Журнал технической физики, 2004, том 74, вып. 1

01;03

О некоторых особенностях нелинейного резонансного четырехмодового взаимодействия капиллярных осцилляций заряженной капли

© С.О. Ширяева, А.Н. Жаров, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 5 июня 2003 г.)

Исследованы закономерности перекачки энергии из высоких мод капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости в наинизшую основную при четырехмодовом резонансе, проявляющемся при решении задачи о нелинейных осесимметричных капиллярных колебаниях капли в третьем порядке малости по амплитуде многомодовой начальной деформации ее равновесной формы. Показано, что хотя указанное резонансное взаимодействие приводит к раскачке основной моды уже в первом порядке малости, из-за небольшой величины численных коэффициентов амплитуда основной моды получается сравнимой с квадратичной по малому параметру поправкой к ней, появляющейся за счет нерезонансного нелинейного взаимодействия.

Задача об исследовании нелинейных осцилляций заряженной капли неоднократно решалась в постановках различной сложности и строгости (см., например, [1–8] и указанную там литературу) в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями. Тем не менее некоторые вопросы, представляющие значительный интерес, остались за рамками проведенных исследований. Это, в частности, относится к возможности резонансной раскачки амплитуды основной моды за счет перекачки в нее энергии из высоких мод. Данная проблема имеет принципиальное значение для теории грозового электричества в связи с обсуждающимся механизмом инициирования разряда молнии коронным разрядом в окрестности заряженной крупной капли или обводненной градины в грозовом облаке [9,10]. Несмотря на очевидную привлекательность такого механизма, пока нет доказательств возможности его реализации: согласно данным натурных измерений [11], собственные заряды крупных капель и градин в облаках слишком малы для того, чтобы в их окрестности мог зажечься коронный разряд или реализоваться неустойчивость заряженной поверхности капли. В то же время очевидно, что при вытягивании капли в фигуру, близкую к сфероиду, напряженность поля у ее вершин существенно увеличивается. Одной из возможностей вытягивания капли в сфероид является возбуждение основной моды ее осцилляций при резонансной перекачке энергии из высоких мод осцилляций в основную [12–14]. Однако проведенные расчеты [12–13] показывают, что при трехмодовом нелинейном резонансном взаимодействии осцилляций капли наинизшей модой, в которую возможна перекачка энергии из высоких мод, является третья. Только в расчетах третьего порядка малости по амплитуде начальной деформации капли, когда проявляются четырехмодовые резонансы, основная (вторая) мода включается в резонансное взаимодействие с высокими модами [8,15]. Заметим, что трехмодовые резонансы, проявляющиеся в расчетах второго порядка малости, приводят при реализации к эффекту первого порядка малости: амплитуда моды, раскачивающейся за счет перекачки энергии из высоких мод, имеет первый порядок малости [13] и может превышать амплитуды изначально возбужденных высоких мод. В этой связи возникает и чисто академический вопрос теории нелинейного взаимодействия: каким порядком малости будет характеризоваться мода, раскачивающаяся за счет резонансной перекачки энергии при четырехмодовом взаимодействии, проявляющемся лишь в третьем порядке малости? С целью отыскания ответов на поставленные вопросы и решалась приведенная ниже задача.

1. Рассмотрим каплю радиуса R, обладающую зарядом Q, идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в условиях отсутствия внешней среды и гравитации. Пусть в начальный момент времени равновесная сферическая форма поверхности капли претерпела возмущение малой амплитуды. Зададимся целью проследить временну́ю эволюцию формы поверхности капли и проанализировать закономерности ее колебаний под действием капиллярных и электрических сил. Учитывая, что движение жидкости в капле вызвано малыми колебаниями ее поверхности, можно провести рассмотрение в рамках модели потенциального движения, когда поле скоростей характеризуется потенциалом ψ. Потенциал электрического поля в окрестности капли обозначим ϕ. Форму капли будем считать осесимметричной как в начальной, так и во все последующие моменты времени. Уравнение поверхности капли в сферической системе координат, связанной с ее центром масс, в безразмерных переменных, в которых

$\rho = 1$, $R = 1$, $\gamma = 1$, запишем в виде

$$F(r, \vartheta, t) \equiv r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0. \qquad (1)$$

где r, ϑ — сферические координаты; $\xi(\vartheta, t)$ — функция, описывающая отклонение формы капли от сферической ($|\xi(\vartheta, t)| \ll 1$).

Математическая формулировка задачи содержит уравнения Лапласа для потенциалов скорости жидкости и электрического поля

$$\Delta\psi = 0; \quad \Delta\phi = 0; \qquad (2)$$

условия ограниченности

$$r \to 0: \quad \nabla\psi \to 0; \qquad (3)$$

$$r \to +\infty: \quad \nabla\phi \to 0; \qquad (4)$$

кинематическое и динамическое граничные условия

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad -\frac{\partial\xi}{\partial t} + \nabla\psi \cdot \nabla F = 0; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 = p + p_q - p_{am} - p_\sigma; \qquad (6)$$

условие неизменности объема капли

$$\int\limits_V r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3};$$

$$V = \{r, \vartheta, \varphi | 0 \le r \le 1 + \xi;\ 0 \le \varphi \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}; \quad (7)$$

условие неподвижности центра масс

$$\int\limits_V \mathbf{r} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = 0; \qquad (8)$$

условие постоянства полного заряда

$$\int\limits_S \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{dS} = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = 1 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}; \qquad (9)$$

условие постоянства электрического потенциала вдоль поверхности

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \qquad \phi = \phi_S(t); \qquad (10)$$

начальные условия

$$t = 0: \qquad \xi = \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \xi_1 P_1(\cos\vartheta)$$
$$+ \varepsilon \sum_{k\in\Omega} h_k P_k(\cos\vartheta); \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = 0. \qquad (11)$$

В выражениях (2)–(11) p_{at}, p, p_q, p_σ — атмосферное давление, гидродинамическое давление в равновесном состоянии, давления электрического поля и капиллярное соответственно; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности капли; ϕ_S — электрический потенциал капли; ε — амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи; Ω — спектр мод, определяющих начальную деформацию; h_k — парциальный вклад k-й моды в начальную деформацию $\left(\sum\limits_{k\in\Omega} h_k \sim O(1)\right)$; $P_k(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра порядка k; ξ_0, ξ_1 — величины, определенные так, чтобы интегральные условия (7) и (8) выполнялись в начальный момент времени.

Для удобства записи дальнейших выражений расширим множество констант h_k, дополнив его так, что $h_k \equiv 0$ при любых $k \notin \Omega$.

2. Будем решать краевую задачу (2)–(11) методом многих масштабов с точностью до третьего порядка малости по амплитуде начального возмущения ε, представляя все искомые величины в виде разложений по степеням ε и полагая, что они зависят не просто от времени t, но от разных его масштабов $T_j = \varepsilon^j t$ ($j = 0, 1, 2$). Производная по времени t в этом случае выражается через производные по временны́м масштабам $T j$ следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}.$$

Подставляя разложения

$$\xi = \varepsilon\xi^{(1)} + \varepsilon^2\xi^{(2)} + \varepsilon^3\xi^{(3)} + O(\varepsilon^4); \qquad (12)$$

$$\psi = \varepsilon\psi^{(1)} + \varepsilon^2\psi^{(2)} + \varepsilon^3\psi^{(3)} + O(\varepsilon^4); \qquad (13)$$

$$\phi = \phi^{(0)} + \varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + \varepsilon^3\phi^{(3)} + O(\varepsilon^4); \qquad (14)$$

$$\phi_S = \phi_S^{(0)} + \varepsilon\phi_S^{(1)} + \varepsilon^2\phi_S^{(2)} + \varepsilon^3\phi_S^{(3)} + O(\varepsilon^4) \qquad (15)$$

в краевую задачу (2)–(11) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε, получим задачи различных порядков малости, которые для краткости изложения вынесены в Приложение А. В разложениях (14), (15) $\phi^{(0)} = Q/r$; $\phi_S^{(0)} = Q$ — решения нулевого порядка малости, т. е. для равновесной сферической поверхности капли.

