

01;09

Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий в отображении Заславского

© А.А. Короновский, А.Е. Храмова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Государственный учебно-научный центр „Колледж“,
410026 Саратов, Россия
e-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

(Поступило в Редакцию 25 сентября 2003 г.)

Рассматриваются механизмы, приводящие к усложнению вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Заславского) при изменении управляющих параметров в рамках одного динамического режима. Показано, что вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий для устойчивого цикла определяется его мультипликаторами и ассоциированными с ними многообразиями. Объясняется явление качественного усложнения вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий. Полученные результаты могут быть обобщены на широкий класс динамических систем как с дискретным, так и с непрерывным временем.

В последнее время внимание исследователей привлечено к переходным процессам в динамических системах [1–4]. Результаты изучения переходных процессов имеют как фундаментальное [5–7], так и прикладное значение [8–10]. В качестве объектов исследования для изучения переходных процессов часто выбираются отображения [11–13] в силу того, что, с одной стороны, они относительно просты, а с другой стороны, они демонстрируют основные нелинейные явления, свойственные для сосредоточенных и распределенных систем.

Ранее [11,12] на примере отображения Эно было показано, что существуют два сценария усложнения характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий при изменении управляющих параметров в рамках одного периодического динамического режима. Первый сценарий реализуется, когда мультипликаторы периодического цикла становятся комплексно-сопряженными, а второй — когда мультипликаторы имеют разные знаки и становятся равными по абсолютной величине, оставаясь в области действительных значений. Цель настоящей работы заключается в обобщении результатов, полученных в работах [11,12] для отображения Эно, на более широкий класс двумерных динамических систем, что дает возможность предполагать универсальность изученных закономерностей.

В качестве объекта исследования выбрана двумерная динамическая система с дискретным временем, известная как отображение Заславского [14–18],

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + dy_n, \quad \text{mod } 1, \\y_{n+1} &= dy_n + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n).\end{aligned}\quad (1)$$

Зависимость длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ в отображении Заславско-

го (1) при заданных начальных условиях определялась так же, как это делалось в работах [11,19–21].

В настоящей работе рассматриваются различные динамические режимы отображения Заславского (1): устойчивые циклы периода 1 и 2. Из бифуркационного анализа отображения (1) следует, что при значениях управляющих параметров, отвечающих условиям $0 < d < 1$, $\Omega > 0$, $\Omega\sqrt{1-2d+d^2} < k < \sqrt{4+\Omega^2+8d-2\Omega^2d+4d^2+\Omega^2d^2}$, на плоскости (x, y) существуют одна неустойчивая (x^0, y^0) и одна устойчивая (x^1, y^1) точки

$$\begin{aligned}x^0 &= \arcsin \frac{\Omega(-1+d)}{k} + 2\pi, \\y^0 &= -\Omega, \\x^1 &= -\arcsin \frac{\Omega(-1+d)}{k} + \pi, \\y^1 &= -\Omega.\end{aligned}\quad (2)$$

Устойчивая точка (x^1, y^1) характеризуется мультипликаторами

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0.5 \left(1 - k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} \right. \\&\quad \left. - \sqrt{\left(-1 - k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} - d\right)^2 - 4d + d} \right), \\ \mu_2 &= 0.5 \left(1 - k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} \right. \\&\quad \left. + \sqrt{\left(-1 - k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} - d\right)^2 - 4d + d} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Заметим, что неустойчивая точка (x^0, y^0) характеризуется мультипликаторами

