

01;09

Влияние дифракционных эффектов на электродинамические характеристики двумерных брэгговских резонаторов коаксиальной геометрии

© Н.С. Гинзбург, Н.Ю. Песков, А.С. Сергеев

Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия

(Поступило в Редакцию 20 мая 2003 г.)

С учетом дифракционных эффектов проведен анализ электродинамических свойств двумерных брэгговских резонаторов коаксиальной геометрии, реализующих двумерную распределенную обратную связь. Подобные резонаторы представляют собой отрезки коаксиальных волноводов с двоякопериодической гофрировкой, обеспечивающей связь и взаимное рассеяние четырех парциальных волн, две из которых распространяются в продольном, а две другие — в поперечном (азимутальном) направлении. Показано, что высокая селективность двумерных брэгговских резонаторов по азимутальному индексу может быть интерпретирована как следствие качественного отличия в топологии дисперсионных характеристик азимутально-симметричных и несимметричных нормальных волн в безграничных в продольном направлении волноводах исследуемой геометрии. Для систем конечной длины, образующих двумерные брэгговские резонаторы, найден спектр собственных мод при двух типах граничных условий, соответствующих предельным случаям систем полностью согласованных (открытых) или, напротив, закрытых для вывода поперечных электромагнитных потоков. Определены соотношения между периметром и длиной резонатора, при которых добротность основной азимутально-симметричной моды превосходит добротность остальных мод. Обсуждаются границы применимости геометрического подхода, использованного ранее при анализе двумерных брэгговских резонаторов.

Введение

Использование двумерной распределенной обратной связи было предложено в [1–3] как метод обеспечения пространственной когерентности излучения ленточных и трубчатых электронных потоков с поперечными размерами, значительно превосходящими длину волны. Указанный механизм может быть реализован с помощью двумерных брэгговских резонаторов планарной или коаксиальной геометрии. В настоящий момент проводятся экспериментальные исследования МСЭ миллиметрового диапазона на основе нового механизма обратной связи [4,5]. В этой связи представляется актуальным более детальный анализ электродинамических характеристик двумерных брэгговских резонаторов. В частности, в предшествующих работах, за исключением [6], анализ проводился в рамках геометрического приближения в пренебрежении дифракционными эффектами. Данное приближение позволило определить спектр собственных мод двумерных брэгговских резонаторов и показать их высокую селективность по поперечному (азимутальному) индексу. Кроме того, в рамках геометрического приближения была построена нелинейная нестационарная теория МСЭ генераторов [3,6–8], в значительной степени подтвердившая выводы линейной теории о перспективности использования двумерных брэгговских структур для обеспечения пространственной когерентности излучения пространственно-развитых релятивистских электронных пучков. Вместе с тем не вызывает сомнения, что более полный анализ в рам-

ках квазиоптического приближения может позволить не только определить границы применимости геометрического подхода, но и выявить ряд дополнительных характеристик двумерных брэгговских структур.

В данной работе такое обобщение проведено для случая брэгговских резонаторов коаксиальной геометрии. В разделе 1 описана базовая модель, которая основана на использовании метода связанных волн для четырех парциальных потоков электромагнитной энергии, распространяющихся в продольном и поперечном (азимутальном) направлении и испытывающих взаимное рассеяние на двумерной брэгговской структуре. Приведены основные уравнения, включающие дифракционные эффекты. В разделе 2 рассмотрены дисперсионные характеристики нормальных волн в безграничных в продольном направлении двумерных коаксиальных брэгговских структурах. Показано, что для симметричной нормальной волны вблизи брэгговской частоты поведение дисперсионных кривых качественно отличается от прочих несимметричных волн (здесь и далее классификация ведется по азимутальной структуре продольно распространяющихся парциальных волн). Этим обстоятельством фактически и объясняется селективность двумерных брэгговских резонаторов. В разделе 3 рассмотрены системы конечной длины. Найден спектр собственных мод для двух типов граничных условий, соответствующих предельным случаям систем полностью согласованных (открытых) или, напротив, закрытых для вывода поперечных электромагнитных потоков. Показано, что даже в случае закрытых для поперечных потоков

систем имеет место высокая степень селективности по азимутальному индексу при периметре резонатора, на порядок превосходящем длину волны. Обеспечение максимального согласования с выходными трактами для поперечных потоков энергии должно приводить к росту селективности и возможности дальнейшего периметра резонатора.

1. Модель и основные уравнения

Предположим, что электродинамическая система (рис. 1, *a*) представляет собой коаксиальный волновод со средним радиусом r_0 , на боковые стенки которого нанесена двоякопериодическая гофрировка, представляющая собой суперпозицию двух винтовых гофрировок с противоположным направлением вращения,

$$a = a_1 \cos(\bar{h}_z z) \cos(\bar{M}\varphi) = \frac{a_1}{2} [\cos(\bar{h}_z z - \bar{M}\varphi) + \cos(\bar{h}_z z + \bar{M}\varphi)], \quad (1)$$

где $2a_1$ — глубина гофрировки, $\bar{h}_z = 2\pi/d_z$, d_z — период гофрировки вдоль оси z , \bar{M} — число заходов гофрировки по азимуту, z и φ — продольная и азимутальная координаты соответственно.

Предположим также, что волновод имеет малую кривизну, т.е. радиус волновода существенно превосходит длину волны λ и расстояние (зазор) между проводниками a_0 ,

$$r_0 \gg \lambda, \quad r_0 \gg a_0. \quad (2)$$

В этих предположениях дисперсионное уравнение для собственных волн коаксиального волновода может быть приведено к виду [9]

$$\frac{\omega^2}{c^2} = h_z^2 + h_x^2 + \kappa_p^2, \quad (3)$$

который аналогичен дисперсионному уравнению планарного волновода. Здесь h_z — продольное волновое число, $h_x = M/r_0$ — азимутальное волновое число, $\kappa_p = p\pi/a_0$ — радиальное волновое число, M и p — число вариаций волны по азимуту и радиусу соответственно.

В случае малой глубины гофрировки $\bar{h}_{z,x} a_1 \ll 1$ поле в рассматриваемой системе можно представить в виде четырех связанных волновых потоков, два из которых A_{\pm} распространяются в продольном $\pm z$ направлении, а два других B_{\pm} — в азимутальном направлении

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[(A_+ \mathbf{E}_1^0 e^{ih_1 z} + A_- \mathbf{E}_1^0 e^{-ih_1 z} + B_+ \mathbf{E}_2^0 e^{ih_2 x} + B_- \mathbf{E}_2^0 e^{-ih_2 x}) e^{i\omega t} \right], \quad (4)$$

где $x = r_0\varphi$ — координата вдоль азимута волновода; $A_{\pm}(x, z)$, $B_{\pm}(x, z)$ — медленно меняющиеся продольный и азимутальный координаты амплитуды волновых

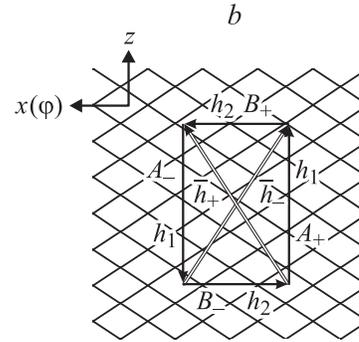
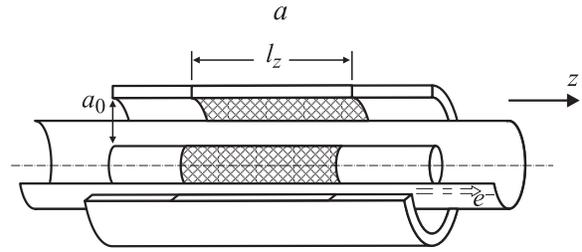


Рис. 1. *a* — схема коаксиального двумерного брэгговского резонатора, показан трубчатый электронный пучок, движущийся в $+z$ -направлении; *b* — диаграмма, иллюстрирующая рассеяние парциальных волн на двумерной брэгговской решетке, $\bar{\mathbf{h}}_{\pm} = \bar{\mathbf{h}}_x \mathbf{x}^0 \pm \bar{\mathbf{h}}_z \mathbf{z}^0$ — векторы решетки.

потоков; $\mathbf{E}_{1,2}^0(r)$ — функции, описывающие их радиальную структуру, совпадающую с модами коаксиального волновода.

