

01;03

Нелинейные периодические волны на заряженной свободной поверхности идеальной жидкости

© А.В. Климов, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 26 мая 2003 г.)

В асимптотических расчетах четвертого порядка малости по амплитуде периодической бегущей волны на однородно заряженной свободной поверхности бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости найдено аналитическое выражение для профиля нелинейной волны и для нелинейной поправки к ее частоте. Выяснилось, что при использовании в решении задачи начального условия, обеспечивающем неизменность во времени амплитуды и длины волны первого порядка малости в четвертом порядке приближений, добавки к амплитуде нелинейной волны и ее частоте отсутствуют. Нелинейный анализ критических условий реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду показал, что критическая для начала неустойчивости плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой волны не постоянны, как это имело место в линейной теории, а являются функциями амплитуды волны и снижаются с ее ростом.

1. Изучение критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена [1,2]. Тем не менее большая часть проведенных теоретических исследований, основанных на изучении устойчивости капиллярных волн бесконечно малой амплитуды, выполнена в линейном приближении [2], хотя нелинейная суть феномена, основанная на нелинейности основных уравнений гидродинамики, очевидна и подтверждается известными экспериментами [1,3–5]. Отметим, что методы асимптотического анализа нелинейных периодических волн достаточно хорошо разработаны в связи с исследованиями нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности жидкости (см., например, [6–10] и указанную там литературу) и могут быть успешно использованы для анализа обсуждаемой проблемы. Этому и посвящено настоящее рассмотрение. Следует, однако, оговориться: нелинейные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости в недавнее время изучались [11–14], однако ориентированы цитируемые работы на поиск солитонных решений, а использованные в них методы не позволили получить нелинейные поправки к частотам и критическим условиям реализации неустойчивости.

2. Пусть идеальная, идеально проводящая несжимаемая жидкость плотностью ρ с коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле сил тяжести полупространство $z < 0$ декартовой системы координат, орт \mathbf{e}_z которой направлен против направления ускорения силы тяжести $\mathbf{e}_z \parallel \mathbf{g}$. Примем также, что свободная поверхность жидкости заряжена и в ее окрестности существует однородное электростатическое поле E_0 , направленное параллельно орту \mathbf{e}_z .

Будем рассматривать плоскую волну, бегущую по свободной поверхности, граничащей с вакуумом жидкости, вдоль направления орта \mathbf{e}_x , тогда деформация свободной поверхности жидкости, связанная с бегущей волной, поле скоростей волнового движения, распределение давлений и электрического поля в окрестности, искаженной волновым движением свободной поверхности жидкости, будут зависеть кроме времени t только от координат x и z . Уравнение свободной поверхности жидкости, искаженной волновым движением малой амплитуды, представим в виде $z = \xi(x, t)$.

Поставим перед собой цель найти в четвертом порядке малости по амплитуде волны, которую будем считать малой по сравнению с ее длиной, профиль бегущей волны, не изменяющийся во времени, и нелинейную по амплитуде поправку к частоте. Отметим, что чисто синусоидальный профиль сохраняется во времени только для волн бесконечно малой амплитуды и не является стационарным уже при расчетах второго порядка малости, поэтому в классических работах по теории волн конечной амплитуды в идеальной несжимаемой жидкости [6–10,15,16] задача расчета волны конечной амплитуды во втором порядке малости трактуется как задача определения профиля волны, не изменяющегося с течением времени. Как будет показано ниже, появление в расчетах более высокого порядка малости, чем второй, нелинейной квадратичной по малому параметру поправки к частоте приведет к тому, что фазовые скорости линейной по малому параметру волны и нелинейных поправок к ней будут различны. Это означает, что говорить о стационарном во времени профиле волны конечной амплитуды можно лишь на весьма ограниченных интервалах времени.

3. Учитывая вышесказанное, математическая модель феномена может быть сформулирована в виде краевой

задачи следующим образом:

$$z > \xi : \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad (1)$$

$$z < \xi : \quad \nabla^2 \varphi = 0; \quad (2)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right); \quad (3)$$

$$z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (4)$$

$$p + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad (5)$$

$$\Phi = 0; \quad (6)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z; \quad (7)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi \rightarrow 0. \quad (8)$$

Для однозначной разрешимости обсуждаемой задачи необходимо сформулировать еще и начальные условия. Однако в задачах подобного рода проблема выбора начальных условий оказывается довольно тонким вопросом, поскольку произвольное наперед заданное начальное условие может привести к неоправданному увеличению громоздкости решения. Поэтому в классических построения периодических волновых профилей на поверхности идеальной жидкости начальное условие выбирается так, чтобы аналитическое описание решения было наименее громоздким. Фактически требование определения начального условия заменяется принципом искать решение, наименее громоздкое в смысле математического описания. Именно такой подход используется в настоящей работе.

