

Математическая модель струйного расходомера

© Э.И. Чаплыгин, Ю.В. Земсков, В.В. Корзин

Волжский политехнический институт филиал Волгоградского государственного технического университета, 404121 Волжский, Волгоградская область, Россия
e-mail: george@vlink.ru

(Поступило в Редакцию 16 мая 2003 г. В окончательной редакции 10 ноября 2003 г.)

Предложена математическая модель рабочего процесса струйного измерительного преобразователя расхода жидкости или газа, учитывающая действие глубокой отрицательной обратной связи, образованной соединением управляющих каналов бистабильного струйного элемента.

Струйные расходомеры, чувствительным элементом которых является струя жидкости или газа, вытекающая из канала питания струйного элемента и создающая пульсации давления с частотой, пропорциональной скорости потока рабочей среды, появились сравнительно недавно и не получили еще широкого распространения [1,2]. К настоящему времени не накоплена исчерпывающая экспериментальная база и не получено завершеного теоретического описания рабочего процесса измерительных преобразователей расхода, действующих на данном принципе, что играет не последнюю роль в задержке практического использования расходомеров этого типа. Вместе с тем очевидны достоинства такого способа измерения расхода (простота и надежность преобразователя, отсутствие подвижных частей, частотный измерительный сигнал, возможность измерения расхода агрессивных и криогенных сред, малая зависимость характеристик от внешних факторов и свойств рабочей среды, малая инерционность измерения, возможность измерения расхода пульсирующих потоков без существенного снижения точности; радиационная стойкость преобразователя, взрыво- и пожаробезопасность; неподверженность действию электромагнитных полей) позволяют говорить о достаточной перспективности данного метода.

Рассмотрим рабочий процесс в камере дискретного струйного элемента [3] без вентиляционных каналов, работающего на эффекте притяжения струи к стенке, в качестве внешней обратной связи (ОС), в котором используется соединение обоих управляющих каналов (рис. 1).

Канал питания 1 (обычно прямоугольного сечения) формирует струю измеряемой среды, угол отклонения которой относительно оси рабочей камеры 4 зависит от разности давлений в управляющих каналах 2 и 3 . При малейшем отклонении струи, например вниз (рис. 1), благодаря ее эжектирующему действию в области вблизи нижней стенки рабочей камеры образуется область пониженного давления, а это приводит к отклонению струи к данной стенке, что влечет за собой уменьшение размеров пристеночной области, уменьшение давления в ней и, как следствие, увеличение действующего на струю поперечного перепада давлений и ее дальнейшее искривление (эффект Коанда [3]). Таким образом, в струйных

элементах, имеющих закрытую рабочую камеру (без вентиляционных каналов), действует внутренняя положительная ОС, вызванная эффектом Коанда: отклонение основной струи в какую-либо сторону относительно оси устройства приводит к лавинообразному процессу, заканчивающемуся притяжением струи к ближайшей стенке рабочей камеры.

Соединение управляющих каналов элемента создает внешнюю отрицательную ОС: при отклонении струи вниз благодаря ее эжектирующему действию давление в нижнем управляющем канале 3 становится меньше, чем в верхнем канале 2 , и возникает движение рабочей среды по трубке ОС 7 в сторону нижнего управляющего канала. Отток рабочей среды из верхней области рабочей камеры и приток ее к нижней части вызывает отклонение основной струи вверх. При этом разность давлений в управляющих каналах уменьшается, но движение среды в трубке ОС продолжается благодаря инерционности среды. В момент, когда угол отклонения основной струи становится нулевым (а следовательно, давления в управляющих каналах уравниваются), скорость среды в трубке ОС и угловая скорость основной струи достигают максимального значения. Движущаяся по инерции среда способствует дальнейшему отклонению основной струи вверх. Теперь уменьшается давление в верхнем управляющем канале, из-за чего уменьшается скорость движения среды в трубке ОС, по-прежнему направленная пока в сторону нижнего управляющего канала, а следовательно, уменьшается и угловая скорость основ-

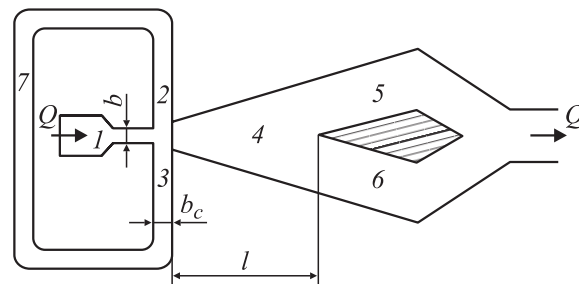


Рис. 1. Струйный измерительный преобразователь расхода с аэрогидродинамической обратной связью: 1 — канал питания; $2, 3$ — управляющие каналы; 4 — рабочая камера; $5, 6$ — выходные каналы; 7 — трубка обратной связи.

ной струи. Наконец, струя примыкает к верхней стенке, разность давлений в управляющих каналах достигает максимума, а скорость среды в трубке ОС снижается до нуля, после чего изменяет свое направление. Под действием разности давлений в управляющих каналах снова начинается движение среды в трубке ОС, но теперь уже в сторону верхнего управляющего канала. Далее процесс повторяется симметрично.

Предыдущие попытки рассмотрения колебаний в струйных автогенераторах наталкивались на трудности количественного описания механизма переключения основной струи. Так, в [1] утверждается, что рассматриваемый расходомер генерирует релаксационные колебания, а в [4] при рассмотрении механизма переключения струи предполагается, что отрыв основной струи от стенки рабочей камеры происходит исключительно благодаря только притоку среды из управляющего канала. Однако проведенные экспериментальные исследования показали, что колебания давления в управляющих каналах близки к синусоидальным, а визуализация течений в прозрачных моделях [5] не подтвердили предположение о релаксационном характере колебаний.