На брэгговской решетке (1) происходит связь и взаимное рассеяние парциальных волновых потоков (4), если геометрические параметры решетки $\bar{h}_{x,z}$ выбраны таким образом, что постоянные распространения волн $h_{1,2}$ удовлетворяют условию брэгговского резонанса (рис. 1, *b*)

$$h_1 \approx \bar{h}_z, \quad (5a)$$

$$h_2 \approx \bar{h}_x, \quad (5b)$$

где $\bar{h}_x = \bar{M}/r_0$.

Будем считать далее

$$\bar{h}_x = \bar{h}_z = \bar{h}, \quad (6)$$

что соответствует случаю рассеяния на брэгговской структуре волновых потоков с одинаковым числом вариаций по радиусу p . При этом геометрические параметры системы связаны геометрическим соотношением $\bar{M}/r_0 = 2\pi/d_z$. Для простоты ограничимся здесь рассеянием низших волн, не имеющих радиальных вариаций поля, т.е. положим $p = 0$. В этом случае имеет место связь продольно распространяющихся волн A_{\pm} $TE_{M,0}$ -типа с низкими азимутальными индексами, включая низшую TEM -волну (которой соответствует $M = 0$) и поперечно (азимутально) распространяющихся волн B_{\pm} $TE_{M,0}$ -типа с большими азимутальными индексами $M \gg 1$. Отметим, что при выполнении

условий (2) структура $TE_{M,0}$ -волн близка к TEM -модам (что и соответствует переходу к дисперсионному уравнению (3)).

В условиях (2), (6) взаимное рассеяние четырех электромагнитных потоков может быть описано уравнениями связанных волн (ср. с [3,6])

$$\begin{aligned} \pm \frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} + i\delta A_{\pm} + i\alpha(B_{+} + B_{-}) &= 0, \\ \frac{i}{2\bar{h}} \frac{\partial^2 B_{\pm}}{\partial z^2} \pm \frac{\partial B_{\pm}}{\partial x} + i\delta B_{\pm} + i\alpha(A_{+} + A_{-}) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta = (\omega - \bar{\omega})/c$ — отстройка от частоты точного брэгговского резонанса $\bar{\omega} = \bar{h}c$; α — коэффициент связи волн, который для рассеяния волн $TE_{M,0}$ -типа в предположении, что внутренние поверхности обоих проводников гофрированы синфазно, равен

$$\alpha = \frac{a_1 \bar{h}}{2a_0}. \quad (8)$$

Заметим, что уравнение для парциальных потоков B_{\pm} , распространяющихся в поперечном $\pm x$ ($\pm \varphi$) направлении, относится к параболическому типу и учитывает эффекты дифракции (без учета дифракционного расплывания эти волны, очевидно, являются запертыми в системе конечной длины). Вместе с тем для волн A_{\pm} , распространяющихся в продольном $\pm z$ -направлении, указанные эффекты не учитываются, поскольку не меняют качественно характеристик системы.

С учетом коаксиальной геометрии системы все парциальные волновые потоки должны удовлетворять условию цикличности

$$B_{\pm}(x + l_x, z) = B_{\pm}(x, z), \quad A_{\pm}(x + l_x, z) = A_{\pm}(x, z), \quad (9)$$

где $l_x = 2\pi r_0$ — периметр системы.

Условие цикличности позволяет разложить поля в ряды Фурье

$$\begin{aligned} A_{\pm}(x, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\pm}^m(z) e^{2\pi i m x / l_x}, \\ B_{\pm}(x, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\pm}^m(z) e^{2\pi i m x / l_x} \end{aligned} \quad (10)$$

и рассматривать каждую гармонику как нормальную моду, отличающуюся индексом m . Подставляя разложение (10) в уравнения (7) для амплитуд гармоник, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \pm \frac{dA_{\pm}^m}{dz} + i\delta A_{\pm}^m + i\alpha(B_{+}^m + B_{-}^m) &= 0, \\ \frac{1}{2\bar{h}} \frac{d^2 B_{\pm}^m}{dz^2} + \left(\delta \pm \frac{2\pi m}{l_x} \right) B_{\pm}^m + \alpha(A_{+}^m + A_{-}^m) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Следует отметить, что в соответствии с соотношениями (4), (5) для парциальных волн B_{\pm} , распространяющихся в азимутальном направлении, индекс m является дополнительным к азимутальному индексу M . Таким образом, с точки зрения обычной номенклатуры волн коаксиального волновода для наиболее высокодобротной моды с $m = 0$, которая ниже называется симметричной, в действительности к симметричному типу относятся только поля парциальных волн A_{\pm} , в то время как поля парциальных волн B_{\pm} обладают азимутальным индексом M . В общем случае для нормальных волн в безграничной в продольном направлении системе (раздел 2) либо собственных мод ограниченного в продольном направлении резонатора (раздел 3) нормальная волна (собственная мода) с индексом m представляет собой совокупность связанных парциальных волн, в которых волны A_{\pm} характеризуются азимутальным индексом m , а волны B_{\pm} имеют соответственно азимутальный индекс $M \pm m$. При этом условием применимости уравнения (10) является предположение, что $M \gg m$.

2. Дисперсионные характеристики нормальных волн двоякопериодически гофрированных коаксиальных волноводов

Предполагая, что коаксиальная структура с двоякопериодической гофрировкой боковых стенок безгранична в продольном направлении, и представляя решение уравнений (11) в виде $A_{\pm}^m = a_{\pm}^m e^{i\Gamma z}$, $B_{\pm}^m = b_{\pm}^m e^{i\Gamma z}$, приходим к дисперсионному уравнению для нормальных волн

$$\begin{aligned} \left(2\bar{h}\delta - 2\bar{h} \frac{2\pi m}{l_x} - \Gamma^2 \right) \left(2\bar{h}\delta + 2\bar{h} \frac{2\pi m}{l_x} - \Gamma^2 \right) \\ \times (\delta^2 - \Gamma^2) = 8\alpha^2 \bar{h} \delta (2\bar{h}\delta - \Gamma^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, в общем случае дисперсионное уравнение (12) описывает связь четырех парциальных волн. При коэффициенте связи волн $\alpha = 0$ уравнение распадается на четыре уравнения, описывающих две продольные волны A_{\pm} с дисперсионными характеристиками, определяемыми соотношениями

$$\delta = \pm \Gamma, \quad (13a)$$

и две квазикритические волны B_{\pm} , распространяющиеся в азимутальном направлении с законом дисперсии

$$2\bar{h}\delta = \pm 2\bar{h} \frac{2\pi m}{l_x} + \Gamma^2. \quad (13b)$$

Отметим, что в использованных выше предположениях дисперсионные зависимости для парциальных волн (13) могут быть непосредственно получены из исходного дисперсионного уравнения (3). Вблизи брэгговской

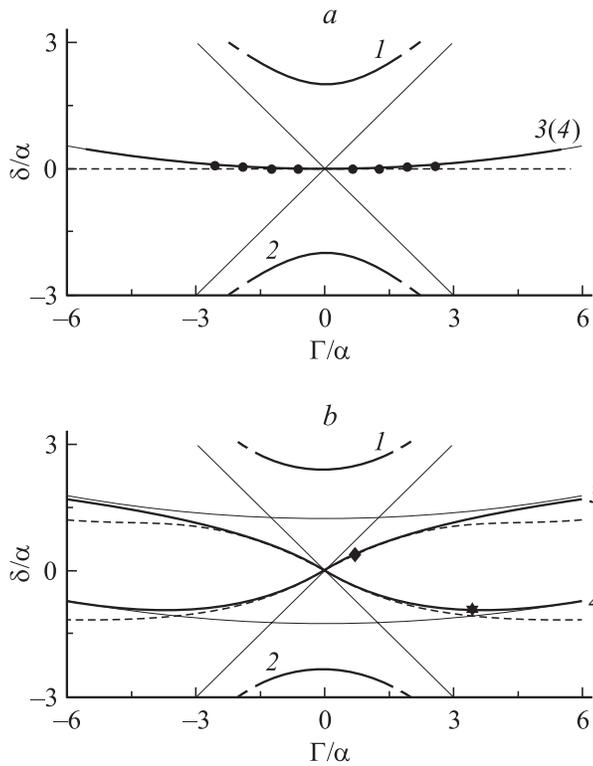


Рис. 2. Дисперсионные диаграммы нормальных волн в бесконечной в продольном направлении брэгговской структуре коаксиальной геометрии при $\bar{h}/\alpha = 35$ для (a) симметричных волн $m = 0$ и (b) несимметричных волн $m = \pm 1$ (классификация ведется по структуре продольных парциальных волн). Тонкие линии — дисперсионные кривые парциальных волн, штриховая — дисперсионные кривые нормальных волн, получаемых в рамках геометрооптического приближения. Кружки — положение симметричных (a) мод вблизи брэгговской частоты и положение несимметричных (b) мод, показанных на рис. 9 ($\alpha l_x = \alpha l_z = 5$).

