

Фрактальная модель переноса: малоугловое приближение

© В.В. Учайкин, Д.А. Коробко

Ульяновский государственный университет,
432970 Ульяновск, Россия
e-mail: uchaikin@sv.uven.ru

(Поступило в Редакцию 30 октября 2003 г.)

Рассматривается задача о многократном рассеянии частиц стохастическим фракталом — совокупностью точечных мишеней (атомов), хаотически распределенных в пространстве с корреляционной функцией степенного типа. В малоугловом приближении найдены энергетическое и угловое распределения, обобщающие известные результаты Ферми, Ландау и Мольер. Аналитические результаты сопровождаются численными расчетами методом Монте-Карло.

Введение

Во многих случаях основным источником информации о структуре исследуемого вещества являются электромагнитные и корпускулярные излучения. Для расшифровки этой информации необходим учет процессов взаимодействия излучения с веществом (угловое отклонение при рассеянии, потери энергии при неупругих взаимодействиях и т.д.). Важнейшим фактором, определяющим специфику взаимодействия с фрактальной средой, являются далекие корреляции степенного типа, проявляющиеся в скучивании атомов в скопления и сверхскопления, подобные распределению галактик во Вселенной [1,2]. Корреляции такого типа проявляются при некоторых условиях и в конденсированных средах, систематическое исследование которых привело к возникновению научного направления — фрактального материаловедения [3]. Однократное рассеяние на фракталах рассматривалось в работах [4,5], многократное — в [6], где фрактальным предполагалось распределение пор в изначально однородной среде.

Данная работа посвящена многократному рассеянию частиц на точечных центрах („атомах“), распределение которых характеризуется корреляциями фрактального типа. Как и в [6], задача решается в малоугловом приближении, справедливом как для частиц высоких энергий, так и для волн в случае отсутствия интерференционных эффектов (длина волны λ много меньше характерных расстояний между центрами) [7]. Наши предварительные результаты в этом направлении сообщались в работах [8–15], в настоящей работе приводятся результаты дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Общая формулировка задачи о многократном рассеянии частиц в приближении малых углов выглядит следующим образом. Обозначим через $X(t)$ случайную величину, характеризующую частицу на глубине t и

удовлетворяющую условиям: 1) в начале координат $X(0) = 0$; 2) в промежутках между точками столкновений $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < t$ величина $X(t)$ сохраняет свое значение, дискретно изменяясь только при рассеяниях на случайную величину X_i , т.е. $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$; 3) изменения (скачки) X_i в точках столкновений случайны, независимы и распределены с одинаковой плотностью $\sigma(x)$.

Распределение $X(N)$ для частицы, испытавшей N рассеяний, дается многократной сверткой распределений $\sigma(x)$

$$\sigma^{(N)}(x) = \int \sigma^{(N-1)}(x - \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $\sigma^{(1)}(x) = \sigma(x)$.

Удобно распространить эту формулу и на случай $N = 0$, положив $\sigma^{(0)}(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ — δ -функция Дирака. Распределение по x частиц, прошедших путь t , запишется в виде

$$\Psi(x, t) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N; t) \sigma^{(N)}(x), \quad (2)$$

где $p(N; t)$ — вероятность того, что на пути t частица испытывает ровно N рассеяний.

Эта вероятность и характеризует среду. Она связана с плотностью распределения длины свободного пробега $q(t)$ соотношением

$$p(N; t) = \int_0^t Q(t - t') q^{(N)}(t') dt', \quad (3)$$

где

$$Q(t) = \int_t^{\infty} q(t') dt'$$

— вероятность того, что случайный пробег превысит значение t , $q^{(N)}(t)$ — многократная свертка плотностей $q(t)$, описывающая распределение координаты точки N -го столкновения.

В качестве случайной величины X (случайного m -мерного вектора) могут выступать как потери энергии ϵ ($m = 1$), так и отклонение частицы от первоначального направления, в малоугловом приближении описываемое двумерным вектором θ ($m = 2$) (см., например, [16]). Для решения поставленной задачи надо уметь находить многократные свертки $q^{(N)}(t)$ распределений, отражающих пространственное распределение атомов, и свертки $\sigma^{(N)}(x)$ распределений, характеризующих взаимодействие движущихся частиц с атомами среды.

2. Самоусреднение в регулярной среде

В случае регулярной среды рассеивающие центры (атомы) предполагаются расположенными независимо друг от друга с постоянной (в случае однородной среды) средней плотностью. Распределение свободного пробега в этом случае имеет вид

$$q_0(t) = \mu \exp(-\mu t), \quad (4)$$

где μ — линейный коэффициент рассеяния, обратный среднему пробегу.