Будем полагать, что в нулевом приближении свободная поверхность находится в невозмущенном состоянии и описывается уравнением $z = 0$, жидкость покоится, а электрическое поле однородно во всем пространстве

$$\xi_0 \equiv 0; \quad \nabla \varphi_0 \equiv 0; \quad \nabla \Phi_0 \equiv -E_0 \mathbf{e}_z; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi}.$$

Подставляя эти выражения в (1)–(8), получим

$$\Phi_0 \equiv -E_0 z.$$

4. Разобьем решаемую задачу по порядкам малости. Но предварительно исключим из рассмотрения функцию давления $p(\mathbf{r}, t)$, подставив выражение для давления (3) в динамическое условие (5), которое тогда примет вид

$$-\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g \xi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1}{8\pi} \times \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}.$$

Неизвестными функциями в задаче являются возмущение свободной поверхности ξ , потенциал скорости φ

и электрический потенциал Φ . Искать их будем в виде разложений по малому параметру

$$\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \varepsilon^4 \xi_4 + O(\varepsilon^5); \quad (9)$$

$$\Phi = -E_0 z + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^3 \Phi_3 + \varepsilon^4 \Phi_4 + O(\varepsilon^5); \quad (10)$$

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \varepsilon^4 \varphi_4 + O(\varepsilon^5);$$

$$\xi_n \sim O(1); \quad \Phi_n \sim O(1); \quad \varphi_n \sim O(1), \quad (11)$$

где ε — малый безразмерный параметр, определяемый как произведение амплитуды волны a на волновое число k .

Решать задачу будем методом многих масштабов теории возмущений. Для этого примем, что неизвестные функции ξ_n, φ_n, Φ_n зависят помимо координат x и z от разных временных масштабов: от основного $T_0 = t$ и более медленных $T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, T_3 = \varepsilon^3 t$, т. е.

$$\xi_n = \xi_n(T_0, T_1, T_2, T_3, x); \quad \Phi_n = \Phi_n(T_0, T_1, T_2, T_3, x, z);$$

$$\varphi_n = \varphi_n(T_0, T_1, T_2, T_3, x, z).$$

С учетом этого оператор дифференцирования по времени примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T_3} + O(\varepsilon^4). \quad (12)$$

Граничные условия на свободной поверхности жидкости разложим по амплитуде отклонения поверхности от равновесной плоской (по ε) в окрестности $z = 0$. Точнее говоря, все величины, входящие в условия (4)–(6) и зависящие от z , разложим в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$. Также разложим по степеням малого параметра величины $(\partial \xi / \partial t)$ и $(\partial^2 \xi / \partial x^2) / (1 + (\partial \xi / \partial x)^2)^{3/2}$. При разложении частных производных по времени $(\partial \xi / \partial t)$ и $(\partial \varphi / \partial t)$ будем учитывать выражение (12). Подставляя разложения (9)–(11) в (1), (2), (7), (8), собирая слагаемые при одинаковых степенях ε и приравнявая их нулю, разобьем задачу на порядки малости от первого до четвертого.

5. Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид

$$z > 0 : \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0;$$

$$z < 0 : \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0;$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0;$$

$$-\rho g \xi_1 - \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0;$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi_1 \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0.$$

Решение задачи первого порядка малости легко получается классическими методами [17,18]

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}\xi \exp(i\theta) + \frac{1}{2}\bar{\xi} \exp(-i\theta); \\ \varphi_1 &= -\frac{i\omega}{2k}\xi \exp(kz) \exp(i\theta) + \frac{i\omega}{2k}\bar{\xi} \exp(kz) \exp(-i\theta); \\ \Phi_1 &= \frac{E_0}{2}\xi \exp(-kz) \exp(i\theta) + \frac{E_0}{2}\bar{\xi} \exp(-kz) \exp(-i\theta); \\ \omega^2 &\equiv gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} - \frac{E_0^2 k^2}{4\pi\rho}; \quad \theta \equiv kx - \omega T_0.\end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать начальное условие, с которым будет проводиться дальнейшее рассмотрение. Примем, что все нелинейные поправки к профилю волны, получающемуся в первом порядке приближений (к функции $\xi_1 = \xi_1(T_0, x)$), будут функциями аргумента ($m\theta$), где целое число $m > 1$. Иными словами, примем, что амплитудные множители при возможных нелинейных поправках к профилю волны с аргументом $\theta = \theta$ равны нулю. Начальное условие такого вида использовалось ранее в [8,9] и выяснилось, что оно обеспечивает достаточно простой вид получающихся решений.