частоты $\omega = \bar{\omega} + c\delta = c(\bar{h} + \delta)$, где $\delta \ll \bar{h}$. Тогда из уравнения (3) для поперечно распространяющихся парциальных волн B_{\pm} с учетом $\bar{M} \gg m$ и брэгговского условия (5b) имеем

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} + 2\frac{\bar{\omega}}{c}\delta = h_z^2 + \frac{(\bar{M} \pm m)^2}{r_0^2} \approx h_z^2 + \bar{h}^2 \pm \frac{2\bar{h}m}{r_0}.$$

Полагая теперь $h_z = \Gamma$, приходим к дисперсионному уравнению (13b). Аналогично для продольно распространяющихся парциальных волн A_{\pm} с учетом (5a), подставляя в дисперсионное уравнение (3) волновое число в виде $h_z = \pm h + \Gamma$, после пренебрежения членами высшего порядка малости получаем

$$\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} + 2\frac{\bar{\omega}}{c}\delta = (\pm h + \Gamma)^2 + \frac{m^2}{r_0^2} \approx \bar{h}^2 \pm 2\bar{h}\Gamma,$$

что эквивалентно дисперсионному уравнению (13a).

На рис. 2 показаны дисперсионные диаграммы для нормальных волн в случае $m = 0$ и $m \neq 0$. Из сопоставления с асимптотами, даваемыми соотношениями (13) и представленными на рисунке тонкими линиями, следует заключить, что ветви 1 и 2 порождены парциальными волнами A_{\pm} , в то время как ветви 3 и 4 имеют в качестве своей основы волны B_{\pm} . В целом характерной особенностью приведенных дисперсионных диаграмм, отличающих их от соответствующих характеристик одномерных брэгговских структур, является наличие зоны прозрачности вблизи точной брэгговской частоты $\bar{\omega}$ (т.е. в окрестности $\delta = 0$). Такая особенность обусловлена тем, что в условиях брэгговского резонанса (5) в процессе рассеяния участвуют квазикритические волны B_{\pm} , невозмущенные дисперсионные характеристики которых (13b) проходят вблизи брэгговской частоты.

Для дальнейшего анализа еще более существенным обстоятельством является качественное отличие поведения в окрестности брэгговской частоты $\delta = 0$ дисперсионных характеристик нормальных волн с нулевым и ненулевым азимутальным индексом. В случае $m = 0$ имеет место слияние невозмущенных дисперсионных характеристик парциальных волн (13b), при учете связи волн $\alpha \neq 0$ дисперсионное уравнение (12) преобразуется к виду

$$(2\bar{h}\delta - \Gamma^2)(\delta^2 - \Gamma^2) = 8\alpha^2\bar{h}\delta, \quad 2\bar{h}\delta = \Gamma^2. \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что вблизи брэгговской частоты для одной из ветвей вместо традиционной параболической зависимости частоты от волнового числа второй степени (подобные зависимости типичны вблизи границ зон непрозрачности, например, для одномерных брэгговских структур [10–12]) имеет место более высокая параболическая зависимость четвертой степени (ср. с [6])

$$\Gamma^4 = 8\alpha^2\bar{h}\delta. \quad (15)$$

Таким образом, вблизи брэгговской частоты $\delta = 0$ не только групповая скорость волны, но и ее производная обращаются в нуль. Значительное отличие дисперсионных кривых симметричных нормальных волн и парциальных волн вблизи брэгговской частоты иллюстрируется на рис. 3, где эти дисперсионные характеристики показаны в увеличенном по сравнению с рис. 2, a масштабе, т.е. в масштабе, сопоставимом с межмодовым расстоянием (положение собственных мод с различным числом продольных вариаций отмечено кружками). Из рис. 3 видно, что основной моде ($m = 0; n = 1$) соответствует предельно малое значение групповой скорости нормальной волны. Фактически это обстоятельство, как показано в разделе 2, и приводит к выделенности данной моды и к значительному превышению ее добротности над добротностью прочих симметричных и несимметричных мод.

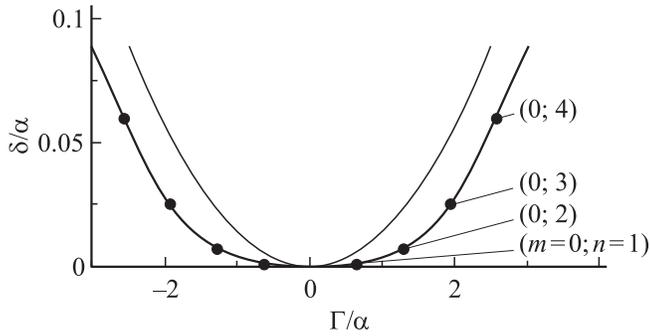


Рис. 3. Отличие в законах дисперсии симметричной нормальной волны (жирная кривая) и парциальной квазикритической волны (тонкая кривая) вблизи брэгговской частоты при $\hbar/\alpha = 35$. Точки — положение симметричных мод резонатора при $\alpha l_z = 5$.

Рассмотрим теперь геометрическое приближение, которое формально соответствует предельному переходу $\lambda \rightarrow 0$, т.е. с учетом (5) $\hbar \rightarrow \infty$ в уравнениях (11). В этом случае в уравнениях (11) можно пренебречь членом $\sim d^2 B_{\pm}^m / dz^2$, описывающим дифракционное расплывание волн B_{\pm} . Соответственно дисперсионное уравнение (12) при $\hbar \rightarrow \infty$ приводится к виду

$$\left(\delta - \frac{2\pi m}{l_x}\right) \left(\delta + \frac{2\pi m}{l_x}\right) (\delta^2 - \Gamma^2) = 4\alpha^2 \delta^2. \quad (16)$$

Дисперсионные характеристики, соответствующие уравнению (16), представлены на рис. 2 штриховыми линиями. Видно, что в области малых волновых чисел $\Gamma \leq \alpha$ данные характеристики достаточно хорошо аппроксимируют дисперсионные кривые, полученные в рамках квазиоптического приближения, т.е. уравнения (12). В частности, уже в геометрическом приближении проявляется качественное отличие в поведении дисперсионных кривых вблизи брэгговской частоты в случае симметричной $m = 0$ и несимметричных $m \neq 0$ нормальных волн, которое в конечном итоге и обуславливает селективность системы по азимутальному индексу. Вместе с тем дисперсионные кривые 3, 4 при $m = 0$ трансформируются в прямую $\delta = 0$. В результате в геометрическом приближении возникают определенные трудности при описании спектра симметричных мод резонатора с различным продольным индексом, поскольку имеет место вырождение этих мод по собственным частотам, которые для всех мод совпадают с брэгговской частотой. Кроме того, у данных мод отсутствуют дифракционные потери, т.е. формально они обладают бесконечной добротностью. Однако, как было впервые показано в [6], данное вырождение снимается при учете дифракционных эффектов, когда соответствующая дисперсионная кривая трансформируется в определяемую соотношением (15).

