

01

Электростатическая задача для тора, расположенного внутри бесконечного цилиндра

© Г.Ч. Шушкевич

Учреждение образования „Гродненский государственный университет имени Янки Купалы“,
230023 Гродно, Белоруссия
e-mail: sys@mail.grsu.grodno.by

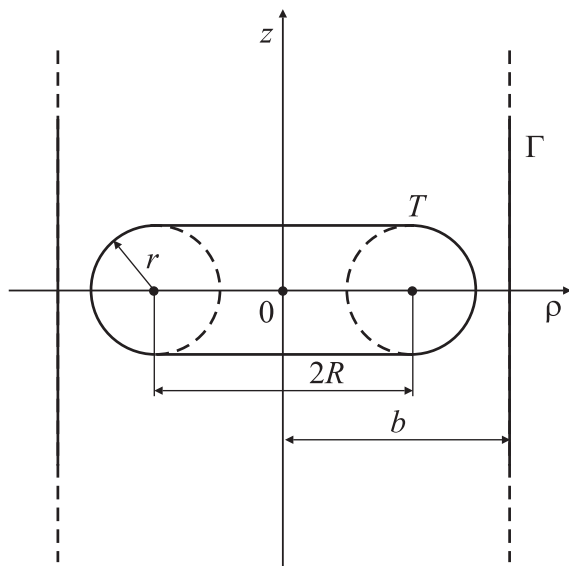
(Поступило в Редакцию 15 сентября 2003 г.)

Построено аналитическое решение осесимметричной электростатической задачи для тора, расположенного внутри бесконечного кругового цилиндра. Вычислена емкость тора для некоторых геометрических параметров проводников.

При проектировании некоторых устройств возникает необходимость расчета электростатического поля системы проводников различной конфигурации [1,2]. Решение поставленной краевой задачи сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с помощью формул, связывающих цилиндрические и тороидальные гармонические функции. Приведены расчеты емкости тора для некоторых геометрических параметров проводников, результаты расчетов представлены в таблице. Сходная задача ранее решалась только приближенными методами [3,4].

Постановка и представление решения задачи

Рассмотрим осесимметричную электростатическую задачу для тора T с малым r и большим радиусом R , расположенного внутри бесконечно длинного кругового цилиндра Γ радиуса b (осевое сечение проводников показано на рисунке). Для решения задачи и аналитического описания проводников с точкой 0 свяжем



цилиндрические координаты $\{\rho, z, \varphi\}$ [5,6]:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$(0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty)$$

и тороидальные координаты $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ [5,6]

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}$$

$$(0 \leq \alpha < \infty, \quad -\pi < \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad c = \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Тогда рассматриваемые проводники описываются следующим образом:

$$T = \left\{ \alpha = \alpha_0 = \ln \left(\frac{R}{r} + \sqrt{\left(\frac{R}{r} \right)^2 - 1} \right), \right. \\ \left. 0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\},$$

$$\Gamma = \{ \rho = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \}.$$

Требуется найти электростатический потенциал U , который удовлетворяет а) уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ внутри цилиндра Γ , за исключением поверхности тора T ; б) граничным условиям на поверхности тора T и бесконечного цилиндра Γ

$$U|_T = V_t - \text{const}, \quad U|_\Gamma = 0; \quad (1), (2)$$

в) условию на бесконечности

$$U(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где M — произвольная точка пространства.

Согласно методу разделения переменных [5,6], электростатический потенциал U представим в виде суперпозиции цилиндрических и тороидальных гармонических функций так, чтобы автоматически выполнялось условие на бесконечности (3),

$$U = U_1(\alpha, \beta) + U_2(\rho, z),$$

где

$$U_1(\alpha, \beta) = \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} \exp(in\beta), \quad (4)$$

$$U_2(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda) \frac{I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda b)} \exp(i\lambda z) d\lambda, \quad (5)$$

$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)$ — функция Лежандра первого рода или функции тора, $I_0(\lambda\rho)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка [5–8], $\operatorname{ch} \alpha_0 = R/r$.

Неизвестные коэффициенты x_n , функция $Z(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий (1), (2).

Выполнение граничных условий

Для выполнения граничного условия (1) на поверхности тора T представим функцию $U_2(\rho, z)$ через торидальные гармонические функции, используя формулу [9]

$$I_0(\lambda\rho) \exp(i\lambda z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\lambda c) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) \exp(in\beta),$$

где

$$a_n(x) = 2I_0(x) + \sum_{k=1}^{|n|} f_k^{|n|} \left(|n| I_k(x) - k \frac{|n|}{n} I_{k-1}(x) \right) x^k, \\ f_k^n = \frac{2^{3k+1} k! (n+k+1)!}{((2k)!)^2 (n-k)!}, \quad (6)$$

$Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)$ — функция Лежандра второго рода или функция тора [5–8].