6. Математическая формулировка задачи второго порядка малости получится в виде

$$\begin{aligned}z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_2 &= 0; \\ z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_2 &= 0; \\ z = 0: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \\ -\rho g \xi_2 - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} \\ &+ \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_0} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 \\ &- \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2; \\ \Phi_2 - E_0 \xi_2 &= -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}; \\ z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_2 &\rightarrow 0; \\ z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_2 &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Решение сформулированной задачи легко находится

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{k(2\pi(k^2\gamma + g\rho) - E_0^2 k)}{8\pi(\rho g - 2\gamma k^2)} (\xi^2 \exp(2i\theta) + \bar{\xi}^2 \exp(-2i\theta)); \\ \varphi_2 &= -\frac{i\omega k(6\pi k\gamma - E_0^2)}{8\pi(\rho g - 2\gamma k^2)} \\ &\times (\xi^2 \exp(2i\theta) - \bar{\xi}^2 \exp(-2i\theta)) \exp(2kz); \\ \Phi_2 &= \frac{E_0 k}{2} \xi \bar{\xi} + \frac{E_0 k(2\pi(-k^2\gamma + 2g\rho) - E_0^2 k)}{8\pi(\rho g - 2\gamma k^2)} \\ &\times (\xi^2 \exp(2i\theta) + \bar{\xi}^2 \exp(-2i\theta)) \exp(-2kz).\end{aligned}$$

7. Математическая формулировка задачи третьего порядка малости имеет вид:

$$\begin{aligned}z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_3 &= 0; \\ z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_3 &= 0; \\ z = 0: \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} &= \Omega_{31}; \quad \Phi_3 - E_0 \xi_3 = \Omega_{33}; \\ -\rho g \xi_3 - \rho \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} &= \Omega_{32}; \\ z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_3 &\rightarrow 0; \\ z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_3 &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Выражения для функций неоднородностей $\Omega_{31}, \Omega_{32}, \Omega_{33}$ в правых частях граничных условий на свободной поверхности, определяющихся решениями первого и второго порядков малости, приведены в Приложении А.

Решение получившейся неоднородной задачи можно получить после математической несложной, но громоздкой процедуры

$$\begin{aligned}\xi_3 &= X(\xi^3 \exp(3i\theta) + \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)); \\ X &= \frac{k^2(32\alpha^2 k^2 W^2 + 32\alpha k W(1 - \alpha^2 k^2 W) + 6\alpha^4 k^4 + 21\alpha^2 k^2 + 6)}{32(1 - 2\alpha^2 k^2)(1 - 3\alpha^2 k^2)}; \\ \varphi_3 &= Y_{31} \cdot \xi \bar{\xi} \cdot (i \cdot \xi \exp(i\theta) - i \cdot \bar{\xi} \exp(-i\theta)) \exp(kz) \\ &+ Y_{33}(i\xi^3 \exp(3i\theta) - i\bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)) \exp(3kz); \\ Y_{33} &= -\frac{\alpha k^2 \omega(32\alpha k W^2 - 104\alpha^2 k^2 W - 8W + 78\alpha^3 k^3 + 15\alpha k)}{32(1 - 2\alpha^2 k^2)(1 - 3\alpha^2 k^2)}; \\ Y_{31} &= \frac{gk^2(2\alpha k W(8\alpha k W - 12\alpha^2 k^2 - 9) + 14\alpha^4 k^4 + 25\alpha^2 k^2 + 2)}{32\omega(1 - 2\alpha^2 k^2)}; \\ \Phi_3 &= \Theta_{31} \cdot \xi \bar{\xi} \cdot (\xi \exp(i\theta) + \bar{\xi} \exp(-i\theta)) \exp(-kz) \\ &+ \Theta_{33}(\xi^3 \exp(3i\theta) + \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)) \exp(-3kz); \\ \Theta_{33} &= \frac{E_0 k^2(8\alpha k W(4\alpha k W + 5\alpha^2 k^2 - 7) + 6\alpha^4 k^4 - 33\alpha^2 k^2 + 24)}{32(1 - 2\alpha^2 k^2)(1 - 3\alpha^2 k^2)}; \\ \Theta_{31} &= \frac{E_0 k^2(4\alpha^2 k^2 + 7 - 12\alpha k W)}{16(1 - 2\alpha^2 k^2)}; \\ W &= \frac{E_0^2}{4\pi\rho g\gamma}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}},\end{aligned}$$

α — капиллярная постоянная жидкости; W — параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость плоской однородно заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости [1,2].

Также в решении задачи третьего порядка малости как результат получена следующая зависимость амплитуды волны ξ от временных масштабов T_2 и T_3

$$\xi = \xi_1 \exp(i\beta_0) \exp(i\delta\xi_1^2 T_2);$$

$$\delta = \frac{gk^3(\alpha^2 k^2(1+2\alpha^2 k^2) + 8 - 16\alpha k W(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W))}{16\omega(1 - 2\alpha^2 k^2)}.$$

Здесь ξ_1 и β_0 — функции, зависящие только от T_3 и определяемые из решения задач высших порядков малости.

8. Математическая формулировка задачи четвертого порядка малости имеет вид

$$z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_4 = 0;$$

$$z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_4 = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_4}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} = \Xi_{41};$$

$$-\rho g \xi_4 - \rho \frac{\partial \varphi_4}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x^2} = \Xi_{42};$$

$$\Phi_4 - E_0 \xi_4 = \Xi_{43};$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_4 \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_4 \rightarrow 0.$$

Выражения для функций неоднородностей Ξ_{41} , Ξ_{42} и Ξ_{43} в правых частях граничных условий, определяющихся решениями задач первого, второго и третьего порядка малости, приведены в Приложении В.