3. Селекция мод в двумерных брэгговских резонаторах коаксиальной геометрии

Для нахождения спектра собственных мод двумерных брэгговских резонаторов, образованных отрезком коаксиального волновода с двойкопериодической гофрировкой в области конечной длины l_z , необходимо сформулировать граничные условия на концах системы, т.е. при $z = 0$ и $z = l_z$. Рассмотрим здесь два предельных случая граничных условий, соответствующих полностью согласованной (открытой) системе (а) и системе, закрытой для вывода поперечных электромагнитных потоков (б). В первом случае (случае а) будем считать, что на торцах резонатора имеет место идеальное согласование как для продольно (A_{\pm}), так и для поперечно (B_{\pm}) распространяющихся парциальных волн, которое, вообще говоря, может быть достигнуто в требуемом частотном диапазоне путем профилирования поперечного сечения волновода и параметров гофрировки. Будем также предполагать отсутствие падающих на систему извне потоков электромагнитной энергии, ассоциированных как с парциальными волнами A_{\pm} , так и с парциальными волнами B_{\pm} . В таких условиях для парциальных волн A_{\pm} аналогично одномерным брэгговским резонаторам (ср. с [10–12]) имеем

$$A_{+}(x, z = 0) = 0, \quad A_{-}(x, z = l_z) = 0. \quad (17)$$

Фактически условия (17) означают, что продольные потоки электромагнитной энергии вытекают из системы без дополнительных отражений от торцов системы $z = 0, l_z$ (при этом внутри резонатора имеет место описываемое уравнениями (10) распределенное рассеяние указанных волн в волны B_{\pm}). В предположении, что аналогичная ситуация реализуется и для квазипоперечно распространяющихся парциальных волн B_{\pm} , на границах гофра следует использовать так называемое безотражающее граничное условие (ср. с [13])

$$\left[\frac{dB_{\pm}^m}{dz} - i \sqrt{2\hbar \left(\pm \frac{2\pi m}{l_x} + \delta \right)} B_{\pm}^m \right] \Big|_{z=0} = 0, \\ \left[\frac{dB_{\pm}^m}{dz} + i \sqrt{2\hbar \left(\pm \frac{2\pi m}{l_x} + \delta \right)} B_{\pm}^m \right] \Big|_{z=l_z} = 0. \quad (18)$$

При выполнении данного условия в отсутствие связи волн $\alpha = 0$ имеет место свободное дифрагирование полей B_{\pm} через обозначенные границы, как это имело бы место в регулярном волноводе.

Следует однако отметить, что нерегулярность электродинамической системы на границах резонатора (границах области гофрировки) может приводить к возникновению определенных отражений, прежде всего для квазикритических волн B_{\pm} . Таким образом, в качестве противоположного предельного случая (случае б) представляет интерес исследование резонатора полностью

закрытого для вывода поперечных потоков электромагнитной энергии. Этот случай может быть реализован путем установки на концах области гофрировки критических сужений для квазикритических поперечных волн B_{\pm} . При полном отражении указанных волн от концов резонатора в качестве граничных условий имеем

$$B_{\pm}(x, z = 0) = 0, \quad B_{\pm}(x, z = l_z) = 0. \quad (19)$$

При этом для распространяющихся в продольном направлении волн A_{\pm} неоднородность сечения волновода будем считать незначительной и не приводящей к их отражению от границы гофрировки, что позволяет для этих волн по-прежнему использовать граничные условия (17).

а) Согласованная (открытая) система. Используя граничные условия (17), (18) в совокупности с дисперсионным уравнением (14) для азимутально-симметричных мод $m = 0$, приходим к характеристическому уравнению, приведенному в Приложении. Для наиболее высокодобротных азимутально-симметричных мод с частотой, близкой к брэгговской ($\delta \ll \alpha$), в условии сильной связи волн $\alpha l_{x,z} \gg 1$ с учетом специфического закона дисперсии (15) получаем для комплексных собственных частот соотношение [6]

$$\delta_n \frac{\pi^4 n^4}{8\hbar \alpha^2 l_z^4} + i \frac{\pi^4 n^4}{4\hbar \alpha^3 l_z^5}, \quad (20)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — продольный индекс мод.

Положение этих мод отмечено кружками на дисперсионной кривой, представленной на рис. 3. Собственные частоты мод $\omega_{m,n}$ и их добротности $Q_{m,n}$ определяются как

$$\omega_{m,n} = \bar{\omega} + c \operatorname{Re}(\delta_{m,n}),$$

$$Q_{m,n} = \frac{\bar{\omega}}{2c \operatorname{Im}(\delta_{m,n})}. \quad (21)$$

Из выражений (20), (21) следует, что наибольшей добротностью (т.е. наименьшими дифракционными потерями) обладает мода с одной продольной вариацией поля $n = 1$. При увеличении продольного номера моды дифракционные потери растут по закону $\sim n^4$. Заметим, что в случае традиционного одномерного брэгговского резонатора в виде участка гофрированного коаксиального волновода, при той же геометрии и коэффициенте связи волн для коэффициента потерь имеем [10–12]

$$\operatorname{Im}(\delta_n) \approx \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2 l_z^3}. \quad (22)$$

Из сравнения соотношений (20) и (22) следует, что двумерный брэгговский резонатор при той же величине коэффициента связи α обладает существенно большей добротностью и значительно большей селективностью, в том числе и по продольному индексу n . Это является следствием упомянутого закона дисперсии (15). Для двумерного резонатора продольное распределение полей парциальных волн для основной моды $n = 1$ при $\alpha l_x = \alpha l_z = 5$ показано на рис. 4, а.

Найденные аналитически значения добротности (коэффициентов потерь) для симметричных мод достаточно хорошо согласуются с результатами численного решения полного характеристического уравнения, которое следует из системы линейных уравнений (11) с учетом граничных условий (18) и представляет собой определитель шестого порядка. Комплексные собственные частоты находились как нули аналитической функции с использованием принципа аргумента [14].

Следует отметить, что кроме семейства мод вблизи брэгговской частоты $\delta \approx 0$ существует семейство высокодобротных симметричных мод с частотами, лежащими около значений $\delta \approx \pm 2\alpha$ (рис. 4, b, c), т.е. около дополнительных экстремумов дисперсионных характеристик. Для этих экстремумов групповая скорость нормальных волн, очевидно, также стремится к нулю. Однако в отличие от дисперсионной ветви, проходящей вблизи брэгговской частоты, вторая производная здесь остается отличной от нуля, и в результате добротность данных мод значительно меньше добротности мод вблизи $\delta \approx 0$.

Для несимметричных мод $m \neq 0$ комплексные собственные частоты также находились с помощью численных методов. Как показывает численное моделирование, наименьшими потерями (наибольшей добротностью) в семействе несимметричных мод, отличающихся продольным индексом n , обладает мода, частота которой лежит вблизи минимума на дисперсионной кривой, т.е. вблизи нуля групповой скорости (ср. с [9,15]). На дисперсионной диаграмме, представленной на рис. 2, b, положение частоты данной моды при $m = 1$ отмечено звездочкой. На рис. 5 показаны пространственные структуры парциальных волн этой моды. Следует однако отметить, что в случае несимметричных мод вторая производная также остается отличной от нуля. В этой связи добротность несимметричных мод оказывается существенно меньше добротности основной симметричной моды с частотой вблизи брэгговской частоты. Заметим также, что особенностью несимметричных волн, обладающих максимально высокой добротностью, является большое число продольных вариаций поля парциальных волн, а также малая величина полей продольных парциальных волн по сравнению с поперечными парциальными волнами (ср. рис. 4 и 5). Таким образом, эти моды могут дополнительно селективироваться электронным пучком вследствие значительного отличия в условиях синхронизма или относительно малой амплитуды поля рабочей волны (при описании взаимодействия с электронным потоком [3,6–8] считаем синхронной волну A_{+} , распространяющуюся в $+z$ -направлении).

В целом проведенный анализ спектра собственных мод резонатора показывает, что для рассматриваемой геометрии резонатора, когда периметр системы равен его продольной длине, потери для несимметричных мод более чем на порядок превосходят потери основной симметричной моды (рис. 6), что обеспечивает высокую электродинамическую селективность предложенного резонатора.