Распределение вероятности того, что на пути t частица совершит N столкновений записывается в этом случае как

$$p(N; t) = \frac{(\mu t)^N}{N!} \exp(-\mu t),$$

а распределение (2) становится обобщенным распределением Пуассона [17]

$$\Psi_0(x, t) = \exp(-\mu t) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^N}{N!} \sigma^{(N)}(x). \quad (5)$$

При $t \rightarrow \infty$ среднее значение случайного числа слагаемых растет как μt , а его относительные флуктуации убывают как $(\mu t)^{-1/2}$, так что

$$\Psi_0(x, t) \cong \sigma^{(n(t))}(x), \quad t \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $n(t)$ — целая часть величины μt .

Переход от (5) к (6) означает, согласно терминологии работы [18], наличие свойства самоусредняемости: случайно-неоднородная в малых масштабах среда в больших масштабах представляется детерминированной однородной. На теоретиковероятностном языке этот факт находит отражение в законе больших чисел, справедливом при условии существования математического ожидания у распределения $q(t)$. Это в свою очередь означает, что результат (6) останется справедливым для любого распределения с конечным средним значением

$$\int_0^{\infty} q(t) t dt = 1/\mu < \infty.$$

3. Случайные пробеги во фрактальной среде

Статистические свойства точечных фрактальных моделей подробно исследованы в работах [15, 19–22]. В [15] показано, что при движении частицы вдоль прямой с фрактальным множеством атомов распределение длины ее свободного пробега имеет асимптотический степенной хвост с показателем $\alpha < 1$. Для построения теории прохождения излучения через фрактал, расположенный в трехмерном пространстве, необходимо найти соответствующее распределение пробегов и ответить на вопрос, можно ли считать последовательные случайные пробеги взаимно независимыми.

Для ответа на этот вопрос методом случайных блужданий Леви–Мандельброта моделировались реализации стохастического фрактала заданной размерности [19–22]. Вокруг каждой из точек описывалась сфера малого радиуса. Из центра одной из них строился луч в произвольном направлении, на котором определялись положения первой и второй пересекаемых ими сфер. Расстояние от начала луча до первой сферы интерпретировалось как первый пробег, расстояние между первой и второй — как второй пробег. Результаты этого моделирования, представленные на рис. 1, подтверждают гипотезу о приближенной независимости последовательных пробегов (по крайней мере в малоугловом приближении) и степенном характере их плотности

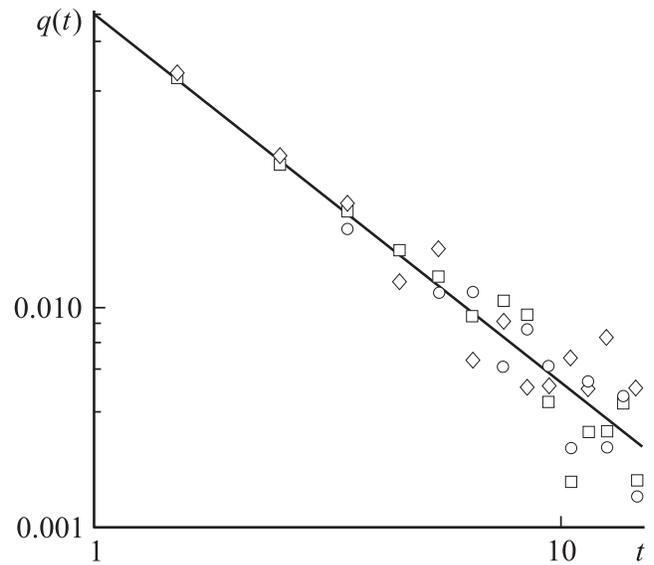


Рис. 1. Результаты моделирования распределения пробегов во фрактальной среде $D = 1.5$. Сплошная кривая — распределение длины первого пробега $q(t) \sim t^{-\alpha-1}$, $\alpha = 0.65$. Значки — распределение длины второго пробега при различных значениях первого: \circ — первый пробег $l < l_\mu$ (l_μ — медианный пробег, $P\{l < l_\mu\} = 1/2$), \square — $l_\mu < l < 2l_\mu$, \diamond — $2l_\mu < l < 3l_\mu$.

распределения

$$q(t) \propto t^{-\alpha-1}. \quad (7)$$

Показатель степени α определяется размерностью точечной фрактальной структуры.

4. Мезоскопический эффект

При $\alpha < 1$ среднее значение пробега, распределенного с плотностью (7), бесконечно. В этом случае необходимо использовать предельную теорему в ее обобщенном варианте, приводящем к устойчивым распределениям [23,24], которые играют ту же роль в суммировании независимых случайных величин с бесконечными дисперсиями, что и обычный гауссов закон в случае конечных дисперсий. В частности, если плотности распределений независимых случайных величин T_i имеют степенные хвосты $q(t) \cong \alpha B t^{-\alpha-1}$, то нормированная сумма

$$S_N = \sum_{i=1}^N T_i / [NB\Gamma(1-\alpha)]^{1/\alpha}$$

при больших N распределена с односторонней устойчивой плотностью $g^{(\alpha)}(t)$. Другими словами, плотность распределения $q^{(N)}(t)$ суммы $\sum_{i=1}^N T_i$ в асимптотике больших N имеет вид

$$q^{(N)}(t) \sim [NB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} \times g^{(\alpha)}\left([NB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} t\right). \quad (8)$$

Используя обобщенную предельную теорему, можно найти распределение вероятности того, что на пути t частица совершит N столкновений

$$p(N;t) \cong G^{(\alpha)}\left([NB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} t\right) - G^{(\alpha)}\left([(N+1)B\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} t\right),$$

где

$$G^{(\alpha)}(t) = \int_0^t g^{(\alpha)}(t') dt'$$

— устойчивая функция распределения.