Результат решения задачи четвертого порядка малости при принятом начальном условии имеет вид

$$\xi_4 = \varphi_4 = \Phi_4 \equiv 0; \quad \xi_1 = \frac{1}{k}; \quad \beta_0 = 0.$$

Таким образом, в решении всей задачи будут отсутствовать величины четвертого порядка малости.

9. Окончательные выражения для профиля нелинейной волны на однородно заряженной свободной поверхности жидкости, для потенциала поля скоростей и для потенциала электрического поля имеют вид

$$\xi = a \cos(\theta_*) + a^2 \Lambda \cos(2\theta_*) + 2a^3 X \cos 3\theta; \quad (13)$$

$$\varphi = a \frac{\omega}{k} \exp(kz) \sin(\theta_*)$$

$$+ a^2 \frac{\omega \alpha k (3\alpha k - 2W)}{2(1 - 2\alpha^2 k^2)} \exp(2kz) \sin(2\theta_*)$$

$$+ a^3 (-2Y_{31} \exp(kz) \sin \theta - 2Y_{33} \exp(3kz) \sin 3\theta);$$

$$\Phi = -E_0 z + a E_0 \exp(-kz) \cos(\theta_*)$$

$$+ a^2 \frac{E_0 k}{2} \left(1 + \frac{2 - \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W}{1 - 2\alpha^2 k^2} \exp(-2kz) \cos(2\theta_*) \right)$$

$$+ a^3 (2\Theta_{31} \exp(-kz) \cos \theta + 2\Theta_{33} \exp(-3kz) \cos 3\theta);$$

$$\Lambda \equiv \frac{k(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{2(1 - 2\alpha^2 k^2)};$$

$$\theta_* \equiv \theta + \delta a^2 t \equiv kx - \omega t + \delta a^2 t.$$

10. Из приведенного решения и выражения (13) для профиля волны видно, что о существовании стационарного во времени профиля волны конечной амплитуды можно говорить лишь условно. В самом деле, стационарный во времени профиль волны получится, если ограничить расчеты вторым порядком малости. В этом случае нелинейной добавки к частоте не будет и профиль волны определится первыми двумя слагаемыми (13) при $\delta = 0$ (при $\theta_* \equiv \theta$). В расчетах третьего порядка малости нелинейная по амплитуде добавка к частоте появляется в (13) в линейном по a слагаемом, а в квадратичном ее еще не будет. Следует отметить, что в работах по линейным волнам [8,9] нелинейные поправки к частотам, найденные в расчетах третьего порядка малости, включаются во все компоненты выражения, описывающего профиль, от линейной до кубической, что представляется некорректным. В самом деле, если в (13) в квадратичном по малому параметру слагаемом разложить косинус в окрестности θ по степеням малого параметра, то слагаемое, пропорциональное δ , будет иметь минимум четвертый порядок малости, приводить которое в расчетах третьего порядка некорректно. В вышеприведенных расчетах четвертого порядка малости нелинейная поправка к частоте вполне законно появляется в квадратичном слагаемом, но в кубическом по малому параметру слагаемом фигурирует невозмущенный аргумент θ .

Сказанное означает, что в расчетах и третьего, и четвертого порядка малости фазовые скорости различных компонент профиля волны будут различны, что приведет к его деформации со временем. Остается надежда получить стационарный во времени профиль волны в расчетах следующего пятого порядка малости, если в этом приближении, так же как в расчетах четвертого порядка малости, нелинейная добавка к профилю волны окажется равной нулю. Но в этом случае нелинейную добавку к частоте можно будет на законном основании привести в кубической поправке к амплитуде (в третьем слагаемом в (13)).

11. Полученное выражение для профиля нелинейной волны на свободной заряженной поверхности идеальной жидкости в пределе $W \rightarrow 0$ совпадает с известным [8,9] выражением для профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны на незаряженной поверхности идеальной жидкости (с учетом выше сказанного о некорректности включения поправок к частотам в нелинейные по амплитуде слагаемые профиля). Из приведенных выражений видно, что амплитудный коэффициент поправки второго порядка малости Λ резонансно нарастает при $k = k_2 \equiv 1/\alpha\sqrt{2}$. Амплитудный коэффициент поправки третьего порядка малости X имеет уже два резонанса: при $k = k_2$ и при $k = k_3 \equiv 1/\alpha\sqrt{3}$. Как показано в [19], в квадратичном приближении (когда имеется лишь один резонанс при $k = k_2$) при резонансном взаимодействии энергия перекачивается от длинных волн с волновыми числами $k = k_2$ к более коротким с волновыми числами

$k = 2k_2$. Из (13) видно, что аналогичным будет и направление перекачки энергии в окрестности резонанса $k = k_3$: энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами $k = k_3$ к волнам с $k = 3k_3$, но сам эффект будет иметь более высокий порядок малости.

