерных переменных $e = E/E_c$, $X = x/L_X$ и $\tau = t/t_X$, где

$$E_x = j_c \rho_f, \quad L_x = j_c \rho_f / \langle B' \rangle_t, \\ t_x = \mu_0 j_c^2 \rho_f / \langle B' \rangle_t^2,$$

принимает следующую форму:

$$\partial_\tau e = \Delta_e, \quad (6)$$

где в дальнейшем мы будем использовать предыдущее обозначение $X \rightarrow x$.

Замена переменных за счет усреднения $\langle B' \rangle_t$ (см. Приложение) позволяет выделить характерные масштабы скорости изменения магнитной индукции: действительно, в динамическом режиме $\langle B' \rangle_t \propto \langle N \rangle$, где $\langle N \rangle$ — среднее число вихрей (на масштабах L_x и t_x). Здесь $B \propto B_y$ согласно обобщенной модели Бина [4], т.е. магнитная индукция представляет собой поле, усредненное на специальном масштабе $a \ll \langle B' \rangle_t < \lambda$, где a — расстояние между вихрями. Поскольку при $H \gg H_{c1}$ выполняется неравенство $a \ll \lambda$, то величину $\langle B' \rangle_t \propto N$ можно интерпретировать как скорость изменения плотности вихрей, которые покидают или поступают в образец через его поверхность [4], с. 1350, а величину $\omega \sim 1/t_x$ рассматривать как частоту.

Рассмотрим для решений уравнения (5) следующие граничные и начальные условия [2]:

$$\partial_x E(0, t) = -\partial_t B(0, t), \quad E(\infty, t) = 0, \quad E(x, 0) = 0,$$

где $t > 0$, $x > 0$, которые в безразмерных переменных можно записать в виде

$$\partial_x e(0, \tau) = -1, \quad e(\infty, \tau) = 0, \quad e(x, 0) = 0. \quad (6')$$

Для решений начально-краевой задачи (6), (6') известно, что электрическое поле проникает в полупространство в виде автомобильной волны с линейным законом распространения фронта намагниченности $X_0(t, \langle B' \rangle_t)$ [2, рис. 3].

Рассмотрим аналогичную постановку краевой задачи, но для уравнения магнитной индукции

$$\partial_t B = \frac{1}{\mu_0} \rho_f(B) \partial_{xx} B.$$

В области полей $B \sim H_{c2}$ зависимостью $\rho_f(B)$ от индукции можно пренебречь и в безразмерных переменных из [2] записать это уравнение в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \quad \left(b = \frac{B}{B_{c2}} \right) \quad (7)$$

с граничными и начальными условиями

$$\partial_t b(0, t) = 1 \quad \text{и} \quad b(x, 0) = 0. \quad (7')$$

Решения задачи (6), (6') в классе автомодельных функций построены в [2]. Покажем, что для краевой задачи (7), (7') также существуют автомодельные решения: сначала заметим, что эта задача может быть записана в виде

$$\partial_t b = \Delta b \quad (8)$$

с более общими краевыми условиями

$$b(0, t) = (1 + t)^m \quad \text{и} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (8')$$

где $m = 1, 2, \dots$

Действительно, при $m = 1$ мы, получаем после дифференцирования по времени краевого условия (8') граничное условие (7') и, следовательно, каждое решение задачи (8), (8') является решением задачи (7), (7'). Вообще говоря, функциональное краевое условие определяется по дифференциальному условию с точностью до некоторой постоянной, которую (в силу требования непрерывного согласования граничных и начальных функций) можно положить равной нулю.

При $m > 1$ рассматриваемая краевая задача (с дополнительным условием $b(\infty, t) = 0$) также имеет автомодельное решение [5]

$$b_A(x, t) = (1 + t)^m \theta_A(\xi), \\ \xi = x / (1 + t)^{1/2},$$

причем

$$\theta_A(\xi) = 2^{2m+1} \frac{\Gamma(1+m)}{\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) H_{-(2m+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

где $H_\nu(z)$ — функция Эрмита, $\Gamma(m)$ — гамма-функция.