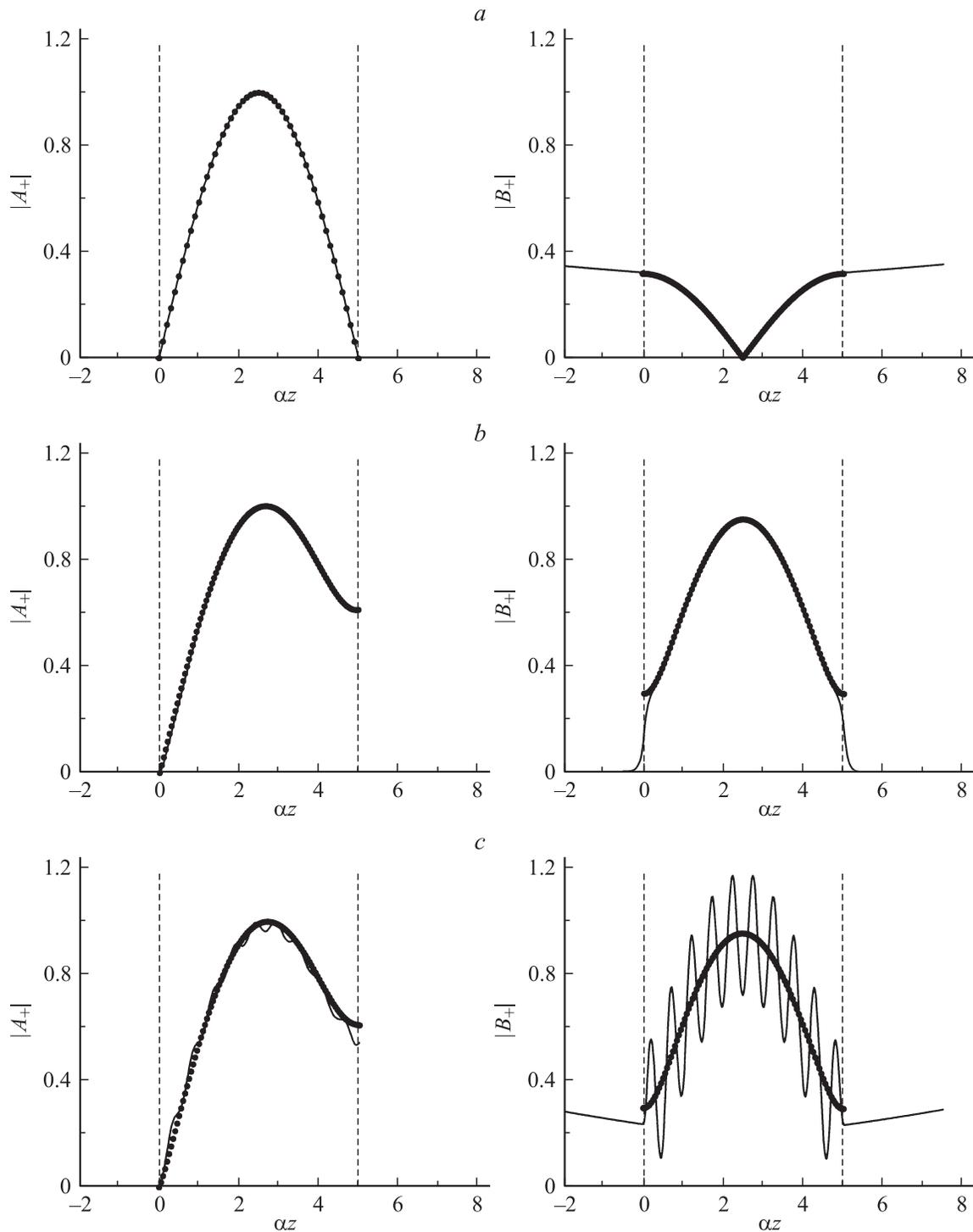


Рис. 4. Продольная структура полей парциальных волн A_+ и B_+ для мод ($m = 0; n = 1$), расположенных в окрестности (а) $\delta \approx 0$, (б) $\delta \approx -2\alpha$ и (в) $\delta \approx +2\alpha$ в случае резонатора, согласованного для вывода поперечных потоков энергии: $\bar{h}/\alpha = 35$, $\alpha l_x = \alpha l_z = 5$. Кружки — структуры соответствующих полей, получаемых в рамках квазиоптического приближения. Штриховые линии ограничивают область, занятую гофрировкой.

Вместе с тем при увеличении периметра системы l_x при фиксированной длине l_z имеет место определенное снижение селективных свойств двумерного брэгговского резонатора. Это может быть объяснено тем, что при увеличении параметра l_x для несимметричных волн

($m \neq 0$) дисперсионные кривые 3 и 4 становятся в целом более пологими, приближаясь в пределе $l_x \rightarrow \infty$ (см. уравнение (12)) к дисперсионной характеристике симметричной волны, которая не зависит от периметра системы. Тем не менее данное обстоятельство накладывает

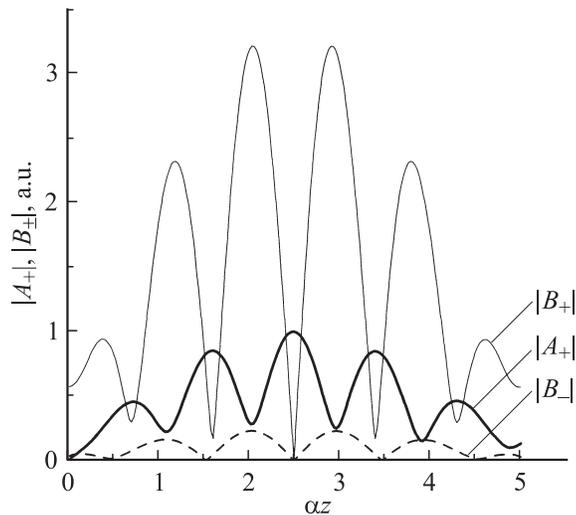


Рис. 5. Продольная структура полей парциальных волн A_+ и B_{\pm} для наиболее добротной несимметричной моды $m = 1$ в случае резонатора, согласованного для вывода поперечных потоков энергии: $\bar{h}/\alpha = 35$, $al_x = al_z = 5$. Положение частоты этой моды отмечено на рис. 2, *b* звездочкой.

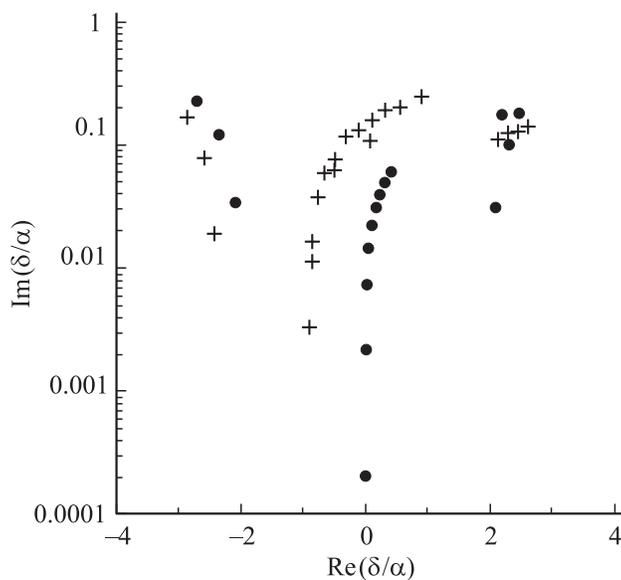


Рис. 6. Спектр мод резонатора, согласованного для вывода поперечных потоков энергии: $\bar{h}/\alpha = 35$, $al_x = al_z = 5$. Кружки — симметричные моды $m = 0$, крестики — несимметричные моды $m = 1$.

вайт весьма мягкие ограничения на поперечный размер системы. Так, на рис. 7, *a* для случая $al_z = 5$ показана зависимость минимального коэффициента потерь $\text{Im}(\delta)$ от периметра системы для несимметричных мод $m = 1$. Штриховой линией на этом рисунке представлен уровень дифракционных потерь основной (наиболее высокодобротной) симметричной моды. Видно, что значения потерь для этих мод сравниваются при периметре $al_x \geq 80$. Заметим, что нерегулярность кривых на рис. 7

связана с тем, что при изменении периметра положение экстремума дисперсионной кривой претерпевает изменения и в область этого экстремума попадают моды с разным числом продольных вариаций n . Таким образом, при изменении периметра происходит изменение числа продольных вариаций моды, характеризующейся максимальной добротностью. Увеличение азимутального индекса моды m , как видно из дисперсионного уравнения (12), эквивалентно уменьшению эффективного периметра системы до значений $l_x^{\text{eff}} = l_x/m$. Таким образом, как следует из рис. 7, увеличение азимутального индекса в целом не приводит к повышению добротности паразитных мод.