Из (13) также видно, что нелинейная добавка к частоте пропорциональна квадрату амплитуды волны a и отрицательна (в представляющей интерес в смысле исследования устойчивости заряженной поверхности жидкости области значений волновых чисел $k > k_2$), а сам эффект имеет третий порядок малости. Интересно, что нелинейная добавка к частоте, так же как и амплитудные множители Λ и X , имеют резонансный вид. Это означает ограниченную применимость выражения (13) в окрестности волновых чисел $k = k_2$ и $k = k_3$, поскольку как амплитудные множители, так и добавка к частоте должны быть лишь малыми поправками к величинам первого порядка малости.

Учтем теперь, что критические условия реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля определяются условиями прохождения через нуль квадрата частоты виртуальной волны и равенством нулю первой производной от частоты по волновому числу (из последнего условия определяется волновое число капиллярной волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости) [18,20]. При расчетах в линейном приближении критическое значение параметра Тонкса–Френкеля $W = W_*$ и волнового числа $k = k_8$ получаются в виде [18]

$$k_* = \alpha^{-1}; \quad W = k_*\alpha + k_*^{-1}\alpha^{-1} = 2.$$

В рассматриваемой нелинейной ситуации система алгебраических уравнений относительно W и k получается весьма громоздкой, но поскольку нас интересует лишь оценка по порядку величины, представим искомые значения параметра Тонкса–Френкеля и волнового числа в виде разложений по квадрату амплитуды волны в виде

$$W \approx 2 - w\varepsilon^2; \quad k\alpha \approx 1 - \kappa\varepsilon^2.$$

Подставляя такие разложения в систему уравнений для определения критических условий неустойчивости, легко найти $w = 11/8$ и $\kappa = 23/16$.

Таким образом, нелинейный анализ показывает, что критическая для реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой моды снижаются по сравнению с предсказываемыми линейной теорией.

Напомним также, что расчеты в четвертом порядке малости по амплитуде волны показывают, что в нелинейной добавке к частоте отсутствует слагаемое, пропорциональное третьей степени амплитуды. Будет ли отлична от нуля добавка к частоте, пропорциональная четвертой степени амплитуды, можно узнать при расчетах пятого порядка малости. Такие расчеты желательно провести, чтобы выяснить дальнейшие тенденции изменения нелинейных поправок к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости.

12. Дальнейший анализ выражения (13) ограничим первыми двумя слагаемыми, образующими в использованном приближении не изменяющийся во времени профиль волны конечной амплитуды.

Как отмечалось выше, амплитудный коэффициент Λ в слагаемом второго порядка малости имеет резонансный вид: при $k = k_2$ знаменатель выражения для Λ обращается в нуль, а сама добавка стремится к бесконечности. Этот феномен для нелинейных волн на незаряженной поверхности жидкости исследован [8]. В отличие от случая незаряженной поверхности жидкости выражение для Λ в (13) содержит в числителе параметр W , входящий в него с отрицательным знаком и характеризующий устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля собственного заряда. Сказанное означает, что при определенных соотношениях физических параметров Λ может остаться конечным даже при равном нулю знаменателе. Знаменатель Λ обращается в нуль при $k \rightarrow k_2$, но если одновременно устремить $W \rightarrow W_x = (3/2\sqrt{2}) \approx 1.06$, то при таком предельном переходе числитель Λ также будет стремиться к нулю. В итоге при $W = W_x$ в пределе $k \rightarrow k_2$ для величины Λ получается неопределенность типа $0/0$, которая при вычислении по правилу Лопитала дает $\Lambda = 1/8$. Сама зависимость $\Lambda = \Lambda_*(\alpha k)$ становится