Очевидно, что в силу линейности уравнений Лапласа функции $\psi^{(k)}$ и $\phi^{(k)}$ являются решениями уравнений, аналогичных (2). Учитывая условия ограниченности (3), (4), можно записать

$$\psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot D_n^{(k)}(t) \cdot P_n(\cos\vartheta) \quad (k = 1, 2, 3); \qquad (16)$$

$$\phi^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^{(k)}(t)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (17)$$

Функцию, описывающую отклонение формы поверхности капли от сферической, представим в виде аналогичного разложения по полиномам Лежандра

$$\xi^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(k)}(t) \cdot P_n(\cos\vartheta) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Отметим, что в рамках рассмотрения задачи с точностью до третьего порядка малости мы можем определить зависимость временны́х коэффициентов 1-го порядка в (16)–(18) от трех масштабов времени: $M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)$, $D_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)$; зависимость коэффициентов 2-го порядка — от двух масштабов $M_n^{(2)}(T_0, T_1)$, $F_n^{(2)}(T_0, T_1)$, $D_n^{(2)}(T_0, T_1)$; а зависимость коэффициентов 3-го порядка — только от T_0: $M_n^{(3)}(T_0)$, $F_n^{(3)}(T_0)$, $D_n^{(3)}(T_0)$.

Последовательно используя решения (16)–(18) для разных значений $k = 1, 2, 3$, из систем граничных условий 1-, 2- и 3-го порядков малости получим дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты $M_n^{(k)}(t)$, характеризующие временну́ю эволюцию формы поверхности капли.

3. При решении задачи первого порядка (см. Приложение A) для коэффициентов $M_n^{(1)}(t)$ получим гармоническое уравнение по времени T_0

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 \cdot M_n^{(1)}(t) = 0, \tag{19}$$

где $\omega_n^2 = n(n-1)(n+2-W)$ — собственная частота n-й моды колебаний поверхности капли; $W = Q^2/(4\pi)$ — параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

Общее решение этого уравнения содержит произвольные функции: одну комплексную либо две действительные, зависящие от временны́х масштабов T_1, T_2,

$$M_n^{(1)}(t) = A_n^{(1)}(T_1, T_2)\exp[i\omega_n T_0] + (\text{к.с.})$$
$$= 2a_n^{(1)}(T_1, T_2)\cos\big(\omega_n T_0 + b_n^{(1)}(T_1, T_2)\big). \tag{20}$$

Здесь и далее (к.с.) означает слагаемые, комплексно-сопряженные с выписанными; $A_n^{(1)}(T_1, T_2) = a_n^{(1)}(T_1, T_2) \times \times \exp\big[ib_n^{(1)}(T_1, T_2)\big]$ — комплексные амплитуды; $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $b_n^{(1)}(T_1, T_2)$ — действительные функции, характеризующие амплитуду и фазу колебаний. Вид функций $A_n^{(1)}(T_1, T_2)$, $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$, $b_n^{(1)}(T_1, T_2)$ определяется при анализе задач следующих порядков малости.

4. При рассмотрении задачи второго порядка малости (см. Приложение A) для эволюционных коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ получим неоднородное дифферициальное уравнение

$$\frac{\partial^2 M_n^{(2)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 \cdot M_n^{(2)}(t) = -2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}(T_1, T_2)}{\partial T_1} + \exp[i\omega_n T_0]$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\big\{[\gamma_{kmn} + \omega_k\omega_m\eta_{kmn}]A_k^{(1)}(T_1, T_2)A_m^{(1)}(T_1, T_2)$$
$$\times \exp[i(\omega_k + \omega_m)T_0] + [\gamma_{kmn} - \omega_k\omega_m\eta_{kmn}]A_k^{(1)}(T_1, T_2)$$
$$\times A_m^{(1)}(T_1, T_2)\exp[i(\omega_k - \omega_m)T_0] + (\text{к.с.})\big\}. \tag{21}$$

Константы γ_{kmn}, η_{kmn} определены в Приложении B.

Для того чтобы решение уравнения (21) не содержало секулярных слагаемых, необходимо из его правой части исключить слагаемые, зависимость которых от времени T_0 определяется выражением $\exp[i\omega_n T_0]$. Это требование позволяет выяснить зависимость функций $A_n^{(1)}(T_1, T_2)$ (или $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $b_n^{(1)}(T_1, T_2)$) от временно́го масштаба T_1. В простейшем случае такое условие имеет вид

$$\frac{\partial A_n^{(1)}(T_1, T_2)}{\partial T_1} = 0 \tag{22}$$

и означает, что $A_n^{(1)}$, $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ не зависят от T_1.

Внимательный анализ функции неоднородности уравнения (21) показывает, что если для каких-либо трех мод капиллярных осцилляций с номерами n, p и q выполняется одно из соотношений $\omega_n = \omega_p \pm \omega_q$, то условия исключения секулярных слагаемых из решений аналогичных уравнений (записанных для мод n, p и q) будет иметь вид системы трех связанных дифференциальных уравнений, определяющих зависимость от временно́го масштаба T_1 взаимосвязанных функций $A_n^{(1)}(T_1, T_2)$, $A_p^{(1)}(T_1, T_2)$ и $A_q^{(1)}(T_1, T_2)$. В таком случае принято говорить о внутреннем трехмодовом резонансном взаимодействии капиллярных осцилляций капли, рассмотрению которого посвящены работы [12,13].

Общее решение уравнения (21) также содержит произвольные функции: одну комплексную $A_n^{(2)}$ либо две действительные ($a_n^{(2)}$ и $b_n^{(2)}$), но зависящие только от временно́го масштаба T_1. В случае отсутствия трехмодовых резонансных взаимодействий решение уравнения (21) для колебательных мод $(n > 2)$ имеет вид

$$M_n^{(2)}(t) = A_n^{(2)}(T_1)\exp[i\omega_n T_0]$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\big\{\lambda_{kmn}^{(+)}A_k^{(1)}A_m^{(1)}\exp[i(\omega_k + \omega_m)T_0]$$
$$+ \lambda_{kmn}^{(-)}A_k^{(1)}\overline{A_m^{(1)}}\exp[i(\omega_k - \omega_m)T_0] + (\text{к.с.})\big\}. \tag{23}$$

Выражения для констант $\lambda_{kmn}^{(+)}$ и $\lambda_{kmn}^{(-)}$ приведены в Приложении B. Вид функций $A_n^{(2)}(T_1)$, $a_n^{(2)}(T_1)$ и $b_n^{(2)}(T_1)$ (где $A_n^{(2)}(T_1) = a_n^{(2)}(T_1)\exp[i \cdot b_n^{(2)}(T_1)]$) может быть определен лишь в третьем порядке малости.

5. Остановимся более подробно на анализе неоднородного дифференциального уравнения для эволюционных коэффициентов $M_n^{(3)}(t)$, получающегося при рассмотрении системы граничных условий третьего порядка (см. Приложение A)

$$\frac{\partial^2 M_n^{(3)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(3)} t = -\Big\{ 2i\omega_n \Big[\frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial T_2} \Big]$$

$$+ G_n A_n^{(1)} \Big\} \exp[i\omega_n T_0] + \sum_{k,g=2}^{\infty} \big\{ H_{kgn}^{0(+)} \exp[i(\omega_k + \omega_g) T_0]$$

$$\times (A_k^{(1)} \cdot A_g^{(2)}) + H_{kgn}^{0(-)} \exp[i(\omega_k - \omega_g) T_0] (A_k^{(1)} \overline{A_g^{(2)}}) \big\}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \Big\{ \big[2(n-1)\omega_n\omega_k - \Xi_n \big] (A_k^{(1)})^2$$

$$\times \exp\big[i(\omega_n + 2\omega_k) T_0 \big] - (1 - \delta_{n,k}) \big[2(n-1)\omega_n\omega_k + \Xi_n \big]$$

$$\times \big(\overline{A_k^{(1)}}\big)^2 \exp\big[i(\omega_n - 2\omega_k) T_0 \big] \Big\} A_n^{(1)}$$

$$+ D_{k,m}^{l,n} \big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{1(-)} + D_{k,n}^{l,m} H_{k,m,l,n}^{1(-)(+)} \big]$$

$$\times \exp\big[i\Psi_{k,l,m}^{(+)(-)} T_0 \big] \big(A_l^{(1)} \cdot \overline{A_m^{(1)}} \big)$$

$$+ D_{k,m}^{l,n} D_{k,l}^{m,n} \big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{2(+)} + H_{k,m,l,n}^{2(+)(+)} \big]$$

$$\times \exp\big[i\Psi_{k,l,m}^{(-)(-)} T_0 \big] \big(\overline{A_l^{(1)} \cdot A_m^{(1)}} \big)$$

$$+ D_{k,l}^{m,n} \big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{2(-)} + D_{k,n}^{l,m} H_{k,m,l,n}^{2(-)(-)} \big]$$

$$\times \exp\big[i\Psi_{k,l,m}^{(-)(+)} T_0 \big] \big(\overline{A_l^{(1)} \cdot A_m^{(1)}} \big) A_k^{(1)}, \tag{24}$$

где $\Psi_{k,l,m}^{(\pm)(\pm)} \equiv \omega_k \pm \omega_l \pm \omega_m$, а $\delta_{i,j}$ — дельта-символ Кронекера.