Следует также отметить, что если наряду с увеличением периметра системы l_x пропорционально увеличивать его продольный размер l_z , то за счет повышения добротности основной симметричной моды (согласно (20), коэффициент потерь для этой моды падает как l_z^5) можно добиться сохранения селективных свойств резонатора

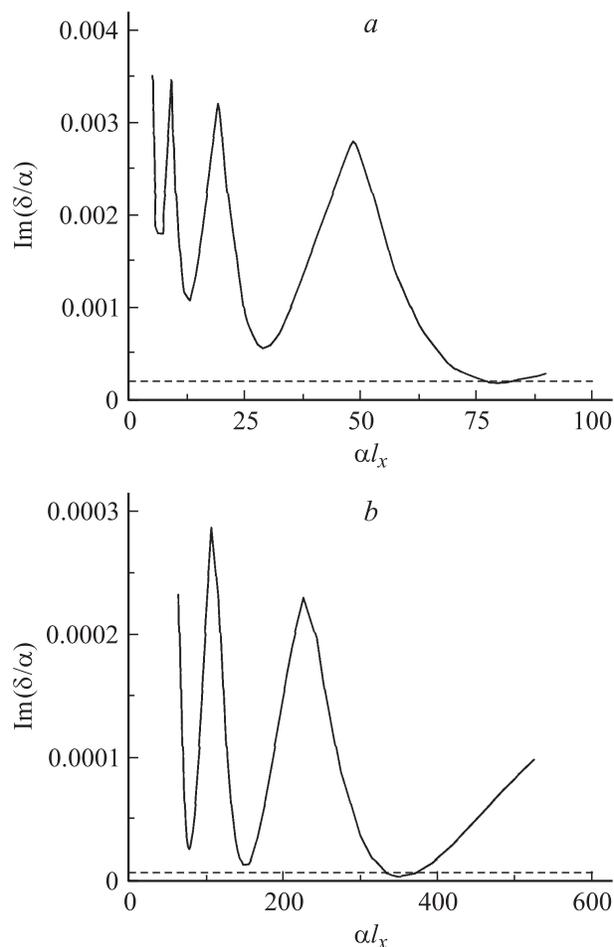


Рис. 7. Зависимость коэффициента дифракционных потерь $\text{Im}(\delta)$ для наиболее добротной моды $m = 1$ от периметра системы al_x в случае согласованного резонатора при $\bar{h}/\alpha = 35$, $al_z = 5$ (*a*), 10 (*b*). Штриховая линия — потери основной симметричной моды $m = 0$, обладающей максимальной добротностью.

при больших периметрах. Для сравнения на рис. 7, *b* показана зависимость минимальных потерь в семействе несимметричных мод $m = 1$ от периметра при $\alpha l_z = 10$. Таким образом, при увеличении длины вдвое предельная ширина системы, когда резонатор сохраняет свои селективные свойства (т.е. добротность основной симметричной моды превосходит добротность несимметричных мод), возрастает до $\alpha l_x \leq 300$. Заметим также, что во всех приведенных выше зависимостях фигурируют нормализованные длина и периметр резонатора, т.е. $\alpha l_{x,z}$. Таким образом, существует дополнительный потенциал поддержания селективности, если одновременно с увеличением геометрического значения периметра уменьшать коэффициент связи волн α (например, уменьшать глубину гофра), поддерживая нормализованное значение периметра постоянным. Естественно, при этом в необходимой пропорции должен расти и продольный размер резонатора l_z .

Поскольку анализ нелинейной динамики МСЭ с двумерными брэгговскими резонаторами [3,6–8] основан на использовании геометрооптического приближения, представляется важным сравнение полученных здесь решений на основе квазиоптического подхода с результатами предшествующего анализа коаксиальных двумерных брэгговских резонаторов в рамках геометрооптического приближения. Получаемое в рамках этого приближения распределение полей парциальных волн в области, занятой гофрировкой для основной симметричной моды $\delta \approx 0$, показано кружками на рис. 4, *a*. Видно, что для основной моды в рамках обоих подходов имеет место практически полное совпадение структуры, за исключением небольшой зоны вблизи границы гофра. Таким образом, при моделировании взаимодействия с электронным потоком структура поля рабочей волны A_+ , найденная в рамках геометрического приближения, позволяет правильно описать группировку и отбор энергии у электронного потока. Вместе с тем очевидно, что если в рамках геометрической оптики структура полей B_{\pm} на границах гофрировки претерпевают разрыв, то с учетом дифракции через границу гофрировки решения оказываются непрерывными. На рис. 4, *b* и *c* проведено сравнение структур парциальных волн, которые получены в рамках указанных приближений для мод, расположенных вблизи $\delta \approx \pm 2\alpha$. Для данных мод геометрооптическое приближение также достаточно полно аппроксимирует пространственную структуру. Достаточно хорошее соответствие имеет место и для комплексных собственных частот. Так, для моды, представленной на рис. 4, *c*, в рамках квазиоптического приближения $\delta = 2.09 + i \cdot 0.032$, в то время как в рамках геометрооптического подхода $\delta = 2.09 + i \cdot 0.035$.

Проблема вырождения по продольному индексу, а также бесконечной добротности для азимутально-симметричных мод при моделировании нелинейная динамика МСЭ в рамках геометрооптического подхода решалась следующим образом. Предполагалось, что дифракционная добротность симметричных мод значительно

превышает омическую добротность, и, таким образом, омические потери ограничивают добротность указанных мод, в то время как для азимутально-несимметричных мод добротность ограничена дифракционными потерями. В рамках такой модели вырождение по продольному индексу снимается при учете взаимодействия с электронным потоком (комплексная проводимость, вносимая электронным потоком в резонатор, существенно отличается в зависимости от числа продольных вариаций возбуждаемой моды).

б) Система, закрытая для вывода поперечных электромагнитных потоков. Для резонатора, в котором имеет место полное отражение поперечных потоков электромагнитной энергии от границ гофра, структуры полей парциальных волн, полученные в результате численного моделирования уравнений (10) с граничными условиями (17), (19), для наиболее высокодобротной азимутально-симметричной моды $m = 0$ приведены на рис. 8. Указанная мода обладает одной продольной вариацией поля для волн A_{\pm} и двумя продольными вариациями для волн B_{\pm} , частота этой моды по-прежнему близка к частоте точного брэгговского резонанса. Очевидно, что в системе, закрытой для поперечных волн, вывод энергии из резонатора осуществляется только за счет излучения волн A_{\pm} (следует отметить, что на рис. 8 амплитуда волны A_+ на границе резонатора $z = l_z$ отлична от нуля, хотя ее значение очень мало).

Для несимметричных волн численное моделирование показывает существование нескольких семейств мод, обладающих высокой добротностью. Моды из первого семейства, как и в случае открытого резонатора, расположены вблизи минимума групповой скорости и, таким образом, имеют собственную частоту, сравнительно сильно отличающуюся от брэгговской. Структура

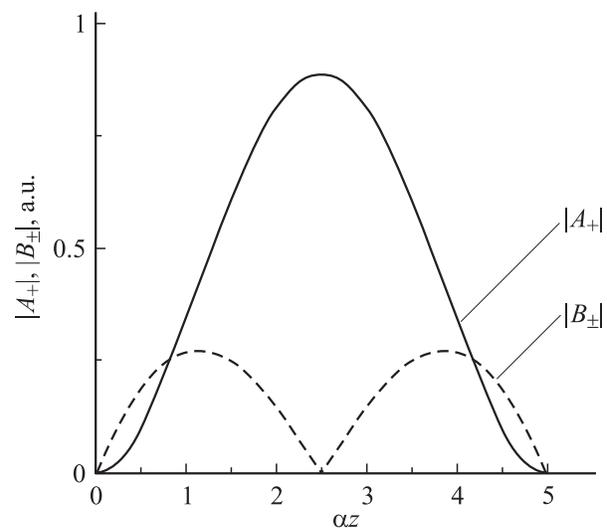


Рис. 8. Продольная структура полей парциальных волн A_+ и B_{\pm} для основной высокодобротной моды $m = 0$ в случае резонатора, закрытого для вывода поперечных потоков энергии: $\bar{h}/\alpha = 35$, $\alpha l_x = \alpha l_z = 5$.