Тогда

$$U_2(\alpha, \beta) = \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(\lambda c) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) \exp(in\beta), \quad (7)$$

где

$$R_n(\lambda c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\lambda)}{I_0(\lambda b)} a_n(\lambda c) d\lambda. \quad (8)$$

Принимая во внимание представления (4), (7) и выполняя граничное условие (1), имеем

$$\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_n + R_n(\lambda c) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) \right) \times \exp(in\beta) = V_t. \quad (9)$$

Разделив обе части (9) на $\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)}$ и воспользовавшись разложением [5]

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) \exp(in\beta),$$

из (9) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_n + R_n(\lambda c) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) \right) \exp(in\beta) = \frac{V_t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) \exp(in\beta)$$

или в силу единственности разложения в ряд Фурье

$$x_n + R_n(\lambda c) Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \frac{V_t}{\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0); \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Для выполнения граничного условия (2) на поверхности цилиндра представим функцию $U_1(\alpha, \beta)$ через цилиндрические гармонические функции, используя интегральное представление [9]

$$\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha) \exp(in\beta) = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\lambda c) K_0(|\lambda\rho|) \exp(i\lambda z) d\lambda,$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда [5–8].

Тогда

$$U_1(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\lambda c) K_0(|\lambda\rho|) \exp(i\lambda z) d\lambda, \quad (11)$$

где

$$D(\lambda c) = \frac{c}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} a_k(\lambda c). \quad (12)$$

Согласно представлениям (5), (11), граничное условие (2) на поверхности цилиндра принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(Z(\lambda) + D(\lambda c) K_0(|\lambda b|) \right) \exp(i\lambda z) d\lambda = 0$$

или

$$Z(\lambda) + D(\lambda c) K_0(|\lambda b|) = 0. \quad (13)$$

Подставляя $Z(\lambda)$ из (13) в (8) и учитывая представление (12), получим связь между функцией $R_n(\lambda c)$ и коэффициентами x_k вида

$$R_n(\lambda c) = -\frac{c}{2\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|\lambda b|)}{I_0(\lambda b)} a_n(\lambda c) a_k(\lambda c) d\lambda. \quad (14)$$

Теперь исключим из (10) функцию $R_n(\lambda c)$ с помощью представления (14), в результате получим бесконечную систему линейных уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов x_n , входящих в первоначальное представление потенциала,

$$x_n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{nk} x_k = \frac{V_t}{\pi} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

где

$$p_{nk} = \frac{c}{2\pi^2} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|\lambda b|)}{I_0(\lambda b)} a_n(\lambda c) a_k(\lambda c) d\lambda. \quad (16)$$

Преобразуем несобственный интеграл (16) к виду, удобному для вычисления на ПЭВМ.

В работе [10] приведены первые пятьдесят значений несобственного интеграла

$$L_k = \frac{2^{k+1}}{\pi k!} \int_0^{\infty} \frac{K_0(t)}{I_0(t)} t^k dt; \quad k = 0, 1, \dots, 49.$$

Остальные значения интеграла L_k ($k > 49$) можно вычислить с точностью 10^{-12} по следующей формуле [10]:

$$L_k = \sum_{i=1}^{13} \frac{C_i}{\binom{k}{i}},$$

где

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

— биномиальные коэффициенты.

Значения коэффициентов C_i приведены в табл. 1.

Таблица 1.

n	Значения C_i
1	-0.5
2	0.0625
3	-0.17708333333
4	0.021809895833
5	-0.12858072917
6	0.01009792752
7	-0.0835903592
8	0.00555534
9	-0.06640809
10	0.0034603
11	-0.055046
12	0.00236
13	-0.047

Используя разложение произведения бesselовых функций в степенной ряд [11]

$$I_m(\mu t) I_n(\mu t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)!(m+p)!} \times \binom{m+n+2p}{p} \left(\frac{\mu t}{2}\right)^{n+m+2p},$$

можно показать, что интеграл вида

$$I_k^{(m,n)}(a) = \int_0^{\infty} \frac{K_0(t)}{I_0(t)} I_m(at) I_n(at) t^k dt \quad (17)$$

вычисляется через табулированные интегралы L_k по формуле

$$I_k^{(m,n)}(a) = \frac{\pi k!}{2^{k+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m+n+2p}{p} \binom{m+n+k+2p}{k} \times \binom{m+n+2p}{m+p} \left(\frac{a}{4}\right)^{m+n+2p} L_{m+n+k+2p}. \quad (18)$$