Выражения для коэффициентов, использованных в (24), вынесены в Приложение B. Для краткости при записи (24) в правой его части комплексно-сопряженные слагаемые опущены.

Аналогично тому, как это описано выше, условие исключения секулярных членов из решения уравнения (24) позволяет определить вид функций $A_n^{(1)}(T_2)$ и $A_n^{(2)}(T_1)$. В простейшем случае отсутствия каких-либо резонансных взаимодействий между колебательными модами это условие имеет вид

$$2i\omega_n \Big[\frac{\partial A_n^{(2)}(T_1)}{\partial T_1} + \frac{\partial A_n^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} \Big] + G_n \cdot A_n^{(1)}(T_2) = 0,$$

откуда несложно получить, что

$$b_n^{(1)}(T_2) = \frac{G_n}{2\omega_n} T_2, \tag{25}$$

в то время как $a_n^{(1)}$ не зависит от времени T_2, а $a_n^{(2)}$ и $b_n^{(2)}$ — от времени T_1. Выражение (25) определяет поправки 2-го порядка малости к собственным частотам ω_n капиллярных осцилляций капли (см. (20)).

Решение уравнения (24) (из правой части которого исключены слагаемые, приводящие к появлению секулярных членов) после удовлетворения начальным условиям (11) может быть записано в виде

$$M_n^{(3)}(t) = -\sum_{ki \in \Xi}^{\infty} \frac{h_k^2 h_n}{16} \Big\{ \frac{[2(n-1)\omega_n\omega_k - \Xi_n]}{(2k+1)\omega_k(\omega_n + \omega_k)}$$

$$\times \big[\cos\big((\omega_n + 2\omega_k) t \big) - \cos(\omega_n t) \big] + (1 - \delta_{n,k})$$

$$\times \frac{[2(n-1)\omega_n\omega_k + \Xi_n]}{(2k+1)\omega_k(\omega_n - \omega_k)} \big[\cos\big((\omega_n - 2\omega_k) t \big) - \cos(\omega_n t) \big] \Big\}$$

$$+ \sum_{\substack{g=2 \\ k,l,m \in \Xi}}^{\infty} \frac{h_l h_m h_k}{4} \big(\lambda_{l,m,g}^{(+)} + \lambda_{l,m,g}^{(-)} \big) \Big\{ \frac{H_{kgn}^{0(+)}}{[\omega_n^2 - (\omega_k + \omega_g)^2]}$$

$$\times \big[\cos\big((\omega_k + \omega_g) t \big) - \cos(\omega_n t) \big] + \frac{H_{kgn}^{0(-)}}{[\omega_n^2 - (\omega_k - \omega_g)^2]}$$

$$\times \big[\cos\big((\omega_k - \omega_g) t \big) - \cos(\omega_n t) \big] \Big\} + \sum_{k,l,m \in \Xi}^{\infty} \frac{h_l h_m h_k}{4}$$

$$\times \Big\{ \frac{\big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{1(+)} + H_{k,m,l,n}^{1(+)(-)} \big]}{[\omega_n^2 - (\Psi_{k,l,m}^{(+)(+)})^2]}$$

$$\times \big[\cos(\Psi_{k,l,m}^{(+)(+)} t) - \cos(\omega_n t) \big]$$

$$+ \frac{D_{k,m}^{l,n} \big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{1(-)} + D_{k,n}^{l,m} H_{k,m,l,n}^{1(-)(+)} \big]}{[\omega_n^2 - (\Psi_{k,l,m}^{(+)(-)})^2]}$$

$$\times \big[\cos(\Psi_{k,l,m}^{(+)(-)} t) - \cos(\omega_n t) \big]$$

$$+ \frac{D_{k,m}^{l,n} D_{k,l}^{m,n} \big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{2(+)} + H_{k,m,l,n}^{2(+)(+)} \big]}{[\omega_n^2 - (\Psi_{k,l,m}^{(+)(-)})^2]}$$

$$\times \big[\cos(\Psi_{k,l,m}^{(-)(-)} t) - \cos(\omega_n t) \big]$$

$$+ \frac{D_{k,l}^{m,n} \big[\delta_{m,l+1} (\delta_{k,n-1} + \delta_{k,n+1}) \chi_l \beta_{k,m,1,l,n}^{2(-)} + D_{k,n}^{l,m} H_{k,m,l,n}^{2(-)(-)} \big]}{[\omega_n^2 - (\Psi_{k,l,m}^{(-)(+)})^2]}$$

$$\times \big[\cos(\Psi_{k,l,m}^{(-)(+)} t) - \cos(\omega_n t) \big] \Big\}.$$

Из вида функции неоднородности уравнения (24) несложно заметить, что помимо трехмодового резонансного взаимодействия, проявившегося при анализе задачи 2-го порядка малости (см. (21)) появляется дополнительная возможность четырехмодового резонансного взаимодействия, когда для собственных частот мод с различными номерами n, p, q и s выполняется какое-либо из соотношений вида $\omega_p \pm \omega_q - \omega_s = \omega_n$ (см. тройную сумму в функции неоднородности уравнения (24)). Возможна также ситуация, когда одна из мод участвует в резонансном взаимодействии дважды, что соответствует случаю вырожденного резонанса. Кроме того, в рассматриваемом приближении 3-го порядка малости возможно трехмодовое резонансное взаимодействие, при котором происходит обмен энергией между модами 1-го порядка малости, определяющими спектр начальной деформации капли, и модами, возбуждающимися во 2-м порядке малости (см. двойную сумму в функции неоднородности уравнения (24)). Взаимодействия указанных видов в ранее выполненных расчетах третьего порядка малости обнаружены не были [2].

6. Рассмотрим четырехмодовое взаимодействие более подробно. Чтобы отразить близость комбинации частот $\omega_p \pm \omega_q - \omega_s$ к частоте ω_n, введем параметр расстройки $\sigma \sim O(1)$, определяемый соотношением

$$\omega_p \pm \omega_q - \omega_s = \omega_n(1 + \varepsilon^2\sigma). \qquad (26)$$

Выписывая в дополнение к (24) аналогичные уравнения для мод p, q, s и исключая из их правых частей слагаемые, приводящие к появлению секулярных членов в решениях, получим систему связанных дифференциальных уравнений относительно функций $A_j^{(i)}$ (где $i = 1, 2$; $j = n, p, q, s$). Для примера приведем вид такой системы для случая, когда реализуется первая из резонансных ситуаций (26) $\omega_p + \omega_q - \omega_s = \omega_n(1 + \varepsilon^2\sigma)$,

$$-2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(2)}(T_1)}{\partial T_1} = 2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} + G_n(T_2)A_n^{(1)}(T_2) - Y_n^{(+)}A_p^{(1)}(T_2)A_q^{(1)}(T_2)\overline{A_s^{(1)}(T_2)}\exp[i\omega_n\sigma T_2];$$

$$-2i\omega_p \frac{\partial A_p^{(2)}(T_1)}{\partial T_1} = 2i\omega_p \frac{\partial A_p^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} + G_p(T_2)A_p^{(1)}(T_2) - Y_p^{(+)}A_n^{(1)}(T_2)\overline{A_q^{(1)}(T_2)}A_s^{(1)}(T_2)\exp[-i\omega_n\sigma T_2];$$

$$-2i\omega_q \frac{\partial A_q^{(2)}(T_1)}{\partial T_1} = 2i\omega_q \frac{\partial A_q^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} + G_q(T_2)A_q^{(1)}(T_2) - Y_q^{(+)}A_n^{(1)}(T_2)\overline{A_p^{(1)}(T_2)}A_s^{(1)}(T_2)\exp[-i\omega_n\sigma T_2];$$

$$-2i\omega_s \frac{\partial A_s^{(2)}(T_1)}{\partial T_1} = 2i\omega_s \frac{\partial A_s^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} + G_s(T_2)A_s^{(1)}(T_2) - Y_s^{(+)}\overline{A_n^{(1)}(T_2)}A_p^{(1)}(T_2)A_q^{(1)}(T_2)\exp[i\omega_n\sigma T_2]. \qquad (27)$$

Выражения для всех использованных здесь обозначений приведены в Приложении В. При рассмотрении второй резонансной ситуации $\omega_p - \omega_q - \omega_s = \omega_n(1 + \varepsilon^2\sigma)$ система уравнений имеет вид, аналогичный (27).