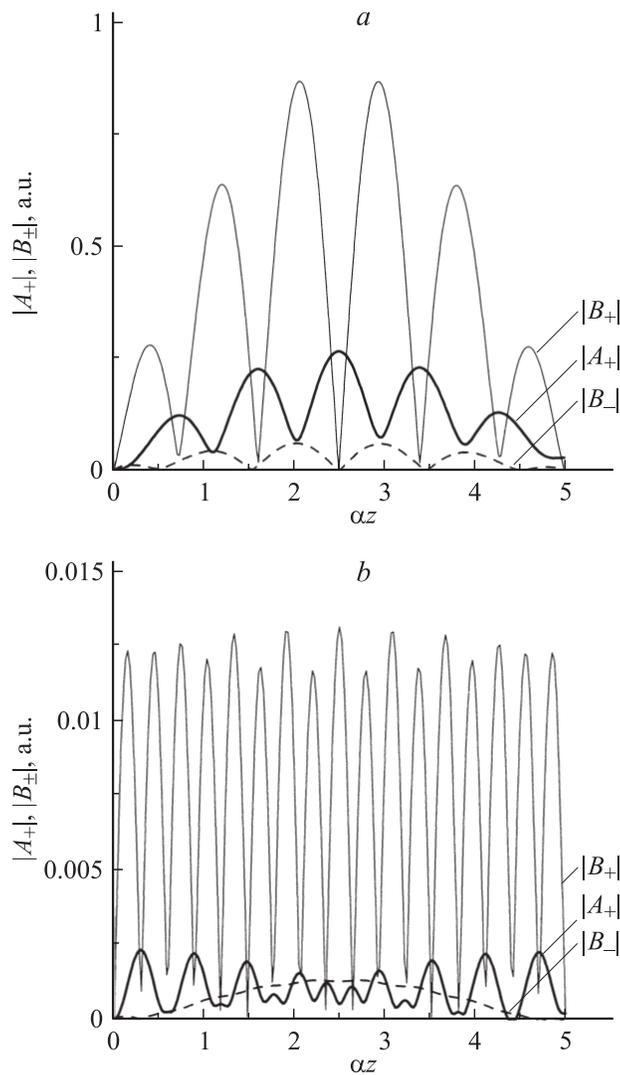


Рис. 9. Продольная структура полей парциальных волн A_{\pm} и B_{\pm} для несимметричных мод $m = 1$, обладающих максимальной добротностью в двух разных семействах, в случае резонатора, закрытого для вывода поперечных потоков энергии ($\hbar/\alpha = 35$, $al_x = al_z = 5$): $\text{Re}(\delta/\alpha) = -0.91$ (a), 0.37 (b). Положение частот этих мод отмечено на рис. 2, b звездочкой и ромбом соответственно.

парциальных волн для несимметричной моды $m = 1$, обладающей наибольшей добротностью в этом семействе, показана на рис. 9, a, частота этой моды отмечена на рис. 2, b звездочкой.

Второе семейство высокодобротных несимметричных мод расположено вблизи брэгговской частоты $\delta \approx 0$ и непосредственно связано с используемым граничным условием (19) и порождаемым им спектром мод, которые в отсутствие гофра $\alpha = 0$ обладают бесконечной добротностью. В структуре этих мод при $\alpha = 0$ присутствуют только парциальные волны B_{\pm} , циркулирующие по азимуту. Введение гофрировки в целом уменьшает добротность этих мод за счет переизлучения в продольные моды A_{\pm} . Однако в случае двоякопериодиче-

ской гофрировки в результате интерференции рассеянных волн A_{+} и A_{-} может возникать ситуация, когда даже при конечном коэффициенте связи поток энергии из резонатора отсутствует и добротность определенных мод стремится к бесконечности. Действительно, из уравнений (10) с учетом граничных условий (19) на частоте точного брэгговского резонанса $\delta = 0$ при выполнении условия

$$\frac{\pi^2 n^2}{2\hbar l_z^2} = \frac{2\pi m}{l_x} \quad (23)$$

нетрудно получить решение

$$B_{-} \equiv 0, \quad B_{+} = C \sin\left(\frac{n\pi}{l_z} z\right),$$

$$A_{+} = -A_{-} = -\frac{ial_x}{n\pi} C \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{l_z} z\right)\right). \quad (24)$$

Из-за отсутствия на границах резонатора потоков электромагнитной энергии $A_{+} = A_{-} = 0$ добротность этой моды обращается в бесконечность. Следует, однако, отметить, что найденная мода существует только при практически полном отражении для полей парциальных волн B_{\pm} и, кроме того, требует вполне определенного соотношения между геометрическими размерами системы (23). Даже небольшое отклонение от геометрических размеров, определяемых соотношением (23), приводит к значительному снижению добротности мод данного семейства. Так, для выбранного в моделировании варианта двумерного брэгговского резонатора $al_x = al_z = 5$, когда условие (23) не выполнено, „симметрия“ полей парциальных волн для указанных мод нарушается $A_{+}(x, z) \neq -A_{-}(x, z)$ и соответственно $B_{-}(x, z) \neq 0$ (рис. 9, b). При этом собственные частоты этих мод приближенно определяются соотношением $\text{Re}(\delta_n) = \pi^2 n^2 / 2\hbar l_z^2 - 2\pi m / l_x$. В результате при выбранных параметрах добротность рассматриваемых паразитных волн становится значительно меньше добротности основной азимутально-симметричной моды. Отметим также, что аналогично случаю согласованного резонатора несимметричные моды, обладающие высокой добротностью, имеют по сравнению с основной симметричной модой значительно большее число продольных вариаций поля и меньшую амплитуду синхронной электронному потоку волны A_{+} (рис. 9). Это обстоятельство создает возможности для дополнительной (электронной) селекции этих мод при взаимодействии с электронным потоком, поскольку резонансное возбуждение паразитных мод должно иметь место при отличных от основной моды условий синхронизма и, кроме того, вследствие структурного фактора $A_{+}^{\text{max}}/B_{+}^{\text{max}} \ll 1$ эти моды обладают меньшей связью с пучком.

В целом следует отметить, что резонатор, закрытый для вывода поперечных электромагнитных потоков, является, очевидно, наиболее сложным вариантом с точки зрения обеспечения селективности. Тем не менее проведенный анализ показывает, что даже в этом

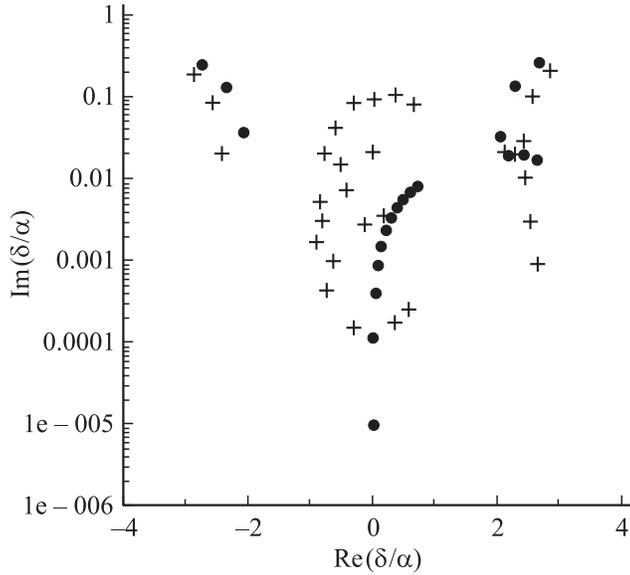


Рис. 10. Спектр мод резонатора, закрытого для вывода поперечных потоков, при $\hbar/\alpha = 35$, $\alpha l_x = \alpha l_z = 5$. Кружки — симметричные моды $m = 0$, крестики — несимметричные моды $m = 1$.

случае можно обеспечить условия, при которых при значительной сверхразмерности добротность основной азимутально-симметричной моды существенно превосходит добротности остальных мод (рис. 10).