После несложных преобразований получаем

$$p(N;t) \cong \frac{t}{\alpha N} [NB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} g^{(\alpha)} \times \left([NB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} t\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Используя известное выражение для моментов отрицательных порядков распределения $g^{(\alpha)}(t)$ [23]

$$\int_0^\infty g^{(\alpha)}(t) t^{-\nu} dt = \frac{\Gamma(1+\nu/\alpha)}{\Gamma(1+\nu)}, \quad \alpha < 1, \quad (10)$$

найдем моменты случайного числа столкновений в интервале $(0, t)$

$$\langle N^k(t) \rangle = \frac{k! t^{k\alpha}}{[B\Gamma(1-\alpha)]^k \Gamma(1+k\alpha)}, \quad \alpha < 1.$$

Нетрудно видеть, что среднее значение $\langle N(t) \rangle \propto t^\alpha$, а моменты и, стало быть, само распределение нормированной случайной величины $Z = N/\langle N(t) \rangle$ не зависят от толщины слоя t . Вследствие этих свойств, характеризующих самоподобие стохастического фрактала, ни при какой толщине нельзя пренебречь флуктуациями среды: самоусредняемость не имеет места. Такая ситуация в работе [25] названа мезоскопическим эффектом.

5. Обобщение результатов теории переноса

В данном разделе мы обобщим известные результаты теории переноса для сред с фрактальным распределением рассеивающих центров. Используя (9) и переходя в выражении (2) от суммирования по N к интегрированию по переменной $\tau = [NB\Gamma(1-\alpha)]^{-1/\alpha} t$, приходим к распределению

$$\Psi(x, t) = \int_0^\infty d\tau g^{(\alpha)}(\tau) \sigma^{n(\tau)}(x), \quad \alpha < 1, \quad (11)$$

где $n(\tau)$ — целая часть выражения $(t/\tau)^\alpha / [B\Gamma(1-\alpha)]$.

Сравнивая с (6), отмечаем изменение предельной формы распределения для пробега с бесконечным средним значением. При $\alpha \rightarrow 1$ односторонняя устойчивая плотность $g^{(\alpha)}(\tau) \rightarrow \delta(\tau - 1)$ и распределение (11) переходит в (6), характеризующее самоусредняемую среду. Если средний квадрат X_i конечен

$$\langle X_i^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 \sigma(x) dx < \infty,$$

распределение $\sigma^{(N)}(x)$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к нормальному гауссовому распределению (двумерному для углового распределения и одномерному для распределения потерь энергии)

$$\sigma^{(N)}(x) \cong \frac{1}{(2\pi ND)^{m/2}} \times \exp\left(-\frac{(x - N\langle X \rangle t)^2}{2ND}\right); \quad t \rightarrow \infty; \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

$$D = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2.$$

Во фрактальном случае ($\alpha < 1$) для распределения по углу отклонения θ получаем

$$\Psi(\theta, t) = \frac{\psi^{(\alpha)}(\theta/\sqrt{\Delta})}{\Delta}, \quad (13)$$

где

$$\psi^{(\alpha)}(x) = \pi^{-1} \int_0^\infty d\tau \exp(-x^2 \tau^\alpha) \tau^\alpha g^{(\alpha)}(\tau), \quad \alpha < 1. \quad (14)$$

Коэффициент Δ и $\langle \theta^2 \rangle$ — средний квадрат угла отклонения на t выражаются как

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\Delta}{\Gamma(1+\alpha)} = \frac{2\langle \theta^2 \rangle t^\alpha}{B\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}. \quad (15)$$

Здесь $\langle \theta^2 \rangle$ — средний квадрат угла однократного рассеяния. Это обобщение распределения Ферми для фрактально распределенных рассеивающих центров. Для распределения по потерям энергии ε получаем

$$\Psi(\varepsilon, t) = (2\pi D)^{-1/2} \int_0^\infty d\tau \times \exp\left(-\frac{(\varepsilon - N/(t/\tau)\langle \varepsilon \rangle)^2}{2N(t/\tau)D}\right) \frac{g^{(\alpha)}(\tau)}{\sqrt{N(t/\tau)}},$$

$$D = \langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2, \quad N(t/\tau) = (t/\tau)^\alpha / [B\Gamma(1-\alpha)], \quad (16)$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ и $\langle \varepsilon^2 \rangle$ — средняя величина и средний квадрат потерь энергии при однократном рассеянии.