Систему (27) необходимо дополнить условиями исключения секулярных членов из решений дифференциальных уравнений для амплитуд 2-го порядка малости мод n, p, q и s (см. (21)). Предположим, что моды n, p, q и s ни в каких других резонансах, кроме резонансов вида (26), не участвуют. Это означает, что для функций $A_n^{(1)}$, $A_p^{(1)}$, $A_q^{(1)}$ и $A_s^{(1)}$ при анализе задачи 2-го порядка малости следует записать соотношения, аналогичные (22), согласно которым $A_n^{(1)}$, $A_p^{(1)}$, $A_q^{(1)}$ и $A_s^{(1)}$ не зависят от времени T_1. В результате получим, что в уравнениях (27) слева от знаков равенства стоят функции временнóго масштаба T_1, а справа — функции, зависящие только от T_2. Поскольку в методе многих масштабов T_1 и T_2 рассматриваются как независимые переменные, то следует отдельно левые и правые части уравнений (27) положить равными константе, например нулю.

Для функций $A_j^{(2)}$ (где $j = n, p, q, s$) получим

$$\frac{\partial A_j^{(2)}(T_1)}{\partial T_1} = 0,$$

откуда следует, что $A_j^{(2)}$, $a_j^{(2)}$ и $b_j^{(2)}$ являются постоянными величинами, равными своим начальным значениям, которые несложно получить из (11), используя разложения (12), а также учитывая (18), (20), (23),

$$a_j^{(2)} = -\frac{1}{4}\sum_{k\in\Omega}\sum_{m\in\Omega}\left(\lambda_{kmj}^{(+)} + \lambda_{kmj}^{(-)}\right)h_k h_m; \quad b_j^{(2)} = 0.$$

В результате выражение для амплитуд 2-го порядка малости (23) примет вид

$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\Big\{\lambda_{kmn}^{(+)}\big[\cos\big((\omega_k + \omega_m)t\big) - \cos(\omega_n t)\big] + \lambda_{kmn}^{(-)}\big[\cos\big((\omega_k - \omega_m)t\big) - \cos(\omega_n t)\big]\Big\}\frac{h_k h_m}{2}. \qquad (28)$$

Для функций $A_j^{(1)}$ (где $j = n, p, q, s$) получим комплексные уравнения, приравнивая нулю действительные и мнимые части, и запишем следующую систему для определения функций $a_j^{(1)}$ и $b_j^{(1)}$ ($j = n, p, q, s$)

$$a_n^{(1)}(T_2)\left(2\omega_n\left(\frac{\partial\beta_n^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} - \omega_n\sigma\right) + G_n(T_2)\right) - Y_n^{(\pm)}a_p^{(1)}(T_2)a_q^{(1)}(T_2)a_s^{(1)}(T_2)\cos\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$2\omega_n\frac{\partial a_n^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} - Y_n^{(\pm)}a_p^{(1)}(T_2)a_q^{(1)}(T_2)a_s^{(1)}(T_2) \times \sin\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$a_p^{(1)}(T_2)\left(2\omega_p\frac{\partial b_p^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} - G_p(T_2)\right) + Y_p^{(\pm)}a_n^{(1)}(T_2) \times a_q^{(1)}(T_2)a_s^{(1)}(T_2)\cos\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$2\omega_p\frac{\partial a_p^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} + Y_p^{(\pm)}a_n^{(1)}(T_2)a_q^{(1)}(T_2)a_s^{(1)}(T_2) \times \sin\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$a_q^{(1)}(T_2)\left(2\omega_q \frac{\partial b_q^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} - G_q(T_2)\right) + Y_q^{(\pm)} a_n^{(1)}(T_2)$$

$$\times a_s^{(1)}(T_2) a_p^{(1)}(T_2) \cos\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$2\omega_q \frac{\partial a_q^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} \pm Y_q^{(\pm)} a_n^{(1)}(T_2) a_s^{(1)}(T_2) a_p^{(1)}(T_2)$$

$$\times \sin\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$a_s^{(1)}(T_2)\left(2\omega_s \frac{\partial b_s^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} - G_s(T_2)\right) + Y_s^{(\pm)} a_n^{(1)}(T_2)$$

$$\times a_q^{(1)}(T_2) a_p^{(1)}(T_2) \cos\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$2\omega_s \frac{\partial a_s^{(1)}(T_2)}{\partial T_2} - Y_s^{(\pm)} a_n^{(1)}(T_2) a_q^{(1)}(T_2) a_p^{(1)}(T_2)$$

$$\times \sin\left[\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}\right] = 0;$$

$$\beta_n^{(1)}(T_2) = \omega_n \sigma T_2 - b_n^{(1)}(T_2);$$

$$\varphi_{n,s,p,q}^{(-)(+)(\pm)}(T_2) \equiv \beta_n^{(1)}(T_2) - b_s^{(1)}(T_2)$$

$$+ b_p^{(1)}(T_2) \pm b_q^{(1)}(T_2). \qquad (29)$$

Начальные условия для системы (29) также несложно получить из исходных условий (11), учитывая (12), (18), (20). Отметим, что из вида уравнений (29) следует, что четырехмодовый резонанс может проявляться лишь в том случае, если амплитуды хотя бы трех из взаимодействующих мод в начальный момент времени отличны от нуля. Рассмотрим для примера ситуацию, когда моды p, q и s присутствуют в спектре, определяющем начальную деформацию капли, а мода n возбуждается в результате межмодового взаимодействия (т. е. $p, q, s \in \Omega$; $n \notin \Omega$). Система уравнений (29) в этом случае должна быть дополнена следующими начальными условиями:

$$a_n^{(1)}(0) = 0; \quad \beta_n^{(1)}(0) = \pm\frac{\pi}{2}; \quad a_j^{(1)}(0) = \frac{h_j}{2};$$

$$b_j^{(1)}(0) = 0 \quad (j = p, q, s). \qquad (30)$$

Решения системы (29) с начальными условиями (30) определяют зависимость от медленного временного масштаба $T_2 = \varepsilon^2 t$ амплитуд 1-го порядка малости $M_j^{(1)}(t)$ (см. (20)) для мод, связанных резонансным взаимодействием ($j = p, q, s, n$).

7. На рис. 1 представлены результаты численных расчетов, выполненных для резонансной ситуации $\omega_{17} + \omega_{21} - \omega_{30} = \omega_2$, реализующейся при значении безразмерного параметра $W = 0.460245$ (параметр W характеризует величину заряда капли $W = Q^2/4\pi\gamma R^3$). Предполагалось, что начальное возмущение определяется 17-, 21- и 30-й модами, парциальные вклады которых в амплитуду этого возмущения ($\varepsilon = 0.1$) равны между собой ($h_{17} = h_{21} = h_{30} = 1/3$). Поскольку наибольший интерес представляет раскачка моды, отсутствующей в

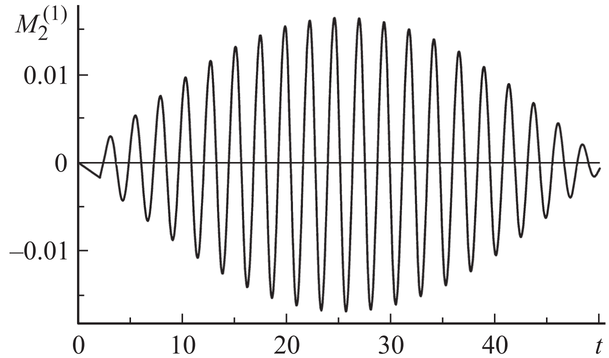

Рис. 1. Временнáя зависимость эволюционного коэффициента первого порядка малости в разложении в ряд по амплитуде начального возмущения амплитуды раскачиваемой основной (второй) моды капиллярных колебаний поверхности капли. Значение параметра W соответствует положению точного резонанса $W = 0.46$, $\varepsilon = 0.1$, $h_{17} = h_{21} = h_{30} = 1/3$.