Отметим в заключение, что параметры двумерного брэгговского резонатора $\alpha l_x = \alpha l_z = 5$, использованные при проведенном выше моделировании, соответствуют условиям экспериментов по исследованию коаксиального МСЭ с двумерной распределенной обратной связью, проводимых на базе сильноточного ускорителя Стратклайдского университета [5]. В этих экспериментах при рабочей длине волны 8 мм двумерный брэгговский резонатор рассчитан на связь волн TEM - и $TE_{25,0}$ -типа с коэффициентом связи $\alpha \sim 0.2 \text{ см}^{-1}$ и имеют характерную длину l_x и периметр l_x около 25 см. Таким образом, при любом варианте граничных условий для поперечных потоков B_{\pm} (определяемых профилем резонатора и гофра) из приведенного выше анализа следует, что данный резонатор может быть использован для обеспечения селекции мод по азимутальному и продольному индексу.

Авторы выражают благодарность Н.Ф. Ковалеву и М.И. Петелину за стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ и ИНТАС.

Приложение

Получим здесь аналитические соотношения для комплексных частот симметричных мод, расположенных вблизи брэгговской частоты, т.е. принадлежащих ветви \mathcal{Z} на дисперсионной диаграмме, представленной на

рис. 2, а. Система уравнений (11) для азимутально-симметричного случая может быть приведена к виду

$$\frac{dA_+}{dz} + i\delta A_+ + 2i\alpha B = 0, \quad (\text{П1})$$

$$\frac{dA_-}{dz} - i\delta A_- - 2i\alpha B = 0, \quad (\text{П2})$$

$$\frac{1}{2\hbar} \frac{d^2 B}{dz^2} + \delta B + \alpha(A_+ + A_-) = 0 \quad (\text{П3})$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{dB}{dz} - i\sqrt{2\hbar\delta} B \right|_{z=0} = 0,$$

$$\left. \frac{dB}{dz} + i\sqrt{2\hbar\delta} B \right|_{z=l_z} = 0. \quad (\text{П4})$$

Представив парциальные волны в виде $A_{\pm} = a_{\pm} e^{i\lambda z}$; $B = b e^{i\lambda z}$, получим дисперсионное соотношение (14), которое является алгебраическим уравнением четвертого порядка относительно λ и, следовательно, имеет четыре корня λ_k , $k = 1-4$.

В результате вычисления собственных векторов матрицы T коэффициентов системы уравнений (П1)–(П3), удовлетворяющих соотношению

$$T \begin{pmatrix} a_k^+ \\ a_k^- \\ b_k \\ b_k' \end{pmatrix} = i\lambda_k \begin{pmatrix} a_k^+ \\ a_k^- \\ b_k \\ b_k' \end{pmatrix}$$

(здесь b_k' соответствует производной от B), представления решения в виде

$$A_{\pm}(z) = \sum_{k=1}^4 c_k a_k^{\pm} e^{i\lambda_k z}, \quad B(z) = \sum_{k=1}^4 c_k b_k e^{i\lambda_k z} \quad (\text{П5})$$

и подстановки (П5) в граничные условия (П4) получим характеристическое уравнение, которое определяет комплексные собственные частоты мод δ ,

$$\Delta = 0. \quad (\text{П6})$$

Здесь Δ — определитель матрицы коэффициентов при произвольных постоянных c_k . В рассматриваемом случае $|\delta| \ll 1$ дисперсионное уравнение (14) приобретает приближенный вид

$$\lambda^4 = 8\hbar\alpha^2\delta.$$

Корни этого уравнения λ_k равны четырем значениям $\sqrt[4]{8\hbar\alpha^2\delta}$. Обозначим $\tilde{\lambda}$ ту ветвь корня, которая соответствует действительному положительному числу при действительном положительном δ . Разрез на комплексной плоскости δ проводится вдоль мнимой полуоси $\text{Im} \delta \geq 0$ (в той же мере это относится и к выражению $\sqrt{2\hbar\delta}$, которое содержится в граничных условиях (4)). Таким образом, можно записать

$\lambda_{1,2} \approx \pm \tilde{\lambda}$, $\lambda_{3,4} \approx \pm i \tilde{\lambda}$. Тогда после отбрасывания членов более высокого порядка малости по $\sqrt[4]{\delta}$ получаем

$$\Delta \approx \begin{vmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ e^{i\tilde{\lambda}l_z} & -e^{i\tilde{\lambda}l_z} & ie^{-\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{\tilde{\lambda}l_z} \\ i & -i & 1 & -1 \\ ie^{i\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{-i\tilde{\lambda}l_z} & e^{-\tilde{\lambda}l_z} & -e^{\tilde{\lambda}l_z} \end{vmatrix} + \varepsilon \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ e^{i\tilde{\lambda}l_z} & -e^{i\tilde{\lambda}l_z} & ie^{-\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{\tilde{\lambda}l_z} \\ -i & -i & i & i \\ ie^{i\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{-i\tilde{\lambda}l_z} & e^{-\tilde{\lambda}l_z} & -e^{\tilde{\lambda}l_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ e^{i\tilde{\lambda}l_z} & -e^{i\tilde{\lambda}l_z} & ie^{-\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{\tilde{\lambda}l_z} \\ i & -i & 1 & -1 \\ ie^{i\tilde{\lambda}l_z} & ie^{-i\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{-\tilde{\lambda}l_z} & -ie^{\tilde{\lambda}l_z} \end{vmatrix} \right\}, \quad (\text{П7})$$

где

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{\delta \hbar}{2\alpha^2}}.$$

С учетом (П7) характеристическое уравнение (П6) преобразуем к виду

$$(e^{\tilde{\lambda}l_z} - e^{-\tilde{\lambda}l_z})(e^{-i\tilde{\lambda}l_z} - e^{i\tilde{\lambda}l_z}) = \varepsilon \left\{ (e^{\tilde{\lambda}l_z} - e^{-\tilde{\lambda}l_z}) \times (e^{-i\tilde{\lambda}l_z} + e^{i\tilde{\lambda}l_z}) - i(e^{\tilde{\lambda}l_z} + e^{-\tilde{\lambda}l_z})(e^{-i\tilde{\lambda}l_z} - e^{i\tilde{\lambda}l_z}) \right\}. \quad (\text{П8})$$

Нетрудно видеть, что корни уравнения (П8) при $\alpha l_z \gg 1$ даются приближенными выражениями

$$\tilde{\lambda}l_z \approx \pi n + i\varepsilon,$$

из которых следует соотношение (20).

Список литературы

- [1] Arzhannikov A.V., Ginzburg N.S., Nikolaev V.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S., Sinitsky S.L., Zotkin R.P., Yushkov M.V. // Abstracts of the 14th Intern. FEL Conf. Kobe (Japan), 1992. P. 214.
- [2] Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 9. С. 23–27.
- [3] Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S. // Optics Com. 1994. Vol. 112. P. 151–156.
- [4] Arzhannikov A.V., Agarin N.V., Bobylev V.B., Ginzburg N.S., Ivanenko V.G., Kalinin P.V., Kuznetsov S.A., Peskov N.Yu., Sergeev A.S., Sinitsky S.L., Stepanov V.D. // Nuclear Instr. and Meth. in Phys. Research. A. 2000. Vol. A445. P. 222–229.
- [5] Cross A.W., Konoplev I.V., Ronald K., Phelps A.D.R., He W., Whyte C.G., Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Sergeev A.S. // Appl. Phys. Lett. 2002. Vol. 80. N 9. P. 1517–1519.
- [6] Гинзбург Н.С., Коноплев И.В., Сергеев А.С. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 5. С. 108–117.
- [7] Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Phelps A.D.R., Robb G.R.M., Sergeev A.S. // IEEE Trans. on Plasma Sci. 1996. Vol. 24. N 3. P. 770–781.
- [8] Гинзбург Н.С., Песков Н.Ю., Сергеев А.С., Аржаников А.В., Синицкий С.Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. XLIV. Вып. 5–6. С. 533–553.
- [9] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 581 с.
- [10] Ковалев Н.Ф., Петелин М.И., Резников М.Г. А.С. СССР. № 720592. БИ. 1980. № 9.
- [11] Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Денисов Г.Г. // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 21. С. 1320–1325.
- [12] Денисов Г.Г., Резников М.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. Вып. 5. С. 562–569.
- [13] Братман В.Л., Моисеев М.А., Петелин М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. Вып. 4. С. 622–634.
- [14] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- [15] Денисов Г.Г. // Канд. дис. Горький: ИПФ АН СССР, 1985. 203 с.