В приближении непрерывного замедления (без учета флуктуаций потерь энергии) (16) переходит в

$$\Psi(\varepsilon, t) = (\alpha\varepsilon)^{-1} \left[\frac{At^\alpha}{\varepsilon} \right]^{1/\alpha} g^{(\alpha)}\left(\left[\frac{At^\alpha}{\varepsilon} \right]^{1/\alpha} \right),$$

$$A = \langle \varepsilon \rangle / B\Gamma(1-\alpha).$$

Используя выражения для моментов односторонних устойчивых распределений (10), можно вычислить средние потери энергии на пути t

$$\langle E \rangle = \frac{\langle \varepsilon \rangle t^\alpha}{B\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}. \quad (17)$$

И в том и в другом случае можно выделить не обычную зависимость $\propto t$, а субдиффузионную: $\propto t^\alpha$.

Распределения $g^{(\alpha)}(x)$ и $\psi^{(\alpha)}(x)$ могут быть выражены через обобщенную гипергеометрическую функцию Фокса [26,27]. Односторонняя устойчивая плотность выражается через нее как [28]

$$g^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\alpha x^2} H_{11}^{10} \left(x^{-1} \left| \begin{matrix} (-1, 1) \\ (-1/\alpha, 1/\alpha) \end{matrix} \right. \right),$$

Используя формулу (2.25.2.3) из [29], мы получаем

$$\psi^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\pi x^2} H_{12}^{20} \left(x \left| \begin{matrix} (1, 1) \\ (1, 1/\alpha)(1, 1/\alpha) \end{matrix} \right. \right).$$

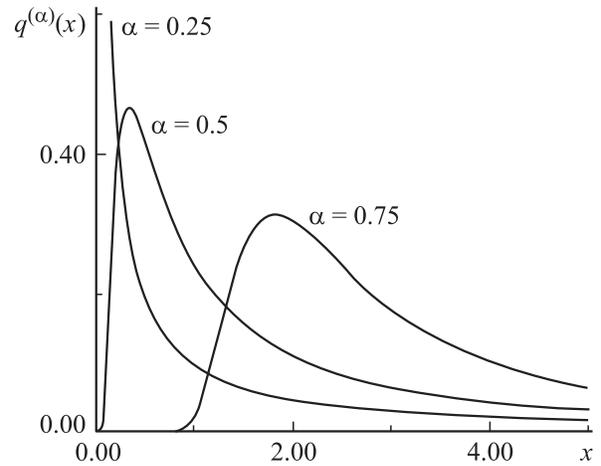


Рис. 2. Плотности односторонних устойчивых распределений $g^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$.

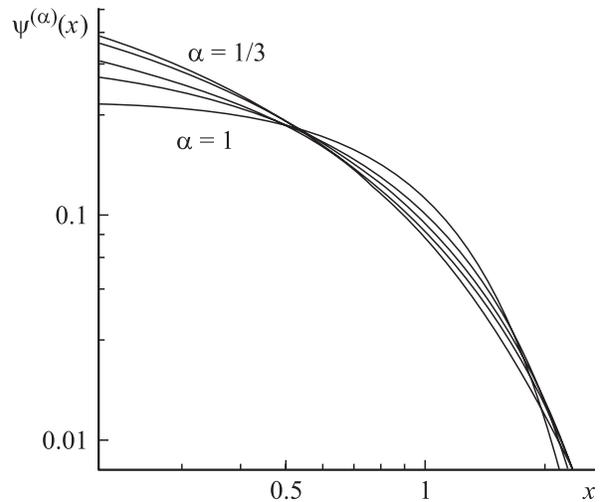


Рис. 3. Распределения $\psi^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha = 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1$. $\alpha = 1$ соответствует нормальному распределению.

Графики распределений $g^{(\alpha)}(x)$ и $\psi^{(\alpha)}(x)$ для различных значений α представлены на рис. 2, 3. На рис. 3 предельное распределение $\alpha = 1$ соответствует нормальному гауссову распределению, т.е. рассеянию с конечным средним пробегом. Важнейшим отличием формы распределений $\psi^{(\alpha)}(x)$ от нормального является более высокая концентрация вероятности в области малых и больших углов.

Выражение (11) можно применить для произвольного сечения однократного рассеяния $\sigma(x)$, в том числе и в случае бесконечной дисперсии X . С этой проблемой мы сталкиваемся при рассеянии заряженных частиц, описываемом формулой Резерфорда, если в теорию не вводить параметр максимальных потерь энергии или максимального угла отклонения. При этом $\sigma^{(N)}(x)$ описывается распределением Ландау (в случае потерь

энергии)

$$\sigma^{(N)}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp(p\varepsilon - NA(p)) dp,$$

$$A(p) = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} (1 - \exp(-p\varepsilon)) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \sigma(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-2},$$

$$A(p) \cong p\varepsilon_0 b - p\varepsilon_0 \ln p\varepsilon_0, \quad b = 1 - C_e \quad (18)$$

