

01;04

Динамика сгустка заряженных частиц в ловушке Пеннинга

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 5 мая 2003 г.)

Получено решение лагранжевых уравнений газодинамики для шарообразного сгустка заряженных частиц в ловушке Пеннинга. Это решение описывает пульсации неоднородного сгустка частиц, движение центра которого во вращающейся с ларморовской частотой системе координат представляет собой колебания пространственного осциллятора.

Введение

Построение аналитических решений уравнений газодинамики является одним из методов изучения свойств нелинейных систем [1]. Конкретным примером ограниченного в пространстве распределения заряженных частиц, для которого можно получить нестационарное решение самосогласованной задачи, является сгусток частиц в ловушке Пеннинга.

Используемая в ловушке Пеннинга конфигурация внешнего поля состоит из однородного магнитного поля $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_3$ и неоднородного электрического поля, потенциал которого в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Phi_0 = \kappa(2z^2 - \rho^2).$$

Такое электрическое поле может быть создано с помощью гиперболических электродов: двумя поверхностями $2z^2 = \rho^2 + 2d^2$ с потенциалом Φ и поверхностью $\rho^2 = 2z^2 + 2d^2$ с потенциалом $-\Phi$; при этом $\kappa = \Phi/2d^2$.

Точное решение уравнений газодинамики для однородного шарообразного сгустка частиц в ловушке Пеннинга было получено ранее в работе [2]. Целью данной работы является построение нестационарного решения самосогласованной задачи для холодного газа заряженных частиц

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla) \right] \mathbf{V} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ext} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{B}]), \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n\text{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\text{grad}n = 0, \quad \text{div}\mathbf{E} = 4\pi en \quad (2)$$

в виде шарообразного неоднородного сгустка частиц в ловушке Пеннинга. Здесь e, m — заряд и масса частицы; n, \mathbf{V} — плотность и скорость газа; $\mathbf{E}_{ext} = -\nabla\Phi_0$, \mathbf{E} — напряженность собственного электрического поля сгустка.

Движение центра сгустка

Для описания движения центра сгустка будем использовать вектор $\mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i$, где \mathbf{e}_i — орты системы координат. Перейдем в уравнениях (1), (2) к переменной $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t)$, полагая $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)$. Внешнее поле линейно зависит от координат, поэтому $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{s})$.

В результате для движения газа относительно центра сгустка получим следующие уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \right) \mathbf{U} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{s}) + \frac{1}{c}[\mathbf{U}\mathbf{B}]), \quad (3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n\text{div}\mathbf{U} + \mathbf{U} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{s}} = 0, \quad \text{div}\mathbf{E} = 4\pi en. \quad (4)$$

Динамика центра сгустка определяется, как и следовало ожидать, уравнениями движения одиночной частицы в ловушке Пеннинга

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{2}\omega^2 x_1 + 2\Omega\dot{x}_2, & \ddot{x}_2 &= \frac{1}{2}\omega^2 x_2 - 2\Omega\dot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 &= -\omega^2 x_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены обозначения $\omega^2 = 4e\kappa/m$, $\Omega = eB/2mc$.

Решение гамильтоновых уравнений движения заряженной частицы в ловушке Пеннинга получено в [3].

Как будет видно из дальнейшего, самосогласованное решение для неоднородного сгустка можно получить только при определенном соотношении между градиентом внешнего электрического поля и величиной магнитного поля $\kappa = m\Omega^2/6e$. В этом случае наряду с исходной системой координат удобно рассматривать другую систему координат, орты \mathbf{n}_i которой имеют вид

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \Omega t - \mathbf{e}_2 \sin \Omega t,$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_2 \cos \Omega t + \mathbf{e}_1 \sin \Omega t, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3,$$

т. е. новая система координат вращается с угловой частотой $-\Omega$ относительно исходной системы координат. Использование вращающейся системы координат позволяет получить наглядное представление о характере движения центра сгустка.