Принимая во внимание представления (6), (17), после некоторых преобразований получим следующие представления для коэффициентов бесконечной СЛАУ (15) p_{nk} через интеграл $I_k^{(m,n)}(a)$

$$p_{00} = \frac{4a}{\pi^2} \frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} I_0^{(0,0)}(a),$$

$$p_{0k} = \frac{2a}{\pi^2} \frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} \left\{ 2I_0^{(0,0)}(a) + \sum_{p=1}^{|k|} f_p^{|k|} |k| a^p I_p^{(p,0)}(a) \right\};$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$p_{n0} = \frac{2a}{\pi^2} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} \left\{ 2I_0^{(0,0)}(a) + \sum_{p=1}^{|n|} f_p^{|n|} |n| a^p I_p^{(p,0)}(a) \right\};$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$p_{nk} = \frac{a}{2\pi^2} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)}{P_{k-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)} \left\{ 8I_0^{(0,0)}(a) + 4 \sum_{p=1}^{|n|} f_p^{|n|} |n| a^p I_p^{(p,0)}(a) + 4 \sum_{p=1}^{|k|} f_p^{|k|} |k| a^p I_p^{(p,0)}(a) + 2 \sum_{p=1}^{|n|} \sum_{m=1}^{|k|} f_p^{|n|} f_m^{|k|} |n| |k| a^{m+p} I_{m+p}^{(m,p)}(a) + 2 \sum_{p=1}^{|n|} \sum_{m=1}^{|k|} f_p^{|n|} f_m^{|k|} p m \frac{|n|}{n} \frac{|k|}{k} a^{m+p} I_{m+p}^{(m-1,p-1)}(a) \right\};$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $a = c/b$ и $a < 1$.

Таблица 2.

$\frac{r}{R}$	Значения отношения радиуса цилиндра b к R				
	$b/R = 3$	$b/R = 5$	$b/R = 10$	$b/R = 15$	
0.1	0.921	0.827	0.771	0.753	0.722
0.2	1.174	1.026	0.939	0.915	0.868
0.3	1.412	1.202	1.086	1.053	0.992
0.4	1.658	1.374	1.224	1.182	1.106
0.5	1.921	1.548	1.360	1.308	1.216
0.6	2.208	1.727	1.496	1.434	1.323
0.7	2.527	1.913	1.633	1.559	1.429
0.8	2.883	2.106	1.771	1.684	1.534
0.9	3.286	2.308	1.921	1.811	1.638

Вычисление емкости тора

Заряд Q_t тора T вычисляется через коэффициенты x_n по формуле [12]

$$Q_t = 8\pi\epsilon c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Для некоторых геометрических параметров проводников вычислена нормированная емкость тора $K = Q_t / 4\pi\epsilon b V_t$, результаты вычислений приведены в табл. 2. В правом столбце (табл. 2) приведены значения нормированной емкости K уединенного тора, взятые из [1].

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (15) решалась методом усечения [13]. Как показал вычислительный эксперимент, для получения численного решения уравнения (15) с точностью 0.001 для рассматриваемых геометрических параметров проводников достаточно взять порядок усечения равным 20. Коэффициенты $I_k^{(m,n)}(a)$, представляющие собой сходящиеся ряды (18), вычислялись с точностью 10^{-5} .

Функции Лежандра (тора) $P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)$, $Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0)$ вычислялись соответственно по формулам [5,7]

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(\operatorname{ch} \alpha_0 + \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \varphi)^{n+0.5}},$$

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \varphi)}}.$$

Расчеты выполнялись с помощью математической интегрированной системы MathCAD 2000 [14].

Список литературы

- [1] Иосель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Л. Расчеты электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
- [2] Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.

- [3] Ярмаркин М.К. // Изв. вузов. Энергетика. 1979. № 11. С. 23–25.
- [4] Острейко В.Н. // РиЭ. 1981. Т. 26. № 11. С. 2456–2458.
- [5] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ГИИТЛ, 1953. 380 с.
- [6] Шушкевич Г.Ч. Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения. Гродно: ГрГУ, 1999. 238 с.
- [7] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [8] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
- [9] Ерофеев В.Т. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1416–1427.
- [10] Ling C.B., Lin J. // Mathematics of Computation. 1972. Vol. 26. N 118. P. 529–537.
- [11] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация. М.: Наука, 1980. 608 с.
- [12] Шушкевич Г.Ч. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 4. С. 123–125.
- [13] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
- [14] Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В. Введение в MathCAD 2000. Гродно: ГрГУ, 2001. 140 с.