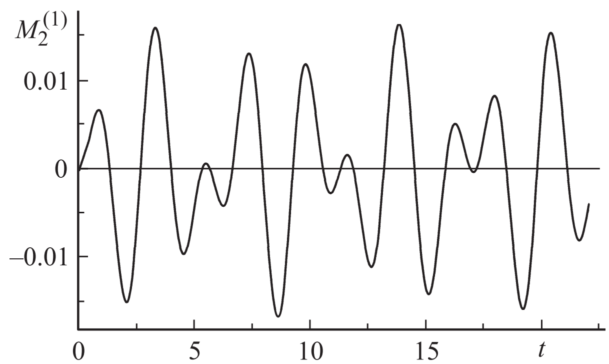

Рис. 2. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $\varepsilon = 0.3$.

спектре начального возмущения, то на рис. 1 (и всех последующих) приводятся только результаты, полученные для 2-й (основной) моды. Из представленных графиков видно, что для данной моды, раскачиваемой за счет четырехмодового резонансного взаимодействия, эволюционный коэффициент 1-го порядка малости $M_2^{(1)}(t)$ (см. разложения (12), (18)) может достигать лишь весьма незначительных амплитуд (на порядок меньших соответствующих амплитуд 17-, 21- и 30-й мод) и не превышает величин 2-го порядка малости. Увеличение относительной амплитуды начального возмущения ε приводит лишь к уменьшению периода резонансного взаимодействия, практически не сказываясь на амплитуде $M_2^{(1)}(t)$ (на рис. 2 представлены результаты аналогичных расчетов при $\varepsilon = 0.3$).

Естественно предположить, что в реальности форма начального возмущения поверхности капли определяется более широким спектром мод (а не только 17-, 21- и 30-й), тогда парциальный вклад интересующих нас мод уменьшиться. На рис. 3 приведены результаты расчетов, выполненных для случая, когда $h_{17} = h_{21} = h_{30} = 1/12$, а $\varepsilon = 0.1$. Как и следовало ожидать, уменьшение пар-

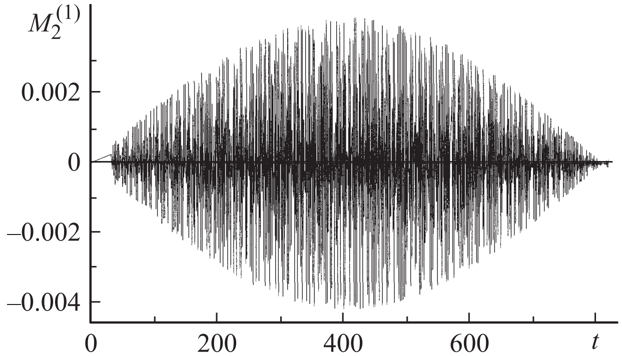

Рис. 3. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $h_{17} = h_{21} = h_{30} = 1/12$.

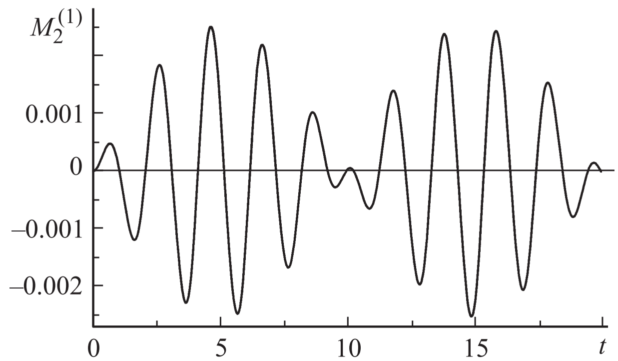

Рис. 4. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $W = 0$.

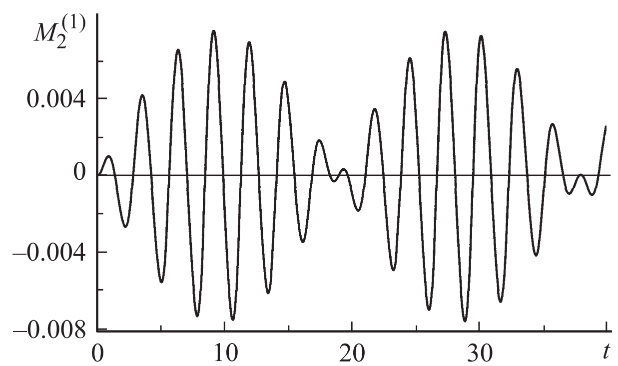

Рис. 5. Те же зависимости, что на рис. 1, рассчитанные при $W = 0.87$.

циального вклада резонансно взаимодействующих мод приводит к пропорциональному уменьшению амплитуды раскачиваемой основной моды. При этом значительно увеличивается период резонансного взаимодействия.

Изменение величины заряда капли (величины параметра W) приводит к увеличению параметра расстройки в соотношении (26), т.е. к ухудшению условий резонансной перекачки энергии из высоких мод в низкую — основную. На рис. 4 и 5 приведены зависимости, рассчитанные при значениях заряда капли, бóльших и меньших резонансного $W = 0$ и $W = 0.87$ соответственно. Параметры расстройки в этих случаях практически одинаковы, но имеют разные знаки. Несложно заметить, что следствием изменения заряда капли является уменьшение как амплитуды резонансно раскачиваемой моды, так и периода резонансного взаимодействия. Отметим, что при увеличении заряда снижение амплитуды основной моды менее значительно, поскольку в обычных условиях (при отсутствии резонансов) увеличение заряда ведет к росту амплитуд колебательных мод.

Численные расчеты проводились также и для второй четырехмодовой резонансной ситуации $\omega_p - \omega_q - \omega_s = \omega_n(1 + \varepsilon^2\sigma)$ (см. (26)), реализующейся, например, для 34-, 30-, 10- и 2-й мод при значении параметра $W = 0.983454$. Однако полученные результаты полностью аналогичны представленным на рис. 1 и здесь не приводятся.

Расчет обычными методами теории нелинейных осцилляций [1–6] возникающей за счет нерезонансного межмодового взаимодействия поправки 2-го порядка малости $M_2^{(2)}(t)$ к амплитуде основной моды (см. (12), (18), (28)) показывает, что она достигает величины, сравнимой с $M_2^{(1)}(t)$. Это вызвано тем, что выражение для поправки второго порядка к амплитуде n-й моды $M_n^{(2)}(t)$ содержит коэффициенты

$$\lambda_{kmn}^{(-)} \sim \frac{1}{(\omega_n - \omega_k + \omega_m)(\omega_n + \omega_k - \omega_m)},$$

причем индексы k и m пробегают значения номеров мод из спектра начального возмущения. Очевидно, что когда k и m принимают одинаковые значения, $\lambda_{kkn}^{(-)} \sim 1/\omega_n^2$. Поскольку частота второй моды существенно меньше всех возможных частот колебательных мод, то величины коэффициентов $\lambda_{kk2}^{(-)}$, а следовательно, и поправки $M_2^{(2)}(t)$ значительно больше, чем аналогичные поправки $M_n^{(2)}(t)$ для высоких мод. В результате вклад нерезонансной поправки 2-го порядка в суммарную амплитуду основной моды (равной $\varepsilon^2 M_2^{(2)}(t)$) сравним с вкладом, вносимым эволюционным коэффициентом 1-го порядка ($\varepsilon M_2^{(1)}(t)$), появляющимся вследствие резонанса. Данное обстоятельство в сочетании с требованием равномерности асимптотического разложения для амплитуды раскачиваемой основной моды фактически накладывает ограничение сверху на величину малого параметра ε.

Заключение

При асимптотическом расчете нелинейных капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости выяснилось, что в 3-м порядке малости по амплитуде многомодовой начальной деформации имеет место четырехмодовое внутреннее резонансное взаимодействие мод, обеспечивающее раскачку основной моды даже при отсутствии ее в спектре мод, возбужденных в начальный момент времени. Однако амплитуда основной моды, раскачиваемой при резонансной перекачке в нее энергии из возбужденных в начальный момент времени высоких мод, хотя формально имеет первый порядок малости, тем не менее не превышает величины поправки 2-го порядка малости, появляющейся за счет нерезонансного нелинейного взаимодействия. Это делает возможность применения результатов проведенных расчетов к истолкованию проблемы инициирования разряда молнии достаточно проблематичной.

В том же 3-м порядке малости проявляется трехмодовое резонансное взаимодействие амплитуд мод 1-го порядка, возбужденных в начальный момент времени, с поправками к амплитудам, имеющим 2-й порядок малости.

Приложение А. Краевые задачи различных порядков малости

Подставляя разложения (12)–(15) в краевую задачу (2)–(11) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε, получим задачи различных порядков малости. В нижеследующем изложении для частных производных (например, по переменной x) используется обозначение ∂_x.