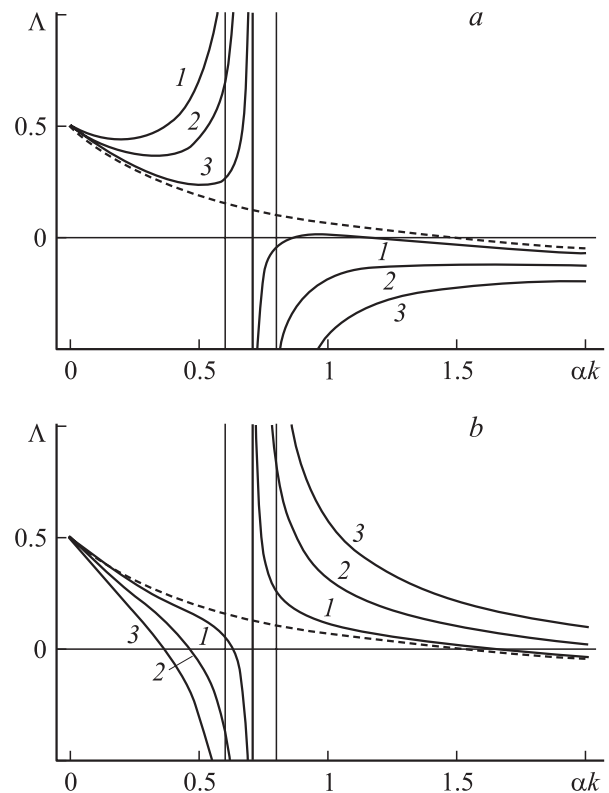


Рис. 1. Зависимости безразмерного амплитудного множителя Λ от безразмерного параметра $\alpha \cdot k$ при различных значениях параметра W : *a* — $W = W_x - 0.05$ (1), $W = W_x - 0.25$ (2), $W = W_x - 0.5$ (3); *b* — $W = W_x + 0.05$ (1), $W = W_x + 0.25$ (2), $W = W_x + 0.5$ (3).

ся непрерывной. Она приведена штриховой кривой на рис. 1, где показаны зависимости безразмерного множителя Λ от безразмерного волнового числа ak при различных значениях W .

Отметим, что независимо от величины W при приближении k к значению k_2 разложение (13) становится непригодным для представления решения, так как величина квадратичной по безразмерной амплитуде a добавки становится значительно больше линейного по a члена разложения. В этой связи интересно оценить влияние вязкости, играющей важную роль в резонансных явлениях. Прделаем это на примере воды.

Согласно результатам работ [21,22], в которых проведено исследование нелинейных волн на незаряженной поверхности вязкой жидкости, для воды влияние вязкости на профиль волны существенно на интервале $ak \in D \equiv (0.6; 0.7)$. На концах этого интервала амплитуда добавки второго порядка малости, оцененная без учета вязкости, оказывается завышенной на несколько процентов своей величины, но при $k \rightarrow k_2$ это завышение становится бесконечным. Вне указанного интервала модели вязкой и невязкой воды дают хорошо согласующиеся результаты. В этой связи нижеследующий анализ проводится для волн, у которых $ak \notin D$. Части зависимостей, которые на рис. 1 попадают внутрь области D , лишены физического смысла, так как они построены в области несовершенства исходной модели, подразумевающей отсутствие вязкости.

Из рис. 1 видно, что физически достоверные части зависимостей $\Lambda = \Lambda(ak)$ в пределе $W \rightarrow W_x$ стремятся к зависимости $\Lambda = -\Lambda_*(ak)$. Значение $W = W_*$ естественно принять за критерий разделения волновых движений. При таком W знак асимптотического значения Λ в пределе $k \rightarrow k_2$ на рассмотренных зависимостях меняется на противоположный. Видно также, что добавка второго порядка малости к линейной части решения стремится к нулю при $W \rightarrow W_x$.

На рис. 1, *a* показано семейство зависимостей $\Lambda = \Lambda(ak)$, построенных при различных значениях $W \leq W_x$. В этой области значений W амплитуда добавки второго порядка малости при изменении волнового числа ведет себя так же, как и для незаряженной поверхности: для волнового движения характерны профили с заостренной вершиной у длинных волн с $k < k_2$ и с притупленной вершиной у коротких волн с $k > k_2$ (см. подробнее в [8,9]).

На рис. 1, *b* приведены зависимости $\Lambda = \Lambda(ak)$, рассчитанные при различных значениях параметра W из диапазона $W_x \leq W \leq 2$. Несложно видеть, что приведенные зависимости в некотором смысле обратны зависимостям на рис. 1, *a*: правые физически достоверные части этих зависимостей, отвечающие коротким волнам, положительны в достаточно протяженной правой окрестности точки $k = k_2$, а не отрицательны, как на рис. 1, *a* (ветвь 1 уходит в область отрицательных значений на достаточно большом расстоянии от $k = k_2$). Поэтому

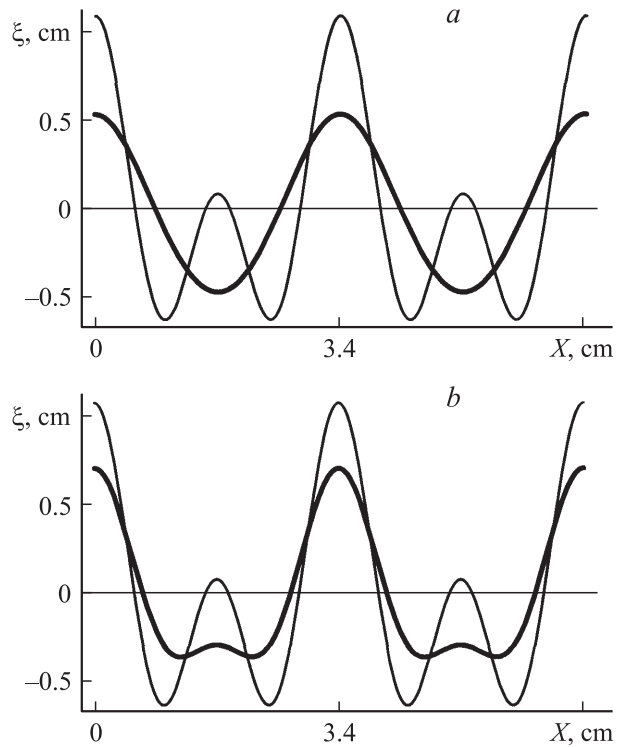


Рис. 2. Профили волн на поверхности воды при $W = 0$ (тонкая кривая), 1.2 (жирная), рассчитанные при различных значениях параметра $\alpha \cdot k$: *a* — 0.5, *b* — 0.9.

