

# Собственные шумы молекулярно-электронных преобразователей

© В.А. Козлов, М.В. Сафонов

Московский физико-технический институт (государственный университет),  
141700 Долгопрудный, Московская область, Россия  
e-mail: sme@sme.ffke.mipt.ru

(Поступило в Редакцию 11 марта 2003 г.)

Изучено влияние гидродинамических флуктуаций на шумы молекулярно-электронных преобразователей. Показано, что наряду с флуктуациями ламинарного течения существенный вклад в собственные шумы молекулярно-электронных систем вносят турбулентные пульсации. Предложен метод качественного и количественного расчета шума турбулентных пульсаций при обтекании поверхности электрода потоком жидкости. Получено количественное соотношение, связывающее среднеквадратичные пульсации давления с напором, а также выражение для полной спектральной плотности гидродинамического шума в молекулярно-электронном преобразователе.

## Введение

Молекулярно-электронные преобразователи (МЭП) параметров движения и волновых полей находят в последние годы широкую область применения в качестве чувствительных элементов широкополосных и низкочастотных сейсмоприемников [1]. Последнее обстоятельство во многом связано с успехами в области разработки малозумящей сопутствующей электроники, приведенный ко входу уровень собственных шумов которой фактически достиг минимального измеряемого в сейсмологии уровня сигнала. Таким образом, задача исследования и снижения собственных шумов молекулярно-электронных преобразователей становится принципиально важной и актуальной проблемой.

Собственные шумы МЭП складываются из флуктуаций концентрации носителей тока и шумов гидродинамической природы, вызванных локальными флуктуациями скорости жидкости. Шумы, связанные с флуктуациями концентрации носителей заряда в МЭП, были исследованы в работе [2], где было показано, что уровень этих флуктуаций, выраженный в величинах спектральной плотности ускорения, лежит существенно ниже уровня  $10^{-9} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ . Принимая во внимание тот факт, что характерное значение шумов молекулярно-электронных сейсмоприемников оказывается по меньшей мере на порядок выше, следует отметить, что основной вклад в шумы МЭП вносят гидродинамические флуктуации [3]. В свою очередь шумы, возникающие из-за флуктуаций скорости электролита при его ламинарном движении в канале преобразователя, были изучены в работе [4]. Как это было показано [4], спектральная плотность данного типа шума, выраженная в ускорениях, не зависит от частоты и имеет вид

$$\overline{\delta a_f^2} = \frac{2k_B T R_h}{\rho^2 l^2}, \quad (1)$$

где  $R_h$  — гидродинамическое сопротивление системы,  $\rho$  — плотность электролита,  $l$  — длина канала пре-

образователя,  $T$  — абсолютная температура,  $k_B$  — постоянная Больцмана.

При типичных для имеющихся в настоящее время молекулярно-электронных сейсмометров значениях  $R_h = 5 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^5$  и  $l = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  уровень шума ламинарных флуктуаций составляет  $3 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Очевидно, что на этом фоне шумом флуктуаций концентрации можно пренебречь.

Из формулы (1) следует важный вывод, что с уменьшением гидродинамического сопротивления  $R_h$  и увеличением длины канала преобразователя  $l$  гидродинамические флуктуации должны ослабляться. С целью проверки последней гипотезы были созданы соответствующие опытные преобразователи, эксперименты с которыми показали, что зависимость собственных шумов преобразователя от указанных параметров более сложная, нежели это следует из формулы (1). В частности, при снижении  $R_h$  в 2000 раз и увеличении  $l$  в 3 раза шум преобразователя снижается не на 40, как ожидалось, а всего лишь примерно на 20 dB. Кроме того, в ходе этих экспериментальных исследований было установлено, что шумы преобразователя возрастают с повышением уровня внешнего сигнала. Таким образом, экспериментальные данные дают основания считать, что в собственные шумы преобразователя, помимо исследованного в работе [4], существенный вклад дает гидродинамический шум иного типа. Таким шумом может быть шум вихревых пульсаций локальных скоростей и давления, которые могут возникать вследствие флуктуаций при обтекании электролитом сетчатых электродов преобразователя даже при не очень больших числах Рейнольдса. Теоретическому исследованию шумов этого типа и посвящена данная работа.

## Математическая постановка задачи

При исследовании вихревых пульсаций в молекулярно-электронном преобразователе прежде всего найдем зависимость между локальной скоростью и дав-

лением в пограничном слое вблизи поверхности электрода. Поскольку решение данной задачи для реальной системы встречает существенные трудности, выберем следующую простую модель пограничного слоя.