По виду решения можно определить глубину проникновения волны

$$x_{ef}^A = \xi_{ef}(1 + t)^{1/2},$$

где $\xi_{ef}(m)$ определяется из требования $\theta_A(\xi_{ef}) = \theta_A(0)/2 = 1/2$.

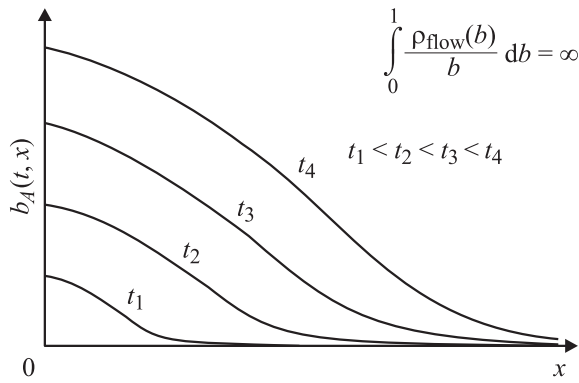


Рис. 1. Распределение магнитной индукции в случае конечной скорости распространения возмущений (для нелинейной ВАХ).

Это аналитическое решение представляет интерес по той причине, что оно наглядно отражает зависимость решения от скорости проникновения электромагнитного поля внутрь сверхпроводника, инициируемого нарастающим внешним магнитным полем.

Оказывается, что анализ автомодельных решений со степенным режимом на границе показывает естественную закономерность: чем выше интенсивность граничного режима (скорость увеличения внешнего магнитного поля), тем больше скорость движения возникающей магнитной волны. Если режим степенной, то и глубина проникновения магнитного поля — степенная функция. Схематическая эволюция автомодельного процесса проникновения магнитного потока, порождаемого нарастающим внешним полем, примерно та же, что и на рис. 1. Как показано в [5, с. 52], имеет место асимптотическая устойчивость автомодельного решения по отношению к возмущениям краевых данных. При этом автомодельная функция $\theta_A(\xi)$ правильно характеризует профиль магнитной волны при $t \rightarrow \infty$.

Аналогично для нелинейных вольт-амперных характеристик (4) задача допускает редукцию к уравнению

$$b'_t = ((\rho_{f\text{low}}(b), j)b_x)_x \quad (b = B/B_{c2}) \quad (9)$$

с граничным и начальным условиями

$$b(0, t) = (1 + t)^m \quad \text{и} \quad b(0, x) = u_0(x). \quad (9')$$

Здесь под ρ_f мы будем понимать некоторое нормированное на ρ_f безразмерное значение сопротивления, где $\rho_f = \langle \rho_{f\text{low}} \rangle$ такое, что имеют смысл указанные выше переменные L_x и t_x : в частности, не ограничивая общности, можно считать, что $\rho_f = \rho_n$ при $b = 1$ или $\rho_f = \rho_{f\text{low}}(B_0)$, где B_0 — некоторое равновесное значение магнитного поля, которое определяется конкретными требованиями задачи. Далее, в силу закона Ома $e = \rho_{f\text{low}} i$ и равенства $e = i^n$, мы можем считать, что $\rho_{f\text{low}}(b, i) \propto bi^{n-1}$, где $i = j/j_c$.

Положим $\rho_{f\text{low}}(b) \propto b^\alpha$, где $\alpha > 0$. Ниже будет показано, что для высокотемпературных сверхпроводников это определение имеет смысл. Тогда из [5, с. 67] следует, что краевая задача (12), (12') имеет автомодельные решения $b_A = (1 + t)^{1/\alpha} \theta_A(\xi)$, где функция θ_A определена ниже. При этом глубина проникновения магнитной волны зависит от времени

$$x_{ef}^A = \xi_{ef}(1 + i^{n-1}t)^{(1+m\alpha)/2},$$

$$\theta_A(\xi_{ef}) = 1/2.$$

В частности, краевая задача (9), (9') при $m = 1$ допускает автомодельное решение