$$\begin{aligned} \mu^1 &= 0.5 \left(1 + k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(-1 + k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} - d\right)^2 - 4d + d} \right), \\ \mu^2 &= 0.5 \left(1 + k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(-1 + k \sqrt{1 - \frac{\Omega^2(-1+d)^2}{k^2}} - d\right)^2 - 4d + d} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 1, *a* приведены зависимости мультипликаторов μ_1 и μ_2 от управляющего параметра k при фиксированных значениях параметров $\Omega = 0.9, d = 0.3$, соответствующих устойчивому циклу периода один (x^1, y^1) . На рис. 1, *a* наблюдается выход значений мультипликаторов в комплексную область (при $0.66237 < k < 2.4769$), что соответствует области разрыва. При значениях параметра $k = 0.66237$ и 2.4769 , соответствующих границам области разрыва, значения мультипликаторов μ_1 и μ_2 совпадают. Из рис. 1, *a* видно, что при $k < 0.66237$ мультипликаторы μ_1 и μ_2 принимают положительные значения, при этом выполняется соотношение $\mu_1 < \mu_2$. Таким образом, в области, предшествующей комплексным значениям мультипликаторов, с увеличением управляющего параметра k от 0.63 до 0.66237 происходит постепенное увеличение мультипликатора μ_1 и одновременно уменьшение мультипликатора μ_2 на границе области устойчивости цикла периода один мультипликаторы принимают значения $\mu_2 = 1, \mu_1 = 0.25$, на границе области разрыва мультипликаторы μ_1, μ_2 стремятся к одному и тому же значению 0.48. После области разрыва в точке $k = 2.4769$ значения мультипликаторов μ_1 и μ_2 равны -0.48 . При $k > 2.4769$ мультипликаторы являются отрицательными и наименьшим по абсолютному значению становится мультипликатор μ_2 . Мультипликатор μ_1 при увеличении параметра k от 2.4769 до 2.67524 стремится к -1 . Для области $0.66237 < k < 2.4769$ мультипликаторы μ_1 и μ_2 являются комплексно-сопряженными и удовлетворяют соотношению $|\mu_1| = |\mu_2|$.

При сопоставлении проекций поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) (рис. 1, *b, c*) с расположением устойчивых многообразий (рис. 1, *d, e*) устойчивого цикла периода один (2) можно отчетливо проследить следующую закономерность: минимумы длительности переходных процессов совпадают с тем многообразием, которое соответствует наименьшему по модулю мультипликатору (светлые линии на рис. 1, *b, c*). Максимальные значения длительностей переходных процессов совпадают с устойчивым многообразием неустойчивой точки (x^0, y^0) (темные линии на

рис. 1, *b, c*). Отметим, что после области разрыва, т.е. при $2.4769 < k < 2.67524$, наблюдается качественное усложнение вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$, а именно появляется бесконечное число минимумов, накапливающихся у линии максимальных значений длительностей переходных процессов.

Для объяснения этого явления подробно рассмотрим поведение устойчивых многообразий неподвижной устойчивой точки и неустойчивого и устойчивого многообразий неподвижной неустойчивой точки. При значении управляющих параметров $\Omega = 0.9, d = 0.3, k < 0.66237$ наиболее быстрая сходимость к неподвижной устойчивой точке осуществляется по устойчивому многообразию, соответствующему наименьшему по своему значению мультипликатору μ_1 . Очевидно, что любая точка начальных условий (x_0, y_0) , лежащая в малой окрестности неустойчивой точки (x^0, y^0) , будет стремиться к аттрактору по направлению неустойчивого многообразия точки (x^0, y^0) μ^2 (4). Поведение неустойчивого многообразия неустойчивой точки в окрестности (x^1, y^1) при $k < 0.66237$ будет обуславливаться устойчивым многообразием устойчивой точки (x^1, y^1) , соответствующим наибольшему по модулю мультипликатору μ_2 (рис. 1, *d*). После области комплексных значений мультипликаторов устойчивой неподвижной точки (x^1, y^1) при $\Omega = 0.9, d = 0.3, k > 2.4769$ поведение неустойчивого многообразия неустойчивой точки (x^0, y^0) вблизи устойчивой точки (x^1, y^1) определяется устойчивым многообразием, соответствующим наибольшему по модулю мультипликатору μ_1 (рис. 1, *e*). В следствие того что мультипликатор μ_1 является отрицательным при $k > 2.4769$, неустойчивое многообразие точки (x^0, y^0) бесконечное число раз пересекает устойчивые многообразия точки (x^1, y^1) , что приводит к появлению бесконечного числа минимумов длительности переходных процессов при $k > 2.4769$.