Поток идеальной жидкости набегаает на бесконечную непроницаемую плоскость. На некотором расстоянии  $z_0$  от плоскости скорость жидкости имеет только нормальную к ней составляющую, распределение которой в полярных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} v_z(z_0, r) &= -U \quad \text{при } 0 < r < R, \\ v_z(z_0, r) &= 0 \quad \text{при } r \geq R, \end{aligned} \quad (2)$$

ось  $z$  перпендикулярна плоскости и направлена от нее. Распределение скорости жидкости и давления в области  $\{r < R, z < z_0\}$  обладает некоторыми важными свойствами, характерными для пограничного слоя, в частности наличием существенной производной  $\partial v_r / \partial z$ . Величина  $R$  в нашей модели будет отражать характерный размер реального электрода, плоскость  $z = 0$  при  $r < R$  — поверхность электрода, а  $z_0$  — толщина пограничного слоя  $\delta$  на его поверхности. Данная модель позволяет легко рассчитать потенциал  $\varphi(z, r)$  и распределение скоростей. Уравнение для потенциала в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Посредством преобразования Ганкеля переходя от пространственной переменной  $r$  к переменной  $s$ , с учетом граничных условий (2) получаем следующее выражение для потенциала:

$$\varphi(z, r) = -UR \frac{J_1(Rs) \text{ch}(zs)}{s^2 \text{sh}(z_0s)}, \quad (4)$$

где  $J_1(Rs)$  — функция Бесселя первого порядка.

Отсюда, используя соотношения  $v_z = \partial \varphi / \partial z$  и  $v_r = \partial \varphi / \partial r$ , находим компоненты скорости движения жидкости. Для давления в интересующей нас области пограничного слоя ( $r < R, z < z_0$ )

$$\begin{aligned} \frac{p(z, r)}{\rho} &= -UR \int_0^\infty \frac{(1 - \text{ch}(zs) J_0(rs) J_1(Rs))}{\text{sh}(z_0s)s} ds \\ &\quad - \frac{U^2 R^2}{2} \left\{ \left[ \int_0^\infty \frac{\text{sh}(zs)}{\text{sh}(z_0s)} J_1(Rs) J_0(rs) ds \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_0^\infty \frac{\text{ch}(zs)}{\text{ch}(z_0s)} J_1(Rs) J_1(rs) ds \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку точное вычисление интегралов, входящих в (5), не представляется возможным, в дальнейшем ограничимся только приближенными оценками. Наиболее быстро осциллирующая функция в подынтегральных

выражениях в (5) —  $J_1(Rs)$ , поэтому основной вклад в интегралы дают  $s \leq 1/R$ . Тогда, считая  $z < z_0 \leq R$ , гиперболические функции в (5) можно разложить в ряд Тейлора до членов наименьшего порядка малости по  $z/R$  и  $z_0/R$ . После вычисления получившихся интегралов имеем

$$\frac{p(z, r)}{\rho} = -\frac{\dot{U}}{2z_0} \left( \frac{r^2}{2} - z^2 \right) - \frac{U^2}{2z_0^2} \left( \frac{r^2}{2} + z^2 \right). \quad (6)$$

Давление на поверхности электрода, усредненное по его площади

$$p = -\frac{\rho R^2}{8z_0^2} \left( \dot{U} z_0 + \frac{U^2}{2} \right), \quad (7)$$

где  $z_0 \equiv \delta$ .

Варьируя (7), легко получить связь спектральной плотности пульсаций среднего по площади электрода давления  $\overline{\delta p_\omega^2}$  со спектральной плотностью пульсаций скорости  $\delta U_\omega^2$

$$\overline{\delta p_\omega^2} = \frac{\rho^2 R^4}{64 \delta^4} (\omega^2 \delta^2 + U^2) \overline{\delta U_\omega^2}. \quad (8)$$

Наличие двух слагаемых в (8) отражает тот факт, что пульсации давления зависят как от ускорения потока, так и вариаций напора. Отношение вклада ускорения потока и вклада напора, как видно из (8), равно

$$\frac{\delta^2 \omega^2}{U^2} = \frac{\delta^2}{\lambda^2}, \quad (9)$$

где  $\lambda = U/\omega$  имеет смысл характерного размера вихря, возникающего при пульсации скорости жидкости, а  $\omega$  — частоты пульсаций.

## Спектр пульсаций давления

Как это видно из (8), спектр пульсаций давления определяется спектром пульсаций скорости. Допустим, что пульсации скорости в нашей системе имеют колмогоровский спектр [5]. Запишем коррелятор скорости, как это было сделано, например в [6], в виде

$$\overline{\delta U_f^2} = \frac{4\sqrt{2}}{27(2\pi)^{\frac{8}{3}} \kappa^{\frac{2}{3}}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} U^{\frac{2}{3}} f^{-\frac{5}{3}}, \quad (10)$$

где  $f$  — частота пульсаций;  $\varepsilon$  — величина, характеризующая скорость передачи энергии по различным масштабам турбулентности, равная средней скорости диссипации кинетической энергии жидкости на единицу массы;  $\kappa$  — некоторая безразмерная константа порядка единицы.