$$u_A(x, t) = g_A(\xi), \quad \xi = x/(1 + t)^{1/2},$$

удовлетворяющее граничному условию (9') при $m = 1$, где $\theta_A(\xi)$ — решение краевой задачи

$$(\rho_{f\text{low}}(\theta_A)\theta'_A)' + \frac{1}{2}\theta'_A = 0,$$

$$\theta_A(0) = 1, \quad \theta_A(\infty) = 0, \quad \xi > 0,$$

причем оно финитно (т.е. имеет конечную глубину проникновения в образец) или нефинитно в зависимости от того, допускает ли уравнение (9) конечную скорость распространения возмущений или нет.

Ограничимся анализом ситуации, когда коэффициент $\rho_{f\text{low}}(b)$ удовлетворяет требованию конечной скорости распространения возмущений [5]

$$\int_0^1 \frac{\rho_{f\text{low}}(b)}{b} db < \infty.$$

Для уравнения (9) интеграл равен единице при линейном $\rho_{f\text{low}}(b)$ и равен бесконечности при условии, что $\rho_{f\text{low}}(b)$ не зависит от b (решения соответствующих задач показаны на рис. 1, 2). Если сопротивление не зависит от магнитной индукции, то скорость распространения возмущений магнитного потока бесконечна и, следовательно, решение не является финитным (рис. 1).

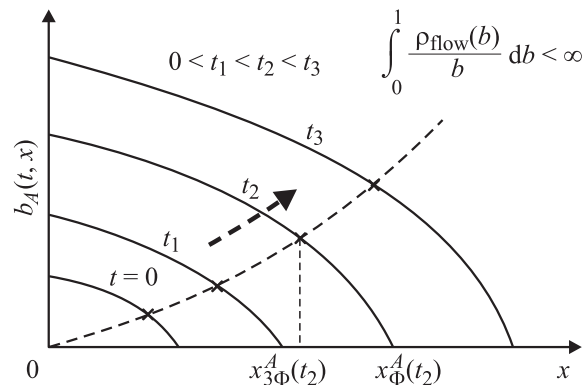


Рис. 2. Проникновение магнитного потока в случае бесконечной скорости распространения возмущений (для линейной ВАХ).

С учетом крипа магнитного потока диссипация описывается соотношением

$$\rho(T, H) = \rho_0(H) \exp[-(U_0(T, H)/T)].$$

Как показано в [6,7], энергия активации имеет следующую скейлинговую форму:

$$U_0 = A(H)(1 - T/T_c)^m,$$

где $A \propto 1/H^\alpha$.

Если барьер U_0 достаточно мал, то, разлагая экспоненту в ряд Тейлора и замечая, что $H^\alpha/(H^\alpha + 1) \sim H^\alpha$ в нулевом приближении, нетрудно в результате получить соотношение

$$\rho(H) \propto \frac{B}{H_{c2}} H^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что аналогичное соотношение получено в [8]

$$U_{ef}(j, H) \propto F(j/j_i) H^{0.55} [1 - (T/T_x)]^2,$$

где T_x расположено вблизи критической температуры T_c , а $F(j/j_i) \sim (j/j_i)^{-n}$ в случае коллективного крипа магнитного потока [8], где j_i — некоторое значение тока, которое зависит от j/j_c [9].

Модель [8] предсказывает следующие режимы: $j \ll j_c$, $j < j_c$ и $j \sim j_c$. Мы ограничимся последним случаем. Поскольку в [6] рассматривались значения $0.5 < \alpha < 0.6$, а в [8] значение $\alpha = 0.55$, то в указанных выше формулах для определения глубины проникновения магнитной бегущей волны достаточно положить $\alpha = 3/2$. По-видимому, этот абстрактный результат может найти приложение при исследовании конкретных задач (для высокотемпературной керамики $Y(Ba_2Cu_3O_7)$, рассмотренных в [8,9]). Отметим, что при $j < j_c$ сопротивление ρ_{flow} зависит от распределения тока, поэтому ниже мы рассмотрим уравнение, которое моделирует эволюцию плотности тока в полупространстве с учетом нарастания электромагнитного поля на границе сверхпроводника.