Проведем аналогичный анализ зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ для более сложного динамического режима — цикла периода 2. Для отображения Заславского не удается получить точных аналитических выражений для элементов цикла периода 2 $(x_{2c}^1, y_{2c}^1), (x_{2c}^2, y_{2c}^2)$. В следствие этого значения устойчивых элементов цикла периода 2 были получены численно. Элементы цикла периода 2 $(x_{2c}^1, y_{2c}^1), (x_{2c}^2, y_{2c}^2)$ характеризуются мультипликаторами

$$\begin{aligned} \mu_1^{2c} &= 0.5(1 + d^2 + k \cos x_{2c}^1 + k \cos x_{2c}^2 + k^2 \cos x_{2c}^1 \cos x_{2c}^2) \\ &\quad - 0.5 \sqrt{-4(d^2 + kd^2 \cos x_{2c}^1 + kd^2 \cos x_{2c}^2) + (-1 - d^2 - \\ &\quad - k \cos x_{2c}^1 - k \cos x_{2c}^2 - k^2 \cos x_{2c}^1 \cos x_{2c}^2)^2}, \\ \mu_2^{2c} &= 0.5(1 + d^2 + k \cos x_{2c}^1 + k \cos x_{2c}^2 + k^2 \cos x_{2c}^1 \cos x_{2c}^2) \\ &\quad + 0.5 \sqrt{-4(d^2 + kd^2 \cos x_{2c}^1 + kd^2 \cos x_{2c}^2) + (-1 - d^2 - \\ &\quad - k \cos x_{2c}^1 - k \cos x_{2c}^2 - k^2 \cos x_{2c}^1 \cos x_{2c}^2)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