нелинейные волны, соответствующие этим зависимостям, естественно интерпретировать как новый, ранее неизвестный тип периодического волнового движения на поверхности идеальной жидкости, появление которого связано с наличием поверхностного заряда. Профили таких волн приведены на рис. 2 в сравнении с профилями волн на незаряженной поверхности жидкости. Несложно видеть, что профили капиллярно-гравитационных волн на заряженной и незаряженной поверхности жидкости различаются существенным образом. Обнаруженные волны на заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости уместно назвать электрокапиллярно-гравитационными, или просто электрокапиллярными, пренебрегая слабым в рассматриваемом диапазоне волновых чисел влиянием поля сил тяжести.

Заключение

При решении задачи о расчете профиля бегущей периодической капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной идеально несжимаемой электропроводной жидкости выяснилось, что в асимптотических расчетах более высокого порядка малости, чем второй, получающиеся профили волн не являются стационарными, а расплываются из-за того, что фазовые скорости поправок различных порядков малости к профилю волны различны.

Нелинейная, зависящая от квадрата амплитуды поправка к частоте волны появляется в расчетах третьего порядка малости, имеет резонансный вид и приводит к возникновению нелинейных поправок к критическим условиям реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Критическая для реализации неустойчивости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой волны снижаются в использованном в расчетах четвертом порядке малости пропорционально квадрату амплитуды волны.

Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости качественно отличаются от нелинейного волнового движения на незаряженной поверхности. Кривизна вершин электрокапиллярных волн увеличивается с ростом поверхностной плотности заряда (с ростом параметра W) при $W_x \ll W \rightarrow 2$. При $W \rightarrow W_x$ электрический заряд оказывается фактором, уменьшающим эффективность нелинейного взаимодействия, поскольку при этом добавка второго порядка малости стремится к нулю.

Приложение А

$$\begin{aligned} \Omega_{31} &\equiv \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial T_1} \\ &\quad - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \\ \Omega_{32} &\equiv \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} + \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_1} \\ &\quad + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial T_0} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_0} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial T_0} \\ &\quad + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ &\quad + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{E_0}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z}; \\ \Omega_{33} &\equiv -\xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения решения задач первого и второго порядков малости, получим

$$\begin{aligned} \Omega_{31} &\equiv - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial T_2} + \Psi_{31} \xi^2 \bar{\xi} \right) \exp(i\theta) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial T_2} - \Psi_{31} \xi \bar{\xi}^2 \right) \\ &\quad \times \exp(-i\theta) + \Psi_{33} \xi^3 \exp(3i\theta) + \Psi_{33} \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta); \\ \Psi_{31} &= \frac{ik^2 \omega (\pi (8k^2 \gamma + 5g\rho) - 3E_0^2 k)}{16\pi (\rho g - 2\gamma k^2)}; \end{aligned}$$

$$\Psi_{32} = \frac{k(2\pi(k^2 \gamma + g\rho) - E_0^2 k)}{4\pi(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$\Psi_{33} = \frac{9ik^2 \omega (\pi (4k^2 \gamma + g\rho) - E_0^2 k)}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$\begin{aligned} \Omega_{32} &\equiv -K_{33} (\xi^3 \exp(3i\theta) + \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta)) \\ &\quad - \left(\frac{i\rho \omega}{2k} \frac{\partial \xi}{\partial T_2} + K_{31} \xi^2 \bar{\xi} \right) \exp(i\theta) \\ &\quad + \left(\frac{i\rho \omega}{2k} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial T_2} - K_{31} \xi \bar{\xi}^2 \right) \exp(-i\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{31} &= \frac{k^2}{32\pi^2(\rho g - 2\gamma k^2)} (E_0^4 k^2 - 4\pi E_0^2 \gamma k^3 + 12\pi^2 \gamma^2 k^4 \\ &\quad - 4\pi E_0^2 k g \rho + 24\pi^2 \gamma k^2 g \rho - 6\pi^2 g^2 \rho^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{33} &= \frac{k^2}{32\pi^2(\rho g - 2\gamma k^2)} (5E_0^4 k^2 - 20\pi E_0^2 \gamma k^3 + 60\pi^2 \gamma^2 k^4 \\ &\quad - 20\pi E_0^2 k g \rho + 48\pi^2 \gamma k^2 g \rho + 6\pi^2 g^2 \rho^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{33} &\equiv M_{31} \xi^2 \bar{\xi} \exp(i\theta) + M_{31} \xi \bar{\xi}^2 \exp(-i\theta) \\ &\quad + M_{33} \xi^3 \exp(3i\theta) + M_{33} \bar{\xi}^3 \exp(-3i\theta); \end{aligned}$$

$$M_{31} = \frac{E_0 k^2 (\pi (4k^2 \gamma + 7g\rho) - 3E_0^2 k)}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$M_{33} = \frac{3E_0 k^2 (3\pi g \rho) - E_0^2 k}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