Из сказанного следует, что имеет смысл определение $\rho_{flow}(b) = b^\alpha$. Тогда при $m = 1/\alpha$ задача имеет решение $b_A = (1+t)^{1/\alpha} \theta_A(\xi)$, где $\theta_A(\xi) = [1 - \alpha^{1/2} \xi]^{1/\alpha}$, $\xi = x/(1+t)$, поэтому автомодельное решение есть простая бегущая волна. В общем случае решение имеет вид

$$u_A = (1+t)^m \theta_A(\xi),$$

где $\xi = x/(1+t)^{(1+m\alpha)/2}$, и его график приведен на рис. 2.

Учет нелинейной ВАХ при такой постановке не представляется возможным: для этого необходимо рассматривать соотношения вида $e = \phi(i, b)$ и исследовать одновременно систему уравнений для функций i и b . Однако для линейной вольт-амперной характеристики (3) плотность тока i можно в уравнении диффузии рассматривать как параметр. Тогда в режиме фиксированного

тока его влияние можно учесть, если в указанном выше решении выполнить замену $t \rightarrow it$. В результате мы получаем, что глубина проникновения магнитной волны

$$x_{ef}^A \propto (it)^{(1+m\alpha)/2}.$$

2. Распределения плотности тока

Для нелинейных ВАХ выполним замену переменных

$$E_x = E_c, \quad L_x = E_c \langle B'_t \rangle, \quad t_x = \mu_0 j_c E_c \langle B'_t \rangle^2$$

в уравнении, учитывающем связь между током и электрическим полем (см. выше). В результате мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{1}{n} e^{\frac{1-n}{n}} \frac{\partial e}{\partial \tau},$$

для решений которого выполняются граничные условия

$$\frac{\partial e}{\partial x}(0, \tau) = -1, \quad e(\infty, \tau) = 0, \quad e(x, 0) = 0.$$

Поскольку для нелинейных ВАХ $e = \phi(i)$, где ϕ — заданная функция, $i = i/i_c$, то это уравнение допускает редукцию к уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{n} \phi(i)^{\frac{1-n}{n}} \frac{\partial \phi(i)}{\partial \tau} = \frac{1}{n} \phi(i)^{\frac{1-n}{n}} \phi'(i) \frac{\partial i}{\partial \tau} \quad (10)$$

с граничным условием

$$\phi'(i(0, t)) \frac{\partial i}{\partial x}(0, t) = -1 \quad (\langle b'_t \rangle = 1). \quad (11)$$

Для степенной ВАХ граничное условие (11) удобно записать в виде

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{n} i^{\frac{1-n}{n}} \Big|_{x=0, t>0}, \quad (11')$$

а уравнение (11) допускает представление в виде уравнения Бюргера

$$\phi''(i) \frac{\partial i}{\partial x} + \phi'(i) \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{n} \phi(i)^{\frac{1-n}{n}} \phi'(i) \frac{\partial i}{\partial \tau} \quad (10')$$

с дополнительными условиями $i(\infty, \tau) = 0$, $i(x, 0) = 0$ при $x > 0$.

Заметим, что если магнитный поток проникает в образец диффузионным образом, то можно принять, что

$$-\frac{\partial \langle i \rangle_t}{\partial x} \propto -\frac{\partial^2 \langle b \rangle_t}{\partial x^2} = -\langle b' \rangle_t,$$

где усреднение выполняется на масштабах t_x и L_x ; а поскольку эти масштабы выбираются так, что $\langle b'_t \rangle = \text{const}$, то граничное условие (11') допускает редукцию к более простому соотношению

$$\frac{\partial \langle i \rangle_t}{\partial x} \propto \frac{1}{n} \langle i \rangle_t^{1-n} = \langle b' \rangle_t \Big|_{x=0, t>0}.$$

Не ограничивая общности, можно выполнить преобразование $\tau \rightarrow \text{const } \tau$ таким образом, чтобы выполнялось условие $n\langle b' \rangle = 1$. Тогда последнее соотношение можно записать в виде $i^{1-n}(0, t) = 1$, т.е.