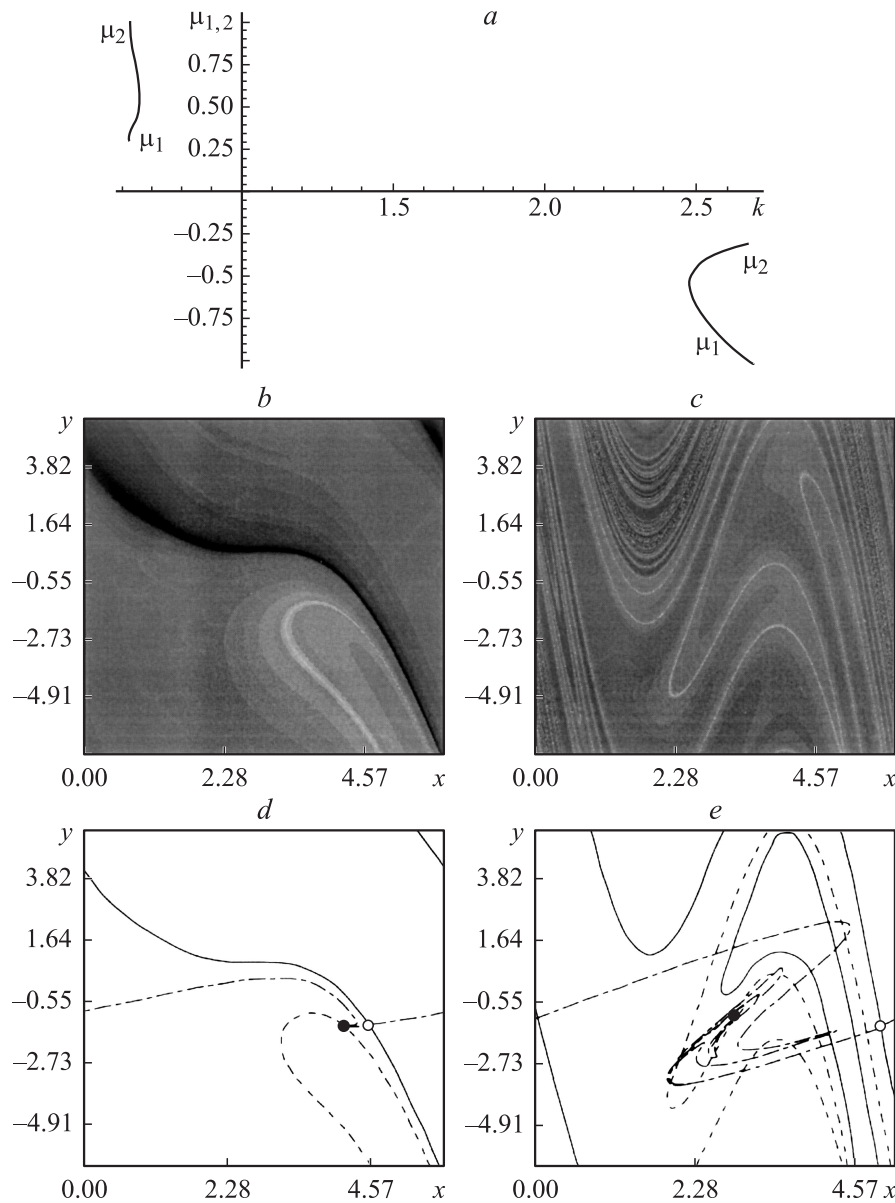


Рис. 1. *a* — зависимость значений мультипликаторов μ_1 и μ_2 устойчивой неподвижной точки от управляющего параметра k при $\Omega = 0.9$, $d = 0.3$. Область разрыва соответствует области комплексных значений мультипликаторов. *b* — проекция поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость возможных состояний (x, y) для отображения Заславского при $\Omega = 0.9$, $k = 0.65$, $d = 0.3$. Градация серого — длительность переходных процессов: белый цвет — нулевая длительность переходного процесса, черный — семьдесят единиц дискретного времени. *c* — аналогичная проекция для $\Omega = 0.9$, $k = 2.5755$, $d = 0.3$. Градация серого — длительность переходных процессов: белый цвет — нулевая длительность переходного процесса, черный — сто единиц дискретного времени. *d* — схематически показаны многообразия неустойчивой и устойчивой неподвижных точек (x^0, y^0) и (x^1, y^2) при фиксированных значениях управляющих параметров $\Omega = 0.9$, $k = 0.65$, $d = 0.3$. Мультипликаторы устойчивой неподвижной точки для рассматриваемых значений параметров имеют следующие значения: $\mu_1 = 0.4122$ и $\mu_2 = 0.7278$. Сплошная кривая — устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки (x^0, y^0) , штрихпунктир — неустойчивое многообразие этой же точки. Пунктир — устойчивое многообразие аттрактора, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_1 . Темный кружок — точка аттрактора, белый — неподвижная неустойчивая точка. *e* — многообразия неустойчивой и устойчивой неподвижных точек соответственно (x^0, y^0) и (x^1, y^1) при фиксированных значениях управляющих параметров $\Omega = 0.9$, $k = 2.5755$, $d = 0.3$. Мультипликаторы устойчивой неподвижной точки для рассматриваемых значений параметров имеют следующие значения $\mu_1 = -0.8402$ и $\mu_2 = -0.3571$. Сплошная кривая — устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки (x^0, y^0) , штрихпунктир — неустойчивое многообразие этой же точки. Пунктир — устойчивое многообразие аттрактора, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_2 . Черный кружок — точка аттрактора, белый — неподвижная неустойчивая точка.