Аналогично тому, как это было сделано в работе [7], будем считать, что спектр флуктуаций скорости имеет вид (10) вплоть до граничной частоты

$$f_0 \sim \frac{U}{\delta}, \quad (11)$$

а при частотах ниже  $f_0$  спектр выходит на константу. Для характерных значений скорости жидкости в канале

преобразователя и толщины пограничного слоя величина  $f_0$  имеет значение около 100 Hz. Поскольку основной интерес для сейсмологии представляет диапазон частот до 100 Hz, спектр пульсаций скорости будем считать не зависимым от частоты

$$\overline{\delta U_f^2} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{27(2\pi)^{\frac{8}{3}}\kappa^{\frac{2}{3}}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} U^{\frac{2}{3}} f_0^{-\frac{5}{3}}. \quad (12)$$

Для частот  $f < f_0$  размеры вихря  $\lambda = U/2\pi f$  больше толщины пограничного слоя  $\delta$ , и членом, содержащим  $\omega^2$ , в (8) можно пренебречь. При типичных значениях параметров МЭП полученные численно значения  $\delta/R$  составляют величину<sup>1</sup> 0.25–0.4, где  $R$  — радиус проволоки электродной сетки. Малость отношения  $\delta/R$  оправдывает использование плоской модели пограничного слоя к реальной электродной системе.

Скорость диссипации энергии  $\varepsilon$  можем оценить исходя из известной аналогии между движением жидкости в цилиндрическом канале и протеканием электрического тока в проводнике, при этом роль омического сопротивления в нашем случае играет гидродинамическое сопротивление  $R_h$

$$\varepsilon = \frac{U_0^2 S_0^2 R_h}{m} = \frac{U_0^2 S_0 R_h}{\rho l}, \quad (13)$$

где  $U_0$  — средняя скорость электролита в канале преобразователя,  $S_0$  — площадь поперечного сечения канала,  $l$  — длина канала преобразователя.

При этом

$$U_0 = \frac{\rho l a}{S_0 R_h}, \quad (14)$$

где  $a$  — действующее ускорение поверхности земли в точке наблюдения.

Скорость  $U_0$  связана с характерной скоростью жидкости у поверхности сетчатого электрода  $U$  соотношением

$$\frac{U}{U_0} \approx \frac{S_0}{S}, \quad (15)$$

где  $S$  — суммарная площадь отверстий в сетчатом электроде.

Таким образом, для спектральной плотности среднеквадратичных пульсаций давления при частотах ниже граничной частоты  $f_0$  имеем следующее выражение:

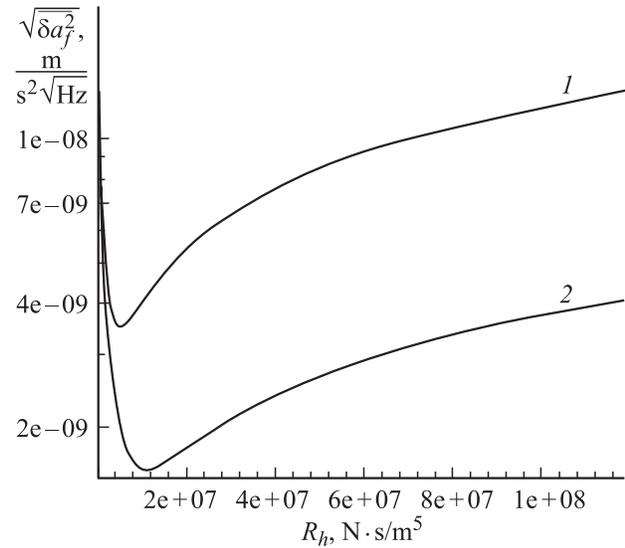
$$\overline{\delta p_f^2} \approx \frac{\sqrt[3]{2}}{108(2\pi)^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{R}{\delta}\right)^4 \left(\frac{S^2 R_h}{\rho S_0 l \kappa}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\delta}{U}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\rho U^2}{2}\right)^2. \quad (16)$$

Подобно тому, как это принято в гидроакустике [7], результат (16) перепишем в стандартной форме

$$\sqrt{\overline{\delta p^2}} = \alpha \frac{\rho U^2}{2}, \quad (17)$$

где  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от свойств потока и обтекаемого тела.

<sup>1</sup> И.С. Захаров. Частное сообщение.



Зависимость спектральной плотности флуктуаций ускорения электролита в канале молекулярно-электронного преобразователя от гидродинамического сопротивления.  $l = 0.05$  (1),  $0.16$  м (2).