и распределением Мольер (в случае угла отклонения)

$$\sigma^{(N)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-NA(p)) J_0(p\theta) dp,$$

$$A(p) = \int_{\theta_0}^{\infty} (1 - J_0(-p\theta)) \sigma(\theta) \theta d\theta, \quad \sigma(\theta) \cong \theta^{-2},$$

$$A(p) \cong p^2 \theta_0 b - p^2 \theta_0 \ln p^2 \theta_0, \quad b = 2(1 - C_e). \quad (19)$$

Параметры ε_0 и θ_0 определяют минимально теряемую энергию (энергию связи) и угол экранирования, т.е. пределы применимости формулы Резерфорда. В любом случае после подстановки (18) или (19) в (11) мы получаем выражение для соответствующих распределений во фрактальной среде в виде, пригодном для численных расчетов.

6. Уравнения переноса в среде фрактального типа

Рассмотрим вопрос об уравнениях переноса в средах с экспоненциальным и степенным распределением пробегов. Выше было показано, что обобщенное распределение Пуассона (5) описывает многократное рассеяние в первом случае. Дифференцированием по t легко убедиться, что оно удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mu \Psi = \mu \int \sigma(y-x) \Psi(t, y) dy \quad (20)$$

с начальным условием $\Psi(x, 0) = \delta(x)$.

В асимптотике $t \rightarrow \infty$ уравнение (20) принимает диффузионный вид (называемый иногда приближением Фоккера–Планка)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\mu \langle X \rangle \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\mu \langle X^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (21)$$

при этом для угла отклонения оператор $\partial/\partial \theta$ двумерный. В силу гауссовой асимптотики (12) это асимптотическое уравнение сохраняется и для степенного распределения пробегов с конечным средним ($\alpha > 1$).

Для получения уравнений переноса во фрактальной среде рассмотрим соотношение (2) для распределения пробегов $q(t)$, отличного от показательного. В связи

с этим удобно перейти к плотности рассеяний $f(x, t)$, связанной с $\Psi(x, t)$ соотношением

$$\Psi(x, t) = \int_0^t Q(t-t') f(x, t') dt'. \quad (22)$$

Распределение

$$f(x, t) = \sum_{N=0}^{\infty} q^{(N)}(t) \sigma^{(N)}(x) \quad (23)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(x, t) = \int_0^t dt' q(t') \int dy \sigma(y) f(x-y, t-t') + \delta(t) \delta(x), \quad (24)$$

которое вместе с (22) обобщает кинетическое уравнение (20) на случай среды с заданным распределением пробегов $q(t)$.

В случае рассеяния с конечной дисперсией $\sigma^{(N)}(x)$ асимптотически при $N \rightarrow \infty$ описывается распределением Гаусса (12) и удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \sigma^{(N)}}{\partial N} = \langle X \rangle \frac{\partial \sigma^{(N)}}{\partial x} + \frac{\langle X^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 \sigma^{(N)}}{\partial x^2}.$$

После подстановки последнего соотношения в (23) и интегрирования по частям мы приходим к уравнению

$$-\langle X \rangle \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\langle X^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\delta(t) \delta(x) - \int_0^{\infty} dN \sigma^{(N)}(x) \frac{\partial q^{(N)}(t)}{\partial N}.$$

Переходя к рассмотрению степенного распределения пробегов $q(t)$ ($\alpha < 1$), необходимо учесть, что в асимптотике $N \rightarrow \infty$ $q^{(N)}(t)$ ведет себя согласно (8). В целях сокращения обозначений в последующем изложении удобно ввести оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля [30]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \tau^{-\alpha-1} f(t-\tau) d\tau, \quad \alpha < 1.$$

Используя свойства устойчивых плотностей, можно показать, что распределения (8) удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial q^{(N)}(t)}{\partial N} = -\frac{\partial^{\alpha} q^{(N)}(t)}{\partial t^{\alpha}}.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению в дробных производных для плотности рассеяний $f(x, t)$ следующего вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\alpha} f + \langle X \rangle \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\langle X^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \delta(t) \delta(x), \quad \alpha < 1, \quad t \rightarrow \infty. \quad (25)$$