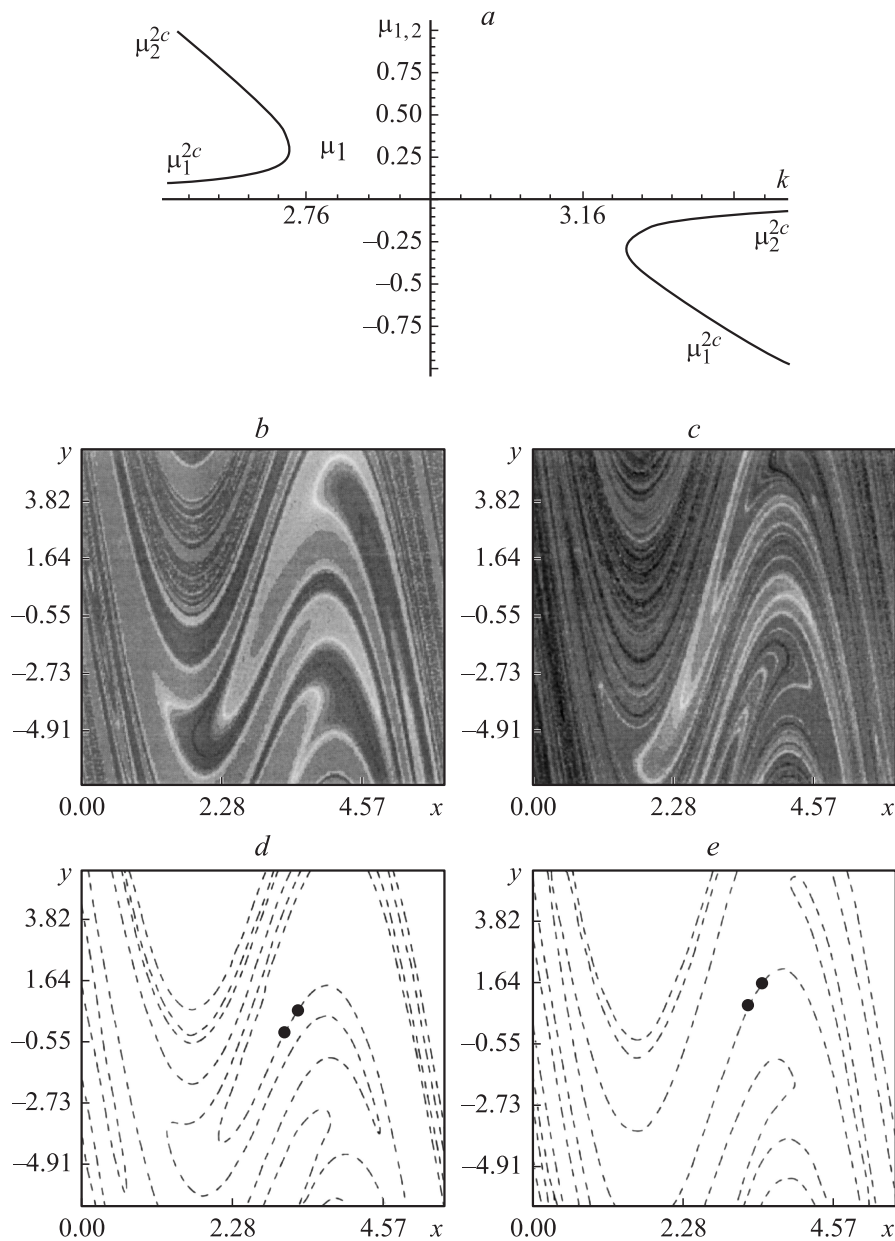


Рис. 2. *a* — зависимость значений мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} управляющего параметра k при значении параметра $\Omega = 0.9$, $d = 0.3$. Область разрыва соответствует области комплексных значений мультипликаторов. *b* — проекция поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ на плоскость возможных состояний (x, y) для отображения Заславского при значениях управляющих параметров $\Omega = 0.9$, $k = 2.70$, $d = 0.3$. Градация серого — длительность переходных процессов: белый цвет — нулевая длительность переходного процесса, черный — восемьдесят единиц дискретного времени. *c* — аналогичная проекция для $\Omega = 0.9$, $k = 3.10$, $d = 0.3$. Белый цвет — нулевая длительность переходного процесса, черный — сто десять единиц дискретного времени. *d* — схематически показаны многообразия устойчивых элементов цикла периода два (x_{2c}^1, x_{2c}^2) при фиксированных значениях управляющих параметров $\Omega = 0.9$, $k = 2.70$, $d = 0.3$. Мультипликаторы устойчивого 2-цикла для рассматриваемых значений параметров имеют значения $\mu_1^{2c} = 0.1054$ и $\mu_2^{2c} = 0.8536$. Пунктир — устойчивое многообразие аттрактора, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_1^{2c} . Черные кружки — элементы устойчивого цикла периода два. *e* — схематически показаны многообразия устойчивых элементов цикла периода два (x_{2c}^1, x_{2c}^2) при фиксированных значениях управляющих параметров $\Omega = 0.9$, $k = 3.10$, $d = 0.3$. Мультипликаторы устойчивого 2-цикла для рассматриваемых значений параметров имеют значения $\mu_1^{2c} = -0.5720$ и $\mu_2^{2c} = -0.1573$. Пунктир — устойчивое многообразие аттрактора, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_2^{2c} . Черные кружки — элементы устойчивого цикла периода два.