$$i(0, t) = 1, \quad t > 0. \quad (12)$$

В результате мы пришли к задаче с теми же граничными условиями, что и для линейной ВАХ, но вместо линейного уравнения диффузии теперь приходится иметь дело с нелинейным уравнением Бюргера (1'), которое удобно записать в виде

$$\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{1}{(n-1)} i^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{n(n-1)} i^{\frac{1+n}{n}} \frac{\partial i}{\partial \tau}. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет простой физический смысл: так, при $n = 1$ оно переходит в нелинейное уравнение диффузии тока, которое (но в терминах электромагнитного поля) исследовано в работе [2]. При $n \rightarrow \infty$ предельным является уравнение $\partial i / \partial x = 0$, которое имеет решение $i = i_c$, отвечающее модели Бина $(-\nabla b) \propto i_c$. При достаточно больших, но конечных n оно допускает редукцию к уравнению

$$(n-1) \frac{\partial i}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{n} i^{\frac{n+1}{n}} \frac{\partial i}{\partial \tau},$$

из которого следует, что стационарное распределение плотности тока имеет вид

$$i(x) \propto i(0) \exp(1-n)x + \text{const},$$

где $i(\partial) = 1$ в силу граничного условия (12), а постоянную можно выбрать из требования $i(\infty) = \text{const}$.

В общем случае необходимо исследовать уравнение

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} - n(n-1) i^{-\frac{n+1}{n}} \frac{\partial i}{\partial x} = n i^{-\frac{n+1}{n}} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

Выполним в этом уравнении сжатие пространственной переменной: $x \rightarrow n \langle b'_t \rangle x$ и запишем его в виде

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} - \frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} i^{-\frac{n+1}{n}} \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{\langle b'_t \rangle} i^{-\frac{n+1}{n}} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Определим параметр $\varepsilon = \langle b'_t \rangle^{-1}$, который играет роль усредненной вязкости для уравнения Бюргера (14). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к соотношению

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} - \frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} i^{-\frac{n+1}{n}} \frac{\partial i}{\partial x} = 0. \quad (14')$$

Уравнение (14') имеет форму классического уравнения Бюргера без вязкости (где роль времени играет пространственная переменная). Это уравнение удобно записать в виде

$$\frac{dj}{dt}(x(t), t) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} i^{-\frac{n+1}{n}}, \quad (15)$$

Равенства (15) означают, что каждое решение уравнения (14') не изменяется со временем вдоль прямых, определяемых соотношением

$$x + \frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} i(x, t)^{-\frac{n+1}{n}} t = \text{const}.$$

Как известно, решения уравнения Бюргера характеризуются возможностью существования опрокидывающихся волн, когда в окрестности точки $j = j_c$ решение становится многозначным (см. например, [10, с. 189]). Такая ситуация возможна при любом $n \neq 1$, однако в режиме критического тока $i = 1$ это невозможно: мы получаем, что ток проникает в образец в виде простой волны, форма которой полностью определяется формой граничного условия.

3. Определение закона движения фронта намагниченности

Применим к уравнению (14') метод „замораживания“ коэффициентов, т.е. рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} - \frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} \langle i^{-\frac{n+1}{n}} \rangle_x \frac{\partial i}{\partial x} = 0,$$

заменяем среднее $\langle i \rangle_x$ по току средним по величине магнитной индукции $\langle b' \rangle_x$, и предположим, что выполняется свойство „эргодичности“ магнитного поля (см. Приложение) $\langle b \rangle_x = \langle b \rangle_t$. Тогда это уравнение в силу соотношения $\langle i \rangle \propto (-\langle b \rangle_x)$ после дифференцирования по x можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} \langle u \rangle_x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (u = \partial i / \partial x). \quad (16)$$

Из свойств решений уравнения (16) вытекает, что закон движения фронта намагниченности определяется равенством

$$X(t) \propto \frac{n-1}{\langle b'_t \rangle} \langle b' \rangle_x^{\frac{n-1}{n}} t,$$

где в силу выполненной выше замены $\langle b' \rangle_t \rightarrow n \langle b' \rangle_t$.