Приложение В

Функции неоднородностей в правых частях граничных условий на свободной поверхности жидкости при $z = 0$ задачи четвертого порядка малости имеют вид

$$\begin{aligned} \Xi_{41} &= \xi_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} \\ &\quad + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^3} + \frac{1}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z^4} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_3} - \frac{\partial \xi_2}{\partial T_2} - \frac{\partial \xi_3}{\partial T_1} \\ &\quad - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \\ &\quad - \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{42} = & 3\gamma \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_3} + \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_2} \\ & + \rho \frac{\partial \varphi_3}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1} \\ & + \rho \xi_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_0} + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_0} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z \partial T_0} \\ & + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z^2} \right)^2 + \rho \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} \\ & + \frac{\rho}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \\ & + \rho \xi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right)^2 \\ & + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 \\ & + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \rho \xi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \\ & + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2} \\ & - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\ & - \frac{1}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\ & - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{E_0}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} \\ & + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} \\ & + \frac{E_0}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^3} + \frac{E_0}{24\pi} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial z^4} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} \\ & - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 \\ & - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial z^2}; \\ \Xi_{43} = & - \xi_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \xi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \xi_1 \xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \\ & - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда решения первого и второго порядков, получим

$$\begin{aligned} \Xi_{41} = & A_{410} - \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial T_3} \exp(i\theta) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial T_3} \exp(-i\theta) \\ & + A_{412} \exp(2i\theta) + \overline{A_{412}} \exp(-2i\theta) + A_{413} \exp(3i\theta) \\ & + \overline{A_{413}} \exp(-3i\theta) + A_{414} \exp(4i\theta) + \overline{A_{414}} \exp(-4i\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{42} = & A_{420} - \frac{i\rho\omega}{2k} \frac{\partial \xi}{\partial T_3} \exp(i\theta) - \frac{i\rho\omega}{2k} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial T_3} \exp(-i\theta) \\ & + A_{422} \exp(2i\theta) + \overline{A_{422}} \exp(-2i\theta) + A_{423} \exp(3i\theta) \\ & + \overline{A_{423}} \exp(-3i\theta) + A_{424} \exp(4i\theta) + \overline{A_{424}} \exp(-4i\theta); \\ \Xi_{43} = & A_{430} + A_{432} \exp(2i\theta) + \overline{A_{432}} \exp(-2i\theta) \\ & + A_{433} \exp(3i\theta) + \overline{A_{433}} \exp(-3i\theta) \\ & + A_{434} \exp(4i\theta) + \overline{A_{434}} \exp(-4i\theta), \end{aligned}$$

где $A_{410}, A_{412}, A_{413}, A_{414}, A_{420}, A_{422}, A_{423}, A_{424}, A_{430}, A_{432}, A_{433}, A_{434}$ — некоторые функции временных масштабов T_1, T_2, T_3 .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760) и Президента РФ (грант № МК-929.2003.01).

Список литературы

- [1] Грабович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Taylor G.I., McEwan A.D. // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. N 1. P. 1–15.
- [4] Pregenzer A.L., Marder B.M. // J. Appl. Phys. 1986. Vol. 60. P. 3821–3824.
- [5] Schooley A.H. // J. Geophys. Res. 1960. Vol. 65. N 12. P. 4075–4079.
- [6] Michell J.H. // Phil. Mag. S. 5. 1893. Vol. 36. N 22. P. 430–437.
- [7] Wilton J.R. // Phil. Mag. S. 6. 1915. Vol. 29. N 173. P. 688–700.
- [8] Nayfeh A.H. // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 3. P. 545–550.
- [9] Nayfeh A.H., Hassan S.D. // J. Fluid Mech. Pt 3. 1971. Vol. 48. P. 463–475.
- [10] Shugan I., Voliak K. // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 368. P. 321–338.
- [11] Жакин А.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
- [12] Gonzales A., Castellanos A. // Phys. Rev. 1994. Vol. 49. N 4. P. 2935–2940.
- [13] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 6(12). С. 1990–2005.
- [14] Зубарев Н.М., Зубарева О.В. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 21–29.
- [15] Стокер Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
- [16] Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [17] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [18] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [19] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
- [20] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Морозов В.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 21–27.
- [21] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ПЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
- [22] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 28–37.