На рис. 2, *a* приведены графики зависимости мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} от управляющего параметра k при фиксированном значении параметров $\Omega = 0.9$, $d = 0.3$, соответствующих устойчивому циклу периода два. Аналогично случаю устойчивой неподвижной точки наблюдается выход значений мультипликаторов в комплексную область (при $2.7723 < k < 3.0641$), что соответствует области разрыва на рис. 2, *a*. При значениях параметра k , соответствующих границам области разрыва, значения мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} совпадают. Из рис. 2, *a* видно, что при $2.67524 < k < 2.7723$ мультипликаторы μ_1^{2c} и μ_2^{2c} принимают положительные значения, при этом выполняется соотношение $\mu_1^{2c} < \mu_2^{2c}$. На границе области разрыва мультипликаторы μ_1^{2c} , μ_2^{2c} стремятся к одному и тому же значению 0.29. После области разрыва в точке $k = 3.0641$ значения мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} равны 0.29. При $3.0641 < k < 3.2039$ оба мультипликатора становятся отрицательными и наименьшим по абсолютному значению становится мультипликатор μ_2^{2c} : $|\mu_1^{2c}| > |\mu_2^{2c}|$.

Проводя аналогичное сопоставление проекций поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) (рис. 2, *b, c*) с расположением устойчивых многообразий (рис. 2, *d, e*) устойчивого цикла периода два, замечаем, что обнаружение для устойчивой неподвижной точки закономерности изменения характера зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ проявляются и в случае более сложного динамического режима устойчивого цикла периода два. Наблюдаемое качественное усложнение вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ объясняется соответствующими изменениями знака мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} при прохождении комплексной плоскости. Аналогичное усложнение характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий наблюдается для циклов периода четыре, восемь и т.д. в отображении Заславского.

Таким образом, один из сценариев усложнения характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий, описанных в [11,12], реализуется в отображении Заславского, что подтверждает универсальность выявленных ранее закономерностей. Следует также отметить, что результаты изучения переходных процессов, полученные для систем с дискретным временем, могут быть распространены на потоковые системы, поскольку эти системы могут быть сведены к отображениям с помощью процедуры сечения Пуанкаре.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-02-16351), программы поддержки ведущих научных школ РФ, а также при поддержке научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of US Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Список литературы

- [1] Астахов А.В. и др. // РиЭ. 1993. Т. 38 (2). С. 291.
- [2] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26 (15). С. 26–31.
- [3] Bezruchko V.P., Dikanov T.V., Smirnov D.A. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 036210.
- [4] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // ДАН. 2002. Т. 383 (3). С. 322–325.
- [5] Aston P.J., Marriot P.K. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57 (1). P. 1181.
- [6] Dhamala M. et al. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 056207.
- [7] Wofo P., Kraenkel R.A. // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65 (1). P. 036225.
- [8] Meucci R. et al. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52 (5). P. 4676.
- [9] Яландин М.И., Шпак В.Г., Шунайлов С.А. и др. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 25. Вып. 10. С. 19–23.
- [10] Zhu L. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86 (18). P. 4017.
- [11] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 15. С. 61–68.
- [12] Короновский А.А., Храмова А.Е. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 13. С. 10–17.
- [13] Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е. и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11 (4).
- [14] Хенон М. // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
- [15] Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
- [16] Заславский Г.М. Стохастическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
- [17] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [18] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
- [19] Короновский А.А., Храмов А.Е., Стародубов А.В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10 (5). С. 25–30.
- [20] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV (10). С. 880–886.
- [21] Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11 (1). С. 36–46.