Для описания движения центра сгустка во вращающейся системе координат будем использовать вектор $\mathbf{X} = X_j\mathbf{n}_j$. Начальные условия в этой системе координат определяются исходными начальными условиями x_{i0} и \dot{x}_{i0} для центра сгустка

$$X_{j0} = x_{j0}, \quad \dot{X}_{10} = \dot{x}_{10} - \Omega x_{20},$$

$$\dot{X}_{20} = \dot{x}_{20} + \Omega x_{10}, \quad \dot{X}_{30} = \dot{x}_{30}.$$

Подставляя в уравнения (5) $x_i = X_j \mathbf{n}_j \mathbf{e}_i$, получим, что в новой системе координат движение центра сгустка представляет собой колебания пространственного осциллятора $\ddot{X}_j = -\omega^2 X_j$, т.е.

$$X_j = X_{j0} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{X}_{j0} \sin \omega t.$$

В итоге для закона движения центра сгустка в исходной системе координат найдем

$$x_1 = X_1 \cos \Omega t + X_2 \sin \Omega t,$$

$$x_2 = X_2 \cos \Omega t - X_1 \sin \Omega t, \quad x_3 = X_3.$$

Как известно, в зависимости от начальных условий траектория движения пространственного осциллятора представляет собой окружность, эллипс или отрезок прямой, причем центр траектории совпадает с центром поля [4]. В данном случае во вращающейся системе координат траектория центра сгустка расположена в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{L} = m[\mathbf{X}_0 \dot{\mathbf{X}}_0]$, и является окружностью при $E_0 = \omega L$, а эллипсом — при $E_0 > \omega L$. Полуоси эллипса a , b определяются следующими выражениями

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E_0}{m}(1+D)}, \quad b = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E_0}{m}(1-D)},$$

$$D = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega L}{E_0}\right)^2}.$$

Здесь $E_0 = m(\dot{\mathbf{X}}_0^2 + \omega^2 \mathbf{X}_0^2)/2$, а также введены обозначения $\mathbf{X}_0 = X_{i0} \mathbf{n}_i$, $\dot{\mathbf{X}}_0 = \dot{X}_{i0} \mathbf{n}_i$.

Учитывая, что $X^2 \dot{X}^2 = \omega^2(a^2 - X^2)(X^2 - b^2)$, нетрудно убедиться в том, что во вращающейся системе координат наряду с вектором $\mathbf{L} = m[\mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}]$ интегралом движения является вектор

$$\mathbf{N}_a = \sqrt{a^2 - X^2}[\mathbf{X}\mathbf{L}] - \frac{X\dot{X}[\dot{\mathbf{X}}\mathbf{L}]}{\omega^2 \sqrt{a^2 - X^2}}.$$

Если центр сгустка находится на оси симметрии эллипса, соответствующей полуоси a , то вектор $[\dot{\mathbf{X}}\mathbf{L}]$ будет коллинеарен вектору \mathbf{X} (так как в этой точке вектор $\dot{\mathbf{X}}$ перпендикулярен вектору \mathbf{X}). Поэтому вектор \mathbf{N}_a направлен, как и вектор Лапласа в задаче Кеплера, вдоль большой оси симметрии эллипса.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что другой сохраняющийся во вращающейся системе координат вектор

$$\mathbf{N}_b = \sqrt{X^2 - b^2}[\mathbf{X}\mathbf{L}] + \frac{X\dot{X}[\dot{\mathbf{X}}\mathbf{L}]}{\omega^2 \sqrt{X^2 - b^2}}$$

направлен вдоль малой оси симметрии эллипса.

Если же начальные условия для центра сгустка заданы таким образом, что векторы \mathbf{X}_0 и $\dot{\mathbf{X}}_0$ коллинеарны или один из них равен нулю, то во вращающейся системе координат траектория центра сгустка будет отрезком прямой.

Решение уравнений газодинамики

Вместо декартовых координат $s_i = s \mathbf{e}_i$ будем использовать сферическую систему координат s , η , ψ . Запишем лагранжевы уравнения движения газа в этой системе координат

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - \left[\frac{1}{s}(u_\eta^2 + u_\psi^2) \right] = \frac{e}{m} [E + 2\kappa s(1 - 3 \cos^2 \eta)] + 2\Omega u_\psi \sin \eta,$$

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \frac{1}{s}(u_s u_\eta - u_\psi^2 \operatorname{ctg} \eta) = 2\Omega u_\psi \cos \eta + 3\kappa s \frac{e}{m} \sin 2\eta,$$

$$\frac{\partial u_\psi}{\partial t} + \frac{1}{s}(u_s u_\psi + u_\eta u_\psi \operatorname{ctg} \eta) = -2\Omega(u_s \sin \eta + u_\eta \cos \eta).$$