В [2] получено аналогичное соотношение

$$x(t) \propto \langle b' \rangle_t^{\frac{n-1}{n+1}} t. \quad (17)$$

Соотношение для фронта намагниченности удобно записать в виде

$$x(t) \propto \frac{n-1}{n} \frac{\langle b' \rangle_x}{\langle b' \rangle_t} t.$$

Сравнивая это выражение с представлением (17), мы видим, что эти формулы сравнимы с точностью до порядка малости величин $(n+1)^{-1} \sim n^{-1}$. Связано это с тем, что уравнение Бюргера учитывает пространственное распределение тока, определяемое градиентом $\partial i / \partial x$: если этим членом в уравнении пренебречь, то нетрудно получить соотношение (17), поскольку задача (после соответствующих переобозначений) сводится к той, что рассмотрена в работе [2].

4. Заключение

Таким образом, выше на основе уравнений Максвелла мы получили модельные уравнения: диффузионное нелинейное уравнение для магнитной индукции и уравнение Бюргерса, моделирующее распределение тока с учетом изменения внешнего магнитного поля на границе полупространства. Для уравнения магнитной индукции рассмотрены две граничные задачи: а) скорость изменения магнитного потока постоянна на границе; б) скорость изменения потока нарастает со временем степенным образом. В случае а возможны две ситуации: 1а) сопротивление $\rho_{f\text{low}}$ постоянно, 1б) сопротивление линейно или нелинейно зависит от b^α . В случае 1а $\alpha = 0$ и поток проникает в образец с бесконечной скоростью (рис. 2); в случае 1б при $\alpha > 1$ магнитная волна проникает в образец с конечной скоростью (рис. 1).

В случае б при выполнении условия 1б волна всегда движется с большей скоростью, чем в среде с постоянным сопротивлением и тем же граничным режимом, поскольку сопротивление — растущая функция магнитного поля. С такой же скоростью движется фронт магнитной волны (точка, в которой b_A обращается в нуль) $x_f(t) = \xi_f(1+t)^{(1+m\alpha)/2}$. Схематически эволюция автомодельного процесса показана на рис. 1 (траектория движения полуширины магнитной волны представляется штриховой кривой).

При исследовании распределения плотности тока мы рассматриваем граничные условия в режиме Бина и ограничиваемся изучением формы флуктуаций тока в окрестности критического состояния: при этом в самом уравнении неявно присутствует информация о скорости накачки магнитным током и показателе степени ВАХ в виде коэффициентов уравнения. Оказывается, что при $n \rightarrow \infty$ мы приходим к решениям, которые получаются из классической модели Бина. При $v \rightarrow 0$, где v — скорость накачки магнитным полем, мы приходим к обычному уравнению диффузии плотности тока, которое рассматривалось, например, в [3]. При $v \rightarrow \infty$ уравнение вырождается в волновое уравнение Бюргерса: в результате снова получаем модель критического состояния Бина, но при этом при $j = j_c$ мы получаем не просто постоянное решение, а решение, представляющее бегущую волну, амплитуда которой равна j_c . Для больших флуктуаций в окрестности j_c такая волна становится неустойчивой, возникает укрупнение волны: результатом (при выполнении условий Гюгонио на ее разрыве [10]) является ударная волна; однако этот вопрос мы подробно не рассматривали. В заключение отметим, что как уравнение для индукции магнитного поля, так и уравнение эволюции плотности тока формально идентичны, хотя и записываются в разных представлениях, поскольку дифференциальной заменой могут быть записаны в одной форме. Решение совместной системы уравнений в данной работе не рассматривалось, однако в конкретных задачах для уравнения магнитной индукции в коэффициенте $\rho_{f\text{low}}(b)$ можно использовать распределение тока для пластины, которое получено в [4].