В свою очередь экспериментальные значения коэффициента  $\alpha$ , полученные из гидроакустических измерений, лежат в диапазоне  $1.9 \cdot 10^{-3} - 5.7 \cdot 10^{-3}$  [7,8]. Проинтегрировав спектральную плотность пульсаций давления по всему частотному диапазону, для среднего квадрата получаем в нашем случае

$$\sqrt{\overline{\delta p^2}} = 0.014 \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left(\frac{S^2 R_h}{\rho S_0 l \kappa}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\delta}{U}\right)^{\frac{5}{6}} \frac{\rho U^2}{2}, \quad (18)$$

откуда

$$\alpha = 0.014 \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left(\frac{S^2 R_h}{\rho S_0 l \kappa}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\delta}{U}\right)^{\frac{5}{6}}. \quad (19)$$

Подставляя в (19) характерные для рассматриваемой системы значения параметров, имеем величину  $\alpha = 5.5 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует приведенными выше экспериментальными данными.

Далее, зная спектральную плотность турбулентных пульсаций давления, находим спектральную плотность турбулентных шумов в ускорениях

$$\overline{\delta a_f^2} = \overline{\delta p_f^2} / \rho^2 l^2. \quad (20)$$

С учетом шума ламинарных флуктуаций (1) получаем окончательную формулу для спектральной плотности суммарного гидродинамического шума МЭП в ускорениях при частотах меньше  $f_0 = 100$  Hz

$$\overline{\delta a_f^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{432(2\pi)^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{R}{\delta}\right)^4 \left(\frac{S a}{S_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\delta \rho a}{S}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{1}{l^{\frac{1}{3}} R^{\frac{5}{3}}} + \frac{2k_B T R_h}{\rho^2 l^2}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что спектральная плотность шумов по ускорению монотонно уменьшается при увеличении длины канала преобразователя  $l$ , но медленнее, чем это следовало бы, из (1), что соответствует экспериментальным данным. При фиксированной длине  $l$  спектральная плотность как функция  $R_h$  имеет минимум. Гидродинамическое сопротивление  $R_{h0}$ , при котором достигается минимальный уровень шума, пропорционально  $l$  в степени  $5/8$

$$R_{h0} \sim l^{5/8}. \quad (22)$$

График зависимости  $\sqrt{\delta a_f^2}$  от  $R_h$  при длинах канала  $l = 0.05$  и  $0.16$  м приведен на рисунке. Оптимальные значения гидродинамического сопротивления при указанных длинах канала имеют величины  $5 \cdot 10^6$  и  $1 \cdot 10^7$   $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^5$  соответственно.

## Заключение

Выполненные в данной работе исследования собственных шумов молекулярно-электронного преобразователя позволяют сделать вывод о том, что турбулентные флуктуации вносят существенный вклад в общий гидродинамический шум, начиная с уровня  $1.5-3 \cdot 10^{-8}$   $\text{m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$ , причем спектральная плотность полного шума остается не зависящей от частоты вплоть до частот порядка 100 Гц. Важно отметить, что величина данного шума растет с уровнем сигнала. Последнее обстоятельство весьма важно при использовании молекулярно-электронных сейсмоприемников в обсерваториях с малым уровнем естественного сейсмического фона. В свою очередь полученная количественная оценка для коэффициента  $\alpha$ , связывающего среднеквадратичные пульсации давления с напором, находится в хорошем согласии с экспериментальными данными по гидроакустическим измерениям, что позволяет надеяться на возможность выделения данного вида шума из суммарного шума системы. Принципиально важным результатом является найденное выражение для спектральной плотности собственных шумов МЭП как функции физических и геометрических параметров преобразователя. Полученное выражение позволяет провести оптимизацию параметров преобразующего элемента с точки зрения минимизации его шумовых характеристик. Поскольку величина шума при фиксированной длине преобразующего элемента имеет резкий минимум как функция его гидродинамического сопротивления, точность определения последнего приобретает исключительно важное значение.

## Список литературы

- [1] *Абрамович И.А., Агафонов В.М., Дараган С.К.* и др. Сейсмические приборы. М., 1999. Вып. 31. С. 56–71.
- [2] *Антохин А.Ю., Козлов В.А.* // Электрохимия. 1989. Т. 25. С. 1631–1635.

- [3] *Харламов А.В.* Автореферат канд. дис. М.: 2001.
- [4] *Козлов В.А., Сахаров К.А.* // Физические основы жидкостных и твердотельных измерительных систем и устройств обработки информации. М.: МФТИ, 1994. С. 37–42.
- [5] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика: теория турбулентности. СПб., 1992. 693 с.
- [6] *Блохинцев В.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М., 1981. 208 с.
- [7] *Huddle G.P., Skudrzyk E.J.* // JASA. 1969. Vol. 46. P. 130–141.
- [8] *Петровский В.С.* Гидродинамические проблемы турбулентного шума. М., 1966. 252 с.