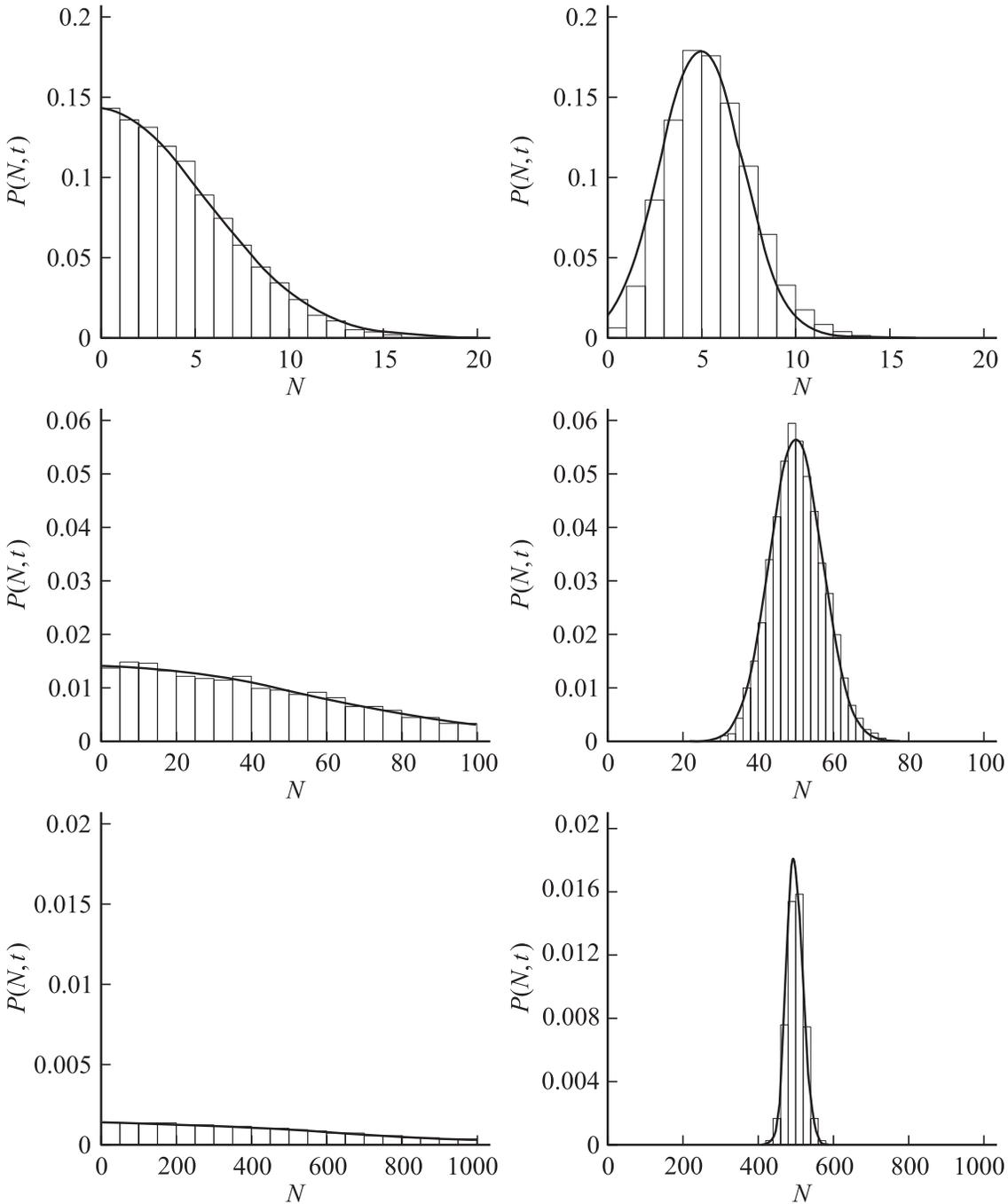


Рис. 4. Распределения по числу взаимодействий $p(N; t)$ на глубинах t , соответствующих в среднем 5, 50 и 500 взаимодействиям рассеивающей частицы со средой. Слева — результаты для фрактальной среды (степенное распределение длины пробега $q(t) \sim t^{-\alpha-1}$, $\alpha = 1/2$), справа — для регулярной среды (экспоненциальное распределение пробега).

Производя свертку последнего уравнения с $Q(t) = Bt^{-\alpha}$ и изменяя порядок интегрирования по правилу Дирихле в слагаемом с дробной производной, мы получаем уравнение для функции распределения $\Psi(x, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha \Psi + A\langle X \rangle \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{A\langle X^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \delta(x),$$

$$\alpha < 1, \quad t \rightarrow \infty, \quad A = 1/B\Gamma(1-\alpha). \quad (26)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ это уравнение принимает вид уравнения обычной диффузии (21). Уравнения типа (26) появляются в работах [31,32] в связи с описанием явления диффузии замедленного типа (субдиффузии), где переменная t играет роль времени, а переменная x — роль координаты (в промежутках между рассеяниями x не изменяется: частица сидит в „ловушке“).