Выделяя слагаемые с ε^1, получим задачу 1-го порядка малости

$$\Delta\psi^{(1)} = 0; \quad \Delta\phi^{(1)} = 0;$$

$$r \to 0: \quad \psi^{(1)} \to 0;$$

$$r \to +\infty: \quad \nabla\phi^{(1)} \to 0;$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(1)};$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\psi^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\,\partial_r\phi^{(0)}\big(\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(0)}\big) + 2\xi^{(1)} + \Delta_\Omega\xi^{(1)};$$

$$\int_{-1}^{1}\xi^{(1)}d(\cos\vartheta) = 0; \quad \int_{-1}^{1}\xi^{(1)}P_1 d(\cos\vartheta) = 0;$$

$$r = 1: \quad \int_{-1}^{1}\big\{\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\big)\big\}d(\cos\vartheta) = 0;$$

$$r = 1: \quad \phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t);$$

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = \xi\sum_{k\in\Omega}h_k P_k(\cos\vartheta); \quad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = 0.$$

Слагаемые, содержащие ε^2, определяют задачу 2-го порядка малости

$$\Delta\psi^{(2)} = 0; \quad \Delta\phi^{(2)} = 0;$$

$$r \to 0: \quad \psi^{(2)} \to 0;$$

$$r \to +\infty: \quad \nabla\phi^{(2)} \to 0;$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)} - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(1)};$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\psi^{(2)} + \partial_{T_1}\psi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)} + \frac{1}{2}\big(\partial_r\psi^{(1)}\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\partial_\vartheta\psi^{(1)}\big)^2 = \frac{1}{8\pi}\big\{2\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + \big(\xi^{(1)}\big)^2$$
$$\times\big((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}\big) + \big(\partial_\vartheta\phi^{(1)}\big)^2 + \big(\partial_r\phi^{(1)}\big)^2$$
$$+ 2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} + 2\xi^{(1)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)} + \partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)}\big)\big\}$$
$$+ 2\xi^{(2)} + \Delta_\Omega\xi^{(2)} - 2\big(\xi^{(1)}\big)^2 - 2\xi^{(1)}\Delta_\Omega\xi^{(1)};$$

$$\int_{-1}^{1}\big(\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2\big)d(\cos\vartheta) = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\big(2\xi^{(2)} + 3(\xi^{(1)})^2\big)P_1 d(\cos\vartheta) = 0;$$

$$r = 1: \quad \int_{-1}^{1}\Big\{\partial_r\phi^{(2)} + \xi^{(1)}\big(\partial_{rr}\phi^{(1)} + 2\partial_r\phi^{(1)}\big) + \xi^{(2)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\big) + \big(\xi^{(1)}\big)^2\Big(\frac{1}{2}\partial_{rrr}\phi^{(0)}$$
$$+ 2\partial_{rr}\phi^{(0)} + \partial_r\phi^{(0)}\Big) - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}\Big\}d(\cos\vartheta) = 0;$$

$$r = 1: \quad \phi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)} + \frac{1}{2}\big(\xi^{(1)}\big)^2\partial_{rr}\phi^{(0)} = \phi_S^{(2)}(t);$$

$$t = 0: \quad \xi^{(2)} = -\sum_{k\in\Omega}\frac{h_k P_0(\cos\vartheta)}{2k+1} - \frac{3}{2}\sum_{k,m\in\Omega}h_k h_m K_{km1}P_1(\cos\vartheta);$$

$$\partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)} = 0.$$

Задача 3-го порядка малости определяется слагаемыми, содержащими ε^3,

$$\Delta\psi^{(3)} = 0; \quad \Delta\phi^{(3)} = 0;$$

$$r \to 0: \quad \psi^{(3)} \to 0;$$

$$r \to +\infty: \quad \nabla\phi^{(3)} \to 0;$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(3)} + \partial_{T_1}\xi^{(2)} + \partial_{T_2}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(3)} - \partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}$$
$$- \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(2)} + \xi^{(2)}\partial_{rr}\psi^{(1)} + \xi^{(1)}\big(\partial_\vartheta\xi^{(1)}(2\partial_\vartheta\psi^{(1)}$$
$$- \partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}) + \partial_{rr}\psi^{(2)}\big) + \frac{1}{2}\big(\xi^{(1)}\big)^2\partial_{rrr}\psi^{(1)};$$

$$r=1:\qquad \partial_{T_0}\psi^{(3)}+\partial_{T_2}\psi^{(1)}+\partial_{T_1}\psi^{(2)}+\xi^{(1)}\partial_{rT_1}\psi^{(1)}$$
$$+\partial_\vartheta\psi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(2)}+\partial_r\psi^{(1)}\partial_r\psi^{(2)}+\xi^{(2)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)}+\xi^{(1)}$$
$$\times\left(\partial_{rT_0}\psi^{(2)}+\partial_\vartheta\psi^{(1)}(\partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}-\partial_\vartheta\psi^{(1)})+\partial_r\psi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\xi^{(1)}\right)^2\partial_{rrT_0}\psi^{(1)}=\frac{1}{8\pi}\Big\{2\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)}+\left(\xi^{(1)}\right)^3$$
$$\times\left(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)}+\frac{1}{3}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrrr}\phi^{0}\right)+2\big(\partial_\vartheta\phi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)}$$
$$+\partial_r\phi^{(1)}(\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}+\partial_r\phi^{(2)})+\partial_r\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(3)}$$
$$+\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)}\big)+2\xi^{(1)}\Big(\xi^{(2)}\big((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2$$
$$+\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)}\big)+\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(2)}+\partial_\vartheta\phi^{(1)}$$
$$\times\left(\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)}-\partial_\vartheta\phi^{(1)}\right)+\partial_r\phi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(1)}+\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(2)}\Big)$$
$$+\left(\xi^{(1)}\right)^2\big(\partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)}+2\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)}$$
$$+\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(1)}\big)\Big\}+(2+\Delta_\Omega)\xi^{(3)}+2\xi^{(1)}\big((\xi^{(1)})^2$$
$$-(2+\Delta_\Omega)\xi^{(2)}\big)-2\xi^{(2)}\Delta_\Omega\xi^{(1)}+3\left(\xi^{(1)}\right)^2\Delta_\Omega\xi^{(1)}$$
$$-\left(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\right)^2\partial_{\vartheta\vartheta}\xi^{(1)}-\frac{1}{2}\left(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\right)^2\Delta_\Omega\xi^{(1)};$$

$$\int_{-1}^{1}\left(3\xi^{(3)}+6\xi^{(1)}\xi^{(2)}+(\xi^{(1)})^3\right)d(\cos\vartheta)=0;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\xi^{(3)}+3\xi^{(1)}\xi^{(2)}+(\xi^{(1)})^3\right)P_1(\cos\vartheta)d(\cos\vartheta)=0;$$

$$r=1:\qquad \int_{-1}^{1}\Big\{\partial_r\phi^{(3)}+\xi^{(3)}\left(\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)}\right)$$
$$+\xi^{(2)}\left(\partial_{rr}\phi^{(1)}+2\partial_r\phi^{(1)}\right)+\left(\xi^{(1)}\right)^3\Big(\frac{1}{6}\partial_{rrrr}\phi^{(0)}$$
$$+\partial_{rrr}\phi^{(0)}+\partial_{rr}\phi^{(0)}\Big)+\left(\xi^{(1)}\right)^2\Big(\frac{1}{2}\partial_{rrr}\phi^{(1)}+2\partial_{rr}\phi^{(1)}$$
$$+\partial_r\phi^{(1)}\Big)+\xi^{(1)}\big(\xi^{(2)}(\partial_{rrr}\phi^{(0)}+4\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)})$$
$$+2\partial_r\phi^{(2)}+\partial_{rr}\phi^{(2)}-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)}\big)-\partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}$$
$$-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)}\Big\}d(\cos\vartheta)=0;$$

$$r=1:\qquad \phi^{(3)}+\xi^{(1)}\partial_r\phi^{(2)}+\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(1)}+\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\xi^{(1)}\right)^2\partial_{rr}\phi^{(1)}+\xi^{(1)}\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{0}$$
$$+\frac{1}{6}\left(\xi^{(1)}\right)^3\partial_{rrr}\phi^{(0)}=\phi_S^{(3)}(t);$$
$$t=0:\quad \xi^{(3)}=-\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l}{3(2l+1)}K_{kml}P_0(\cos\vartheta)$$
$$-\left(\frac{9}{5}h_2\sum_{k,m\in\Omega}h_kh_mK_{km1}+\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}h_kh_mh_lK_{kmg}K_{gl1}\right)P_1(\cos\vartheta);$$
$$t=0:\qquad \partial_{T_0}\xi^{(3)}+\partial_{T_1}\xi^{(2)}+\partial_{T_2}\xi^{(1)}=0,$$

где $K_{kmn}=\left(C_{k0m0}^{n0}\right)^2$, а C_{k0m0}^{n0} — коэффициенты Клебша–Гордана.