Здесь u_s , u_η , u_ψ — составляющие вектора скорости элемента газа. Как нетрудно видеть, если $\kappa = m\Omega^2/6e$, то возможные решения двух последних уравнений имеют вид $u_\eta = 0$, $u_\psi = -s\Omega \sin \eta$, а первое уравнение при этом существенно упрощается

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{e}{m} E - \omega^2 s. \quad (6)$$

Таким образом, при указанных условиях элемент газа, как и центр сгустка, вращается с ларморовской частотой, а также испытывает радиальные колебания. Если элементы газа, находящиеся на одном и том же расстоянии от центра сгустка, имеют одинаковые значения начальной скорости, то элементы движутся одинаково. Поэтому в том случае, когда радиальные начальные условия для газа заданы в виде, сферически симметричном относительно центра сгустка, можно перейти к рассмотрению пульсаций сферического слоя газа во вращающемся как целое и совершающем как целое трансляционное движение сгустке. Тогда переменная Лагранжа s соответствует радиусу слоя. Эта переменная является функцией t и начального положения слоя s_0 : $s = s(t, s_0)$.

В итоге рассматриваемая задача сводится к расчету радиального движения холодного газа заряженных частиц в совокупности внешнего и коллективного полей. Метод решения такой задачи при условии перемещения слоев частиц в радиальном направлении друг за другом, без обгонов указан в работе [5].

С помощью указанного метода для плотности частиц найдем

$$n(t, s_0) = n_0 \frac{s_0^2 \omega(s_0)}{s^2 R(t, s_0)}; \quad R(t, s_0) = \frac{\partial s(t, s_0)}{\partial s_0}, \quad (7)$$

где функции $s(t, s_0)$ и $R(t, s_0)$ являются решениями уравнений (для краткости производная по времени обо-

значается точкой)

$$\dot{s} = \frac{\omega_0^2}{s^2} W(s_0) - \omega^2 s, \quad (8)$$

$$\ddot{R} = \omega_0^2 \omega(s_0) \frac{s_0^2}{s^2} - \left[\omega^2 + 2W(s_0) \frac{\omega_0^2}{s^3} \right] R. \quad (9)$$

Начальные условия для уравнений (8), (9) имеют вид

$$s(0, s_0) = s_0, \quad \dot{s}(0, s_0) = v(s_0),$$

$$R(0, s_0) = 1, \quad \dot{R}(0, s_0) = \frac{dv(s_0)}{ds_0}.$$

Здесь функции $v(s)$, $\omega(s)$ определяются начальными распределениями плотности частиц и скорости газа относительно центра сгустка $n(s, 0) = n_0 w(s)$, $U(s, 0) = v(s)$, а также введены обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}, \quad W(s_0) = \int_0^{s_0} w(x) x^2 dx.$$

Для однородного сгустка $w(s) = H(1 - s/q)$, где $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, q — начальный радиус сгустка. Если при этом начальная скорость пропорциональна расстоянию от центра симметрии $v(s) = ks$, k — постоянная, то $s(t, s_0) = s_0 R(t)$ и для расчета пульсаций однородного сгустка нужно решить одно дифференциальное уравнение для функции R

$$3\ddot{R} + 2\Omega^2 R - \frac{\omega_0^2}{R^2} = 0 \quad (10)$$

с начальными условиями $R_0 = 1$, $\dot{R}_0 = k$.

Для газодинамических характеристик однородного сгустка при $s_0 \leq q$ получим

$$n = \frac{n_0}{R^3}, \quad u_s = s_0 \dot{R},$$

$$u_\eta = 0, \quad u_\psi = -\Omega s_0 R \sin \eta. \quad (11)$$

В этом случае функция R характеризует зависимость радиуса сгустка от времени $s(t, q) = qR(t)$.