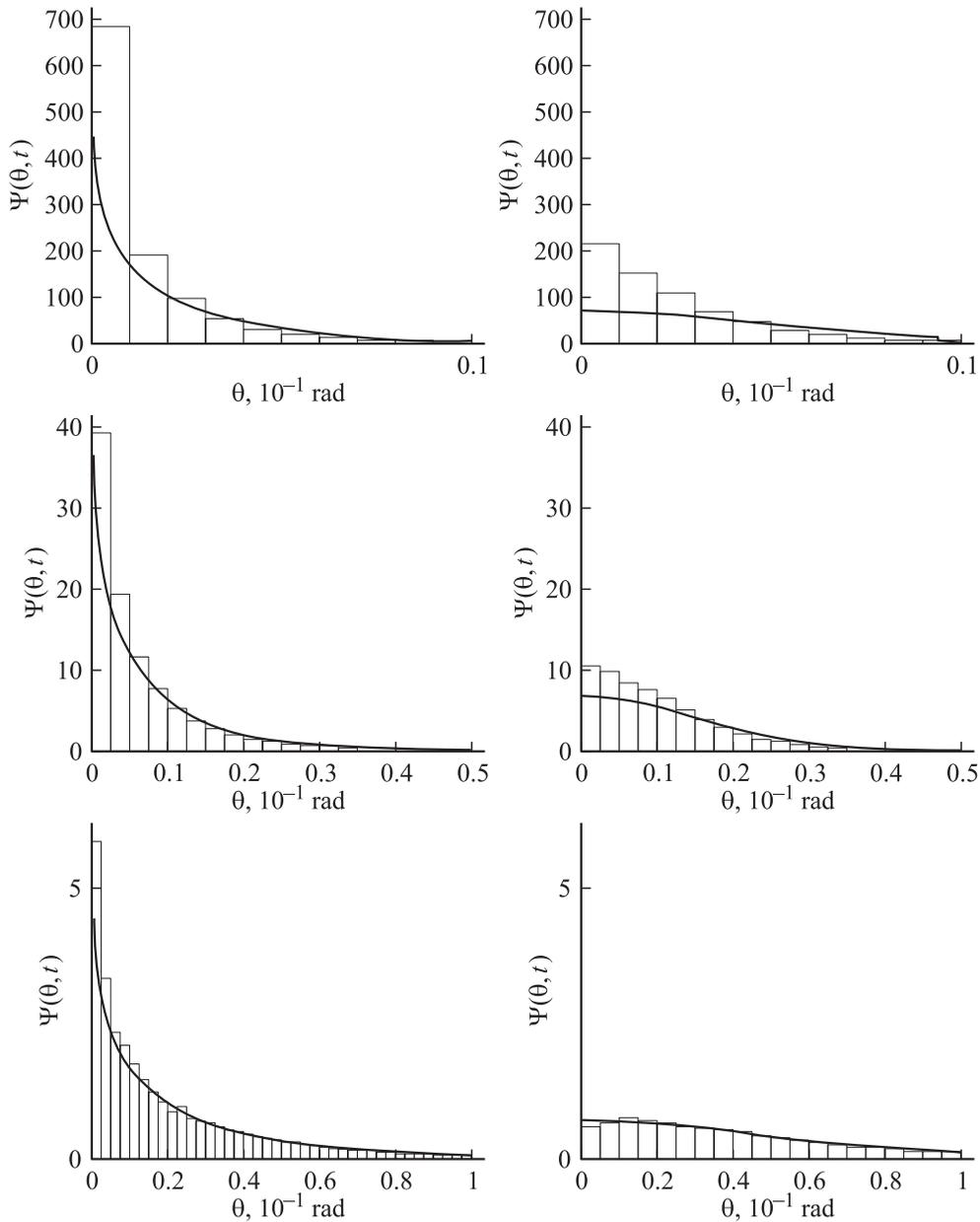


Рис. 5. Распределения по углу многократного рассеяния $\Psi(\theta, t)$ на глубинах t , соответствующих в среднем 5, 50 и 500 взаимодействиям рассеивающейся частицы со средой. $\langle \Theta^2 \rangle = 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2$. Слева — результаты для фрактальной среды (степенное распределение длины пробега $q(t) \sim t^{-\alpha-1}$, $\alpha = 1/2$), справа — для регулярной среды (экспоненциальное распределение пробега).

7. Моделирование методом Монте-Карло процесса многократного рассеяния во фрактальных структурах

Полученные выше результаты могут быть проверены численно, используя аналоговое моделирование процесса многократного рассеяния. Для этого рассматривается одномерное движение частицы с заданным распределением пробегов между взаимодействиями. В первой серии модельных экспериментов проводится сравнение распределений по числу взаимодействий на глубинах, соответствующих равным средним значениям чисел

взаимодействий $\langle N(t) \rangle$. Сравниваются два распределения пробегов: распределение (4), соответствующее однородной среде с линейной плотностью μ , и (7) с показателем $\alpha = 1/2$, соответствующее фрактальной среде. Результаты представлены на рис. 4. Сплошными кривыми показаны распределения (9) для степенного распределения пробегов (7) и распределение, предельное для распределения Пуассона,

$$p_N(t) = \frac{\exp\left(-\frac{(N-\langle N \rangle)^2}{2\langle N \rangle}\right)}{\sqrt{2\pi\langle N \rangle}}$$

для экспоненциального распределения пробегов (4) ($\langle N \rangle = \mu t$).