Приложение B. Использованные обозначения

$$\gamma_{kmn}=K_{kmn}\big[\omega_k^2(n-k+1)+2n\big(m(m+1)-1\big)$$
$$+\big(m(k+1)-k(2k-2n+7)+3\big)nW/2\big]$$
$$+\alpha_{kmn}\big[\omega_k^2/k+nW/2\big];$$
$$\eta_{kmn}=K_{kmn}(n/2-k+1)+\alpha_{kmn}\big(1+n/(2m)\big)/k;$$
$$K_{kmn}=\left(C_{k0m0}^{n0}\right)^2;$$
$$\alpha_{kmn}=-C_{k0m0}^{n0}C_{k(-1)m1}^{n0}\sqrt{k(k+1)m(m+1)};$$
$$\lambda_{kmn}^{(\pm)}=(\gamma_{kmn}\pm\omega_k\omega_m\eta_{kmn})/\left(\omega_n^2-(\omega_k\pm\omega_m)^2\right);$$
$$H_{kgn}^{0(+)}=\left(\Pi_{kgn}^0-\Pi_{kgn}^1\omega_k\omega_g-\Pi_{kgn}^2\omega_g^2\right)\left(\lambda_{kkg}^{+}+\lambda_{kkg}^{(-)}\right);$$
$$H_{kgn}^{0(-)}=\left(\Pi_{kgn}^0+\Pi_{kgn}^1\omega_k\omega_g-\Pi_{kgn}^2\omega_g^2\right)\left(\lambda_{kkg}^{+}+\lambda_{kkg}^{(-)}\right);$$
$$\Pi_{kgn}^0=\Big(\omega_k^2(n-k+1)+2n\big((k-1)(k+2)+g(g+1)\big)$$
$$+nW\big(3-k(3-n+k)-g(3-n-k+g)\big)\Big)K_{kgn}$$
$$+\left(\omega_k^2/k+nW\right)\alpha_{kgn};$$
$$\Pi_{kgn}^1=(g+k-n-2)K_{kgn}-(n+k+g)\alpha_{kgn}/(gk);$$
$$\Pi_{kgn}^2=(g-n-1)K_{kgn}-\alpha_{kgn}/g;$$
$$\Xi_n=3\left(\omega_n^2-n(n-1)W\right);\quad \chi_l=-\frac{9(l+1)}{(2l+1)(2l+3)};$$
$$\beta_{kmgln}^{1(+)}=\Pi_{kgn}^0-\Pi_{kgn}^1\omega_k(\omega_l+\omega_m)-\Pi_{kgn}^2(\omega_l+\omega_m)^2;$$
$$\beta_{kmgln}^{1(-)}=\Pi_{kgn}^0-\Pi_{kgn}^1\omega_k(\omega_l-\omega_m)-\Pi_{kgn}^2(\omega_l-\omega_m)^2;$$
$$\beta_{kmgln}^{2(+)}=\Pi_{kgn}^0+\Pi_{kgn}^1\omega_k(\omega_l+\omega_m)-\Pi_{kgn}^2(\omega_l+\omega_m)^2;$$
$$\beta_{kmgln}^{2(-)}=\Pi_{kgn}^0+\Pi_{kgn}^1\omega_k(\omega_l-\omega_m)-\Pi_{kgn}^2(\omega_l-\omega_m)^2;$$

$$H^{1(+)(-)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{1(+)}_{kmgln}\lambda^{(+)}_{lmg}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(-)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(-)}_{kmgln};$$

$$H^{1(-)(+)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{1(-)}_{kmgln}\lambda^{(-)}_{lmg}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(+)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(+)}_{kmgln};$$

$$H^{2(+)(+)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{2(+)}_{kmgln}\lambda^{(+)}_{lmg}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(+)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(+)}_{kmgln};$$

$$H^{2(-)(-)}_{kmln}=\sum_{g=2}^{\infty}\beta^{2(-)}_{kmgln}\lambda^{(-)}_{lmg}+\sum_{g=1}^{\infty}\mu^{1(-)}_{kmgln}+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(-)}_{kmgln};$$

$$\mu^{1(-)}_{kmgln}=\Lambda^{1}_{kmgln}-\Gamma^{1}_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\mu^{1(+)}_{kmgln}=\Lambda^{1}_{kmgln}+\Gamma^{1}_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\mu^{0(-)}_{kmgln}=\Lambda^{0}_{kmgln}-\Gamma^{0}_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\mu^{0(+)}_{kmgln}=\Lambda^{1}_{kmgln}+\Gamma^{0}_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\Lambda^{0}_{kmgln}=\frac{1}{2k}\Big\{K_{gln}\Big[\alpha_{kmg}\Big(2(k-2)\omega_k^2-kn\big(2(k+2)W-l(3l+1)\big)\Big)+K_{kmg}\Big(kn\Big(4-6k(k+1)+\Big(k^3-2(m+1)(m+2)-k^2(n-9)-k\big(3n+2m(m+3)-22\big)\Big)W\Big)-(k-1)\times k(k-n-2)\omega_k^2\Big)\Big]-2kn\alpha_{kmg}\times\sum_{\nu=1}^{[l/2]}(2l-4\nu+1)K_{g,l-2\nu,n}\Big\};$$

$$\Lambda^{1}_{kmgln}=\big((g-n-1)K_{gln}-\alpha_{gln}/g\big)\big((m-1)K_{kmg}-\alpha_{kmg}/m\big)\omega_m^2+Wnk\big((g+1)(l+n-g-2)K_{gln}+\alpha_{gln}\big)K_{kmg};$$

$$\Gamma^{0}_{kmgln}=\Big((k-1)\big(k-2(n+1)\big)K_{kmg}/2-\big((k-1)\times(m+n)-m\big)\alpha_{kmg}/(km)\Big)K_{gln}+\big((k-1)\times(k-2)K_{klg}/2-(k-2)\alpha_{klg}/k\big)K_{gmn};$$

$$\Gamma^{1}_{kmgln}=-\big((g-n-1)K_{gkn}-(n+k)\alpha_{gkn}/(kg)\big)\times\big((m-1)K_{lmg}-\alpha_{lmg}/m\big)-\big((g-n-1)K_{gln}-\alpha_{gln}/g\big)\big((m-1)K_{kmg}-\alpha_{kmg}/m\big);$$

$$G_n\equiv\sum_{k=2}^{\infty}\bigg\{\frac{1}{(2k+1)}\big[2\Xi_n+\delta_{n,k}\big(2(k-1)\omega_k^2+\Xi_k\big)\big]-(\delta_{k,n-1}+\delta_{k,n+1})\chi_{k-\delta_{k,n+1}}\big[\beta^{2(+)}_{k,k,1,n,n}+\beta^{1(-)}_{k,k,1,n,n}\big]-\sum_{g=0}^{\infty}\Big\{(1-\delta_{g,0})(1-\delta_{g,1})\big[\beta^{2(+)}_{k,k,g,n,n}\big(\lambda^{(+)}_{kng}+(1-\delta_{k,n})\times\lambda^{(+)}_{nkg}\big)+\beta^{1(-)}_{k,k,g,n,n}\big(\lambda^{(-)}_{kng}+\lambda^{(-)}_{nkg}\big)+2(1-\delta_{k,n})\Pi^{0}_{ngn}\lambda^{(-)}_{kkg}\big]+(2-\delta_{k,n})\big[(1-\delta_{g,0})Z^{1}_{k,g,n}+Z^{0}_{k,g,n}\big]\Big\}\bigg\}\big(A_k^{(1)}\overline{A_k^{(1)}}\big);$$

$$Z^{i}_{k,g,n}\equiv\mu^{i(+)}_{k,k,g,n,n}+\Lambda^{i}_{n,k,g,k,n}+\Lambda^{i}_{k,n,g,k,n}\quad(i=0;1);$$