Приложение

Введем для операторов усреднения следующие обозначения:

$$M_t[B(x, t)] = \langle B(z) \rangle_{t_0} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \int_{t_0}^{t_0+v} B(x, t) dt$$

и

$$M_x[B(x, t)] = \langle B(x, t) \rangle_x = \frac{1}{L_x} \int_{t_0}^{L_x} B(x, t) dx$$

если функция $B(x)$ является L_x — периодической по переменной x . Такая функция записывается в виде ряда Фурье

$$B(x) = \sum_{k>0} B_k \exp ikx.$$

Тогда применение оператора усреднения приводит к соотношению

$$M_x[B(x)] = B_0,$$

т.е. результатом усреднения является свободный член ряда Фурье.

Рассмотрим функцию

$$B(\omega t) = \sum_{k>0} B_k \exp ik\omega t$$

и применим оператор усреднения по времени. Если есть вектор $k = (k_1, k_2)$, то результат вычисления соответствующего двумерного интеграла при $x = \omega_1 x$ и $t = \omega_2 t$ дает (в случае рациональной несоизмеримости чисел ω_1 и ω_2) после применения операции усреднения по переменной x и времени t одинаковый результат [11]

$$M_x[B(x)] = M_t[B(\omega t)].$$

Именно это наблюдение и понадобилось нам выше: в статистической механике последнее соотношение известно как свойство эргодичности траекторий [10].

Основной технической причиной введения этой операции в данной работе являлась необходимость обезразмерить нелинейные уравнения. Так, замена $L_x = E_c/B'_t$ и $t_x = \mu_0 j_c E_c / (B'_x)^2$ позволила в [2] обезразмерить уравнение диффузии со степенной ВАХ. Здесь возникает вопрос: как понимать величины t_s и L_x . Очевидно, достаточно выполнить усреднение $\langle L_x \rangle = E_c / \langle B'_t \rangle$ в каком-либо смысле. Результат усреднения по t зависит, вообще говоря, от параметра t_0 : этот вопрос подробно исследован в [12]. В большинстве прикладных задач свойства решений уравнений не зависят от t_0 , однако часто это не так: например, при усреднении случайного потенциала пиннинга в [4, с. 1159] понадобилась следующая операция усреднения:

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} (\dots) dt,$$

где неявно взятие предела по $\eta \rightarrow \infty$ в операторе усреднения уже предполагается выполненным.

Другой важной задачей является доказательство принципиальной возможности существования таких характерных масштабов: эта проблема рассматривается, например, в [4]. Так, в случае крипа вязкого магнитного потока характерное время t_0 для пластины можно выбрать в виде

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \frac{Td^2}{|\partial_j U| c v_0 H},$$

где $U(j)$ — активационный барьер, d — ширина пластины, c — скорость света, v_0 есть „микроскопическая“ скорость вихрей, H — напряженность магнитного поля.

Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 2М/71-2000).

Список литературы

- [1] Fisher L.M., Voloshin I.B., Gorbachev V.S., Savel'ev S.E., Yampol'skii // Proc. of the 7th Intern. Workshop on Critical Current in Superconductors / Ed. Harald. W. Weber. Alpbach (Austria), 1994. P. 101–104.
- [2] Романовский В.Р. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 12. С. 47–57.
- [3] Романовский В.Р. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 3. С. 15–21.
- [4] Blatter G., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B., Larkin A.I., Vinokur V.M. // Rev. Modern Physics. 1994. Vol. 66. N 4. P. 1350–1353.
- [5] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
- [6] Shi Dohglu, Konrous H.E., Xu Ming, Kim D.H. // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 43. N 1. P. 514.
- [7] Y. Yeshurun Y., Malozemoff A.P. // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 2202.
- [8] Kung P.J., Maley M.P., McHenry M.E., Willis J.O., Coulter J.Y. // Phys. Rev. B. 1992. Vol. 46. N 10. P. 6427.
- [9] Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B., Larkin A.I., Vinokur V.M. // Lett. 1989. Vol. 63. P. 2303.
- [10] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
- [11] Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256 с.
- [12] Волосов В.М. // УМН. 1962. Т. 17. № 6. С. 3–126.