Далее рассматривается распределение по углу многократного рассеяния. В результате i -го взаимодействия частице приписывается случайный двумерный вектор Θ_i , направление которого выбирается азимутально-симметрично, а величина соответствует распределению Резерфорда $p(\Theta) \sim \Theta^{-4}$, где во избежание расходимости (Θ^2) введены параметры минимального и максимального угла рассеяния Θ_{\min} и Θ_{\max} . Для сравнения формы распределений на рис. 5 для глубин, соответствующих равным средним значениям чисел взаимодействий $\langle N(t) \rangle$, показаны распределения по углу многократного рассеяния θ в сравнении с асимптотическими решениями $\Psi(\theta, t)$ (13) и (12). Аналогичный численный эксперимент может быть проведен и для распределения по потерям энергии.

Заключение

В работе рассмотрен процесс прохождения частиц через точечные фракталоподобные системы [19–22], моделирующие фрактальную среду. Показано, что частицы, распространяющиеся в подобной среде, обладают степенным распределением длины свободного пробега с показателем α (7). Показано, что в случае $\alpha > 1$ распределение по случайному параметру многократного рассеяния $\Psi(t, x)$ на глубине t асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) зависит лишь от среднего значения длины свободного пробега $\langle \tau \rangle$ и не зависит от типа распределения τ (экспоненциального либо степенного). В случае $\alpha < 1$, когда средняя длина свободного пробега бесконечна, получено выражение (9) для распределения по числу взаимодействий на глубине t и универсальное правило преобразования (11), позволяющее находить распределение по случайному параметру многократного рассеяния X для любого вида сечения рассеяния $\sigma(x)$. Найдены распределения по углу отклонения (13) и потерям энергии (14) в случае конечной дисперсии X . Выражения, полученные для средних потерь энергии и среднеквадратичного угла многократного рассеяния на глубине t , проявляют субдиффузионную зависимость $\propto t^\alpha$ ($\alpha < 1$), отличающуюся от нормальной $\propto t$ замедленным ростом. Показано, что распределения $\Psi(t, x)$ при бесконечной средней длине свободного пробега удовлетворяют уравнениям субдиффузионного типа в дробных производных (26). Численное моделирование многократного рассеяния со степенным распределением длины свободного пробега подтверждает результаты аналитических расчетов.

Список литературы

- [1] Coleman P.H., Pietronero L. // Phys. Rep. 1992. Vol. 213. N 6. P. 311–389.
- [2] Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1983, 480 p.
- [3] Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж. Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994. 383 с.
- [4] Ferri F., Frisken B.J., Cannell D.S. // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 67. N 25. P. 3626–3629.
- [5] Hasmy A., Anglaret E., Foret M. et al. // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. N 9. P. 6006–6016.
- [6] Maleev S.V. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 52. N 18. P. 13163–13168.
- [7] Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. М.: Наука, 1978. 464 с.
- [8] Uchaikin V.V. // XXIV ICRC. Roma, 1995. Vol. 1. He sessions. P. 698–701.
- [9] Uchaikin V.V. // Physica A. 1998. Vol. 255. Vol. 12. P. 65–92.
- [10] Учайкин В.В. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 1. С. 138–139.
- [11] Учайкин В.В. // ТМФ. 1998. Т. 115. № 1. С. 154–160.
- [12] Учайкин В.В., Коробко Д.А. // Ученые записки УлГУ. Сер. физ. 1998. Вып. 1. С. 3–7.
- [13] Коробко Д.А., Учайкин В.В. // Ученые записки УлГУ. Сер. физ. 1999. Вып. 6. С. 15–26.
- [14] Учайкин В.В. // Критические технологии и фундаментальные проблемы физики конденсированных сред / Под ред. С.В. Булярского. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1999. С. 4–25.
- [15] Учайкин В.В., Коробко Д.А. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 11. С. 34–40.
- [16] Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 256 с.
- [17] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
- [18] Лифшиц И.М., Гредескул С.А., Пастур Л.А. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 2362–2377.
- [19] Uchaikin V.V., Gusarov G.G., Gismjatov I.F., Svetuchin V.A. // J. Bif. and Chaos. 1998. Vol. 8. P. 977–984.
- [20] Uchaikin V.V., Gusarov G.G. // J. Math. Phys. 1997. Vol. 38. N 5. P. 2453–2464.
- [21] Uchaikin V.V., Gusarov G.G., Korobko D.A. // J. Math. Sci. 1998. Vol. 92. P. 3940–3948.
- [22] Учайкин В.В., Коробко Д.А., Гисмятов И.В. // Изв. вузов. Физика. 1997. № 8. С. 7–13.
- [23] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
- [24] Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. VSP. Utrecht (The Netherlands), 1999. 570 p.
- [25] Райх М.Э., Рузин И.М. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 2257–2276.
- [26] Fox C. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 98. P. 395.
- [27] Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F. // J. Stat. Phys. 1993. Vol. 71. P. 741.
- [28] Schneider W.R. // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1986. 497 p.
- [29] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
- [30] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [31] Bouchaud J.-P., Georges A. // Phys. Rep. 1990. Vol. 195. N 4–5. P. 127–293
- [32] Zaslavsku G.M. // Physica D. 1994. Vol. 76. N 1–3. P. 110–122.