$$D^{l,m}_{k,n}\equiv1-\delta_{k,n}\delta_{l,m};$$

$$Y^{(+)}_{n}=D^{p,s}_{q,n}\big(\delta_{p,n-1}+\delta_{p,n+1}\big)\big(\delta_{s,q+1}\chi_q+\delta_{q,s+1}\chi_s\big)\beta^{1(-)}_{p,s,1,q,n}+D^{q,s}_{p,n}\big(\delta_{q,n-1}+\delta_{q,n+1}\big)\big(\delta_{s,p+1}\chi_p+\delta_{p,s+1}\chi_s\big)\beta^{1(-)}_{q,s,1,p,n}+D^{p,s}_{q,n}D^{q,s}_{p,n}\big[\big(\delta_{s,n-1}+\delta_{s,n+1}\big)\big(\delta_{q,p+1}\chi_p+\delta_{p,q+1}\chi_q\big)\beta^{2(+)}_{s,p,1,q,n}+H^{1(-)(+)}_{p,s,q,n}+H^{1(-)(+)}_{q,s,p,n}+H^{2(-)(-)}_{p,q,s,n}+H^{2(-)(-)}_{q,p,s,n}+H^{2(+)(+)}_{s,q,p,n}+H^{2(+)(+)}_{s,p,q,n}\big];$$

$$Y^{(-)}_{n}=D^{p,s}_{q,n}\big(\delta_{s,n-1}+\delta_{s,n+1}\big)\big(\delta_{p,q+1}\chi_q+\delta_{q,p+1}\chi_p\big)\beta^{1(-)}_{s,p,1,q,n}+D^{q,p}_{s,n}\big(\delta_{q,n-1}+\delta_{q,n+1}\big)\big(\delta_{p,s+1}\chi_s+\delta_{s,p+1}\chi_p\big)\beta^{1(-)}_{q,p,1,s,n}+D^{p,s}_{q,n}D^{q,p}_{s,n}\big[\big(\delta_{p,n-1}+\delta_{p,n+1}\big)\big(\delta_{q,s+1}\chi_s+\delta_{s,q+1}\chi_q\big)\beta^{2(+)}_{p,s,1,q,n}+H^{1(-)(+)}_{s,p,q,n}+H^{1(-)(+)}_{q,p,s,n}+H^{2(-)(-)}_{s,q,p,n}+H^{2(-)(-)}_{q,s,p,n}+H^{2(+)(+)}_{p,q,s,n}+H^{2(+)(+)}_{p,s,q,n}\big];$$

$$Y^{(+)}_{p}=D^{p,s}_{q,n}\big(\delta_{n,p-1}+\delta_{n,p+1}\big)\big(\delta_{q,s+1}\chi_s+\delta_{s,q+1}\chi_q\big)\beta^{1(-)}_{n,q,1,s,p}+D^{q,s}_{p,n}\big(\delta_{s,p-1}+\delta_{s,p+1}\big)\big(\delta_{q,n+1}\chi_n+\delta_{n,q+1}\chi_q\big)\beta^{1(-)}_{s,q,1,n,p}+D^{q,s}_{p,n}D^{p,s}_{q,n}\big[\big(\delta_{q,p-1}+\delta_{q,p+1}\big)\big(\delta_{s,n+1}\chi_n+\delta_{n,s+1}\chi_s\big)\beta^{2(+)}_{q,s,1,n,p}+H^{1(-)(+)}_{n,q,s,p}+H^{1(-)(+)}_{s,q,n,p}+H^{2(-)(-)}_{n,s,q,p}+H^{2(-)(-)}_{s,n,q,p}+H^{2(+)(+)}_{q,s,n,p}+H^{2(+)(+)}_{q,n,s,p}\big];$$

$$Y^{(-)}_{p}=\big(\delta_{n,p-1}+\delta_{n,p+1}\big)\big(\delta_{q,s+1}\chi_s+\delta_{s,q+1}\chi_q\big)\beta^{1(+)}_{n,q,1,s,p}+\big(\delta_{s,p-1}+\delta_{s,p+1}\big)\big(\delta_{q,n+1}\chi_n+\delta_{n,q+1}\chi_q\big)\beta^{1(+)}_{s,q,1,n,p}+\big(\delta_{q,p-1}+\delta_{q,p+1}\big)\big(\delta_{s,n+1}\chi_n+\delta_{n,s+1}\chi_s\big)\beta^{1(+)}_{q,s,1,n,p}+H^{1(+)(-)}_{n,q,s,p}+H^{1(+)(-)}_{s,q,n,p}+H^{1(+)(-)}_{n,s,q,p}+H^{1(+)(-)}_{s,n,q,p}+H^{1(+)(-)}_{q,s,n,p}+H^{1(+)(-)}_{q,n,s,p};$$

$$Y_q^{(+)} = Y_q^{(-)} = D_{p,n}^{q,s}\left(\delta_{n,q-1} + \delta_{n,q+1}\right)\left(\delta_{p,s+1}\chi_s + \delta_{s,p+1}\chi_p\right)$$
$$\times \beta_{n,p,1,s,q}^{1(-)} + D_{q,n}^{p,s}\left(\delta_{s,q-1} + \delta_{s,q+1}\right)\left(\delta_{p,n+1}\chi_n + \delta_{n,p+1}\chi_p\right)$$
$$\times \beta_{s,p,1,n,q}^{1(-)} + D_{p,n}^{q,s}D_{q,n}^{p,s}\Big[\left(\delta_{p,q-1} + \delta_{p,q+1}\right)\big(\delta_{s,n+1}\chi_n$$
$$+ \delta_{n,s+1}\chi_s\big)\beta_{p,s,1,n,q}^{2(+)} + H_{n,p,s,q}^{1(-)(+)} + H_{s,p,n,q}^{1(-)(+)} + H_{n,s,p,q}^{2(-)(-)}$$
$$+ H_{s,n,p,q}^{2(-)(-)} + H_{p,s,n,p}^{2(+)(+)} + H_{p,n,s,q}^{2(+)(+)}\Big];$$

$$Y_s^{(+)} = D_{p,n}^{q,s}\left(\delta_{p,s-1} + \delta_{p,s+1}\right)\left(\delta_{n,q+1}\chi_q + \delta_{q,n+1}\chi_n\right)\beta_{p,n,1,q,s}^{1(-)}$$
$$+ D_{q,n}^{p,s}\left(\delta_{q,s-1} + \delta_{q,s+1}\right)\left(\delta_{n,p+1}\chi_p + \delta_{p,n+1}\chi_n\right)\beta_{q,n,1,p,s}^{1(-)}$$
$$+ D_{p,n}^{q,s}D_{q,n}^{p,s}\Big[\left(\delta_{n,s-1} + \delta_{n,s+1}\right)\left(\delta_{q,p+1}\chi_p + \delta_{p,q+1}\chi_q\right)\beta_{n,p,1,q,s}^{2(+)}$$
$$+ H_{p,n,q,s}^{1(-)(+)} + H_{q,n,p,s}^{1(-)(+)} + H_{p,q,n,s}^{2(-)(-)}$$
$$+ H_{q,p,n,s}^{2(-)(-)} + H_{n,q,p,s}^{2(+)(+)} + H_{n,p,q,s}^{2(+)(+)}\Big];$$

$$Y_s^{(-)} = D_{p,n}^{q,s}\left(\delta_{n,s-1} + \delta_{n,s+1}\right)\left(\delta_{p,q+1}\chi_q + \delta_{q,p+1}\chi_p\right)\beta_{n,p,1,q,s}^{1(-)}$$
$$+ D_{s,n}^{q,p}\left(\delta_{q,s-1} + \delta_{q,s+1}\right)\left(\delta_{p,n+1}\chi_n + \delta_{n,p+1}\chi_p\right)\beta_{q,p,1,n,p}^{1(-)}$$
$$+ D_{p,n}^{q,s}D_{s,n}^{q,p}\Big[\left(\delta_{p,s-1} + \delta_{p,s+1}\right)\left(\delta_{q,n+1}\chi_n + \delta_{n,q+1}\chi_q\right)\beta_{p,n,1,q,s}^{2(+)}$$
$$+ H_{n,p,q,s}^{1(-)(+)} + H_{q,p,n,s}^{1(-)(+)} + H_{n,q,p,s}^{2(-)(-)}$$
$$+ H_{q,n,p,s}^{2(-)(-)} + H_{p,q,n,s}^{2(+)(+)} + H_{p,n,q,s}^{2(+)(+)}\Big];$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
[2] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.
[4] *Ширяева С.О.* // ПЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
[5] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
[6] *Ширяева С.О.*// Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 163–174.
[7] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
[8] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 36–45.
[9] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
[10] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
[11] Облака и облачная атмосфера. Справочник / Под ред. И.П. Мазин и др. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[12] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 45–51.
[13] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
[14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 69–75.
[15] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.