Примеры численных расчетов

Газодинамические характеристики неоднородного сгустка можно вычислить, изменяя с небольшим шагом s_0 и решая на каждом шаге уравнения (8), (9). В частности, на рис. 1 приведены результаты подобных численных расчетов распределения плотности частиц в сгустке для $\tau = 0.5$ (кривая 2), 1 (кривая 3) и 1.11 (кривая 4). Здесь $\tau = \Omega t$, а кривая 1 соответствует начальному распределению плотности частиц

$$w(s) = \begin{cases} [1 - (s/q)^2]/6, & s \leq q, \\ 0, & s > q. \end{cases} \quad (12)$$

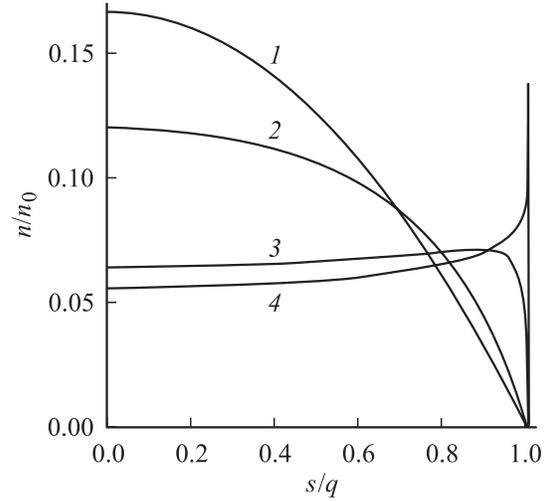


Рис. 1. Формирование пика плотности частиц.

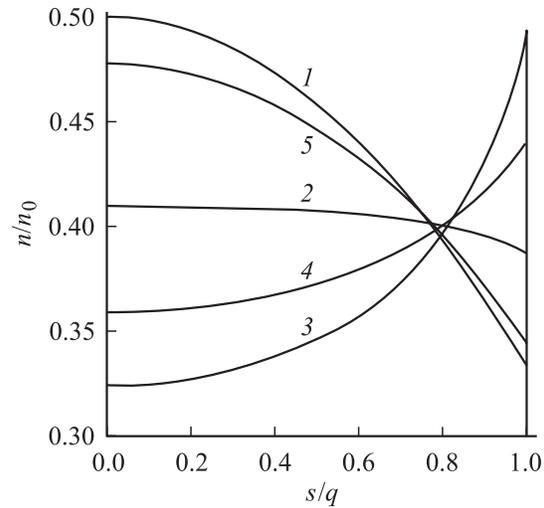


Рис. 2. Колебания плотности частиц.

Расчеты проводились при $v(s) = 0$, $\omega_0^2 = 30\Omega^2$. Отметим, что последнее условие, как следует из уравнения (8), соответствует балансу сил пространственного заряда и внешнего поля для поверхностного слоя газа.

Формирование пика плотности частиц отражает возможность нарушения при пульсациях сгустка исходного предположения о движении слоев частиц без обгонов. Возникновение обгона выражается в выполнении в некоторый момент времени $t = t_k$ условия $R(t_k, s_0) = 0$ для какого-нибудь слоя, вследствие чего плотность частиц в момент обгона стремится к бесконечности (так называемые градиентные катастрофы [1,6]). В этом случае решение уравнений (8), (9) позволяет определить изменение газодинамических характеристик неоднородного сгустка лишь до момента времени t_k , для которого получается следующая оценка: $1.137 < \tau_k < 1.138$.

Как видно из выражений (10), (11), проблема обгонов не возникает в случае однородного распределения плот-

ности частиц и скорости газа, пропорциональной расстоянию до центра сгустка. Поэтому можно предположить, что при соответствующем изменении начального распределения (12) область применимости полученных результатов будет иной.

На рис. 2 представлены результаты расчетов плотности частиц для

$$w(s) = \begin{cases} 1/2 - (s/q)^2/6, & s \leq q, \\ 0, & s > q. \end{cases}$$

В этом случае баланс сил пространственного заряда и внешнего поля для поверхностного слоя газа будет при $\omega_0^2 = 5\Omega^2$. Здесь кривая 1 соответствует начальному распределению плотности частиц, а кривые 2–5 — соответственно профилям плотности частиц при $\tau = 1, 2, 3$ и 4. Хотя здесь тоже образуется пик плотности частиц, но он имеет конечную высоту, т. е. движение газа происходит без обгонов.

Список литературы

- [1] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Наука, Физматлит, 1997.
- [2] Наумов Н.Д. // Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 11. С. 1406–1408.
- [3] Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1985.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973.
- [5] Наумов Н.Д. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 6. С. 84–87.
- [6] Быков В.П., Герасимов А.В., Турин В.О. // УФН. 1995. № 8. С. 955–966.