В данной работе (как и в [4]) предлагается рассматривать движение основной струи в рабочей камере струйного генератора как гармонические колебания упругой струны. Такое поведение струи, не характерное для обычных режимов работы дискретных элементов пневмоники, использующих эффект притяжения струи к стенке, можно объяснить тем, что при надлежащем выборе размеров управляющих каналов и трубки ОС рабочая точка дискретного элемента выводится в линейную область характеристики.

Основываясь на данном предположении, рассмотрим процесс переключения в струйном автогенераторе. Из закона сохранения углового момента [6] при рассмотрении динамики выделенного объема жидкости (рис. 2)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \iiint_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} dV - \iint_S \mathbf{r} \times \rho d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{r} \times (T_\mu \cdot d\mathbf{S}),$$

где p и ρ — давление и плотность рабочей среды; F — объемные силы (на единицу массы); S — поверхность, ограничивающая рассматриваемый объем V ; T_μ — тензор напряжений.

Пренебрегая объемными силами и считая среду несжимаемой, получим для двумерного случая

$$\iint_\sigma \rho(\dot{u} + u^2/R) s ds dy - \iint_\sigma \rho(\dot{u} - uv/R) y ds dy = m_1 + m_2,$$

где точками обозначено дифференцирование по времени t ; σ — поверхность рассматриваемого двумерного

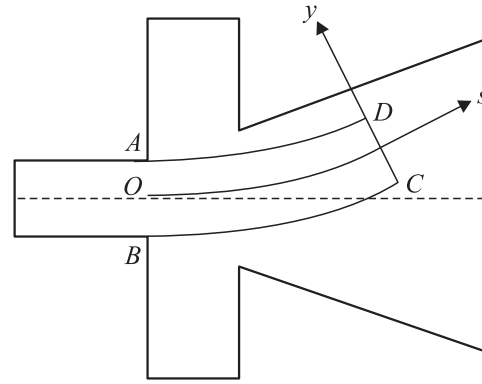


Рис. 2. К выводу уравнения колебания струи в рабочей камере дискретного элемента.

участка среды (на рис. 2 — $AOB CD$); u и v — аксиальная и радиальная компоненты скорости; R — радиус кривизны осевой линии струи; s — криволинейная координата, измеряемая вдоль оси струи; y — координата, нормальная к оси струи;

$$m_1 = \int_0^s (p_1 - p_2) s ds; \quad m_2 = -sb\mu d\theta/dt;$$

моменты m_1 и m_2 берутся относительно центра выходного сечения питающего канала; θ — угол отклонения осевой линии струи относительно оси канала питания; p_1 и p_2 — давления в управляющих каналах.

Рассматривая движение основной струи как колебания упругой струны, т.е. считая, что

$$v = s d\theta/dt; \quad u = u_0 - y d\theta/dt,$$

где u_0 — скорость на оси струи, получим

$$\begin{aligned} \iint_\sigma \rho \dot{v} s ds dy &\approx \rho \iint_\sigma s^2 \ddot{\theta} ds dy = \rho b s^3 \ddot{\theta} / 3, \\ \iint_\sigma (\rho u^2 s / R) ds dy &\approx \rho u_0^2 b s^2 / 2R, \\ - \iint_\sigma \rho u y ds dy &\approx \rho \iint_\sigma y^2 \ddot{\theta} ds dy = \rho b^3 s \ddot{\theta} / 12. \end{aligned}$$

Если выполняются следующие условия:

$$y \ll s, \quad v \ll u, \quad \rho u v y \ll \rho u_0^2 s,$$

то

$$\iint_\sigma \frac{\rho u v}{R} y ds dy \ll \iint_\sigma \frac{\rho u^2 s}{R} ds dy.$$

Полагая $s = b_c$, где b_c — ширина управляющих каналов, приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{\theta} + \frac{12\nu}{b^2 + 4b_c^2} \dot{\theta} + \frac{6u_0^2}{b^2 + 4b_c^2} \theta = \frac{6b_c p_c}{\rho b (b^2 + 4b_c^2)}, \quad (1)$$

где угол θ берется при $s = b_c$; $p_c = p_2 - p_1$; ν — кинематическая вязкость.

Результаты экспериментов

l , mm	l_f , mm	b_c , mm	d_f , mm	Эксперимент		Уравнение (9)		Погрешность f/Q , %
				f , Hz	f/Q , m^{-3}	f , Hz	f/Q , m^{-3}	
36.2	630	9.9	8	5.4	2680	5.6	2800	5
36.2	630	9.9	10	7.1	3560	7.1	3540	1
36.2	705	8.1	8	5.8	2900	5.9	2940	2
36.2	705	8.1	10	7.3	3620	7.5	3705	3
26.2	630	8.1	8	6.1	4100	6.4	4300	6
26.2	630	8.1	10	10.6	5290	10.8	5410	3
26.2	630	9.9	8	—	3730	—	3700	1
26.2	705	9.9	10	6.5	4300	6.9	4610	7

При выполнении условия $u_0 \gg 2\nu\omega$, где $\omega = 2\pi f$, f — частота колебаний, можно пренебречь вторым слагаемым в (1), а если $bu_0^2/(b^2 + 4b_y^2) \gg \omega^2$, то можно пренебречь и первым, тогда уравнение (1) сведется к выражению

$$\theta/p_c = b_c/\rho bu_0^2. \quad (2)$$

Смещение струи на $d\theta$ вытесняет в один из управляющих каналов объем

$$dV = \frac{hl}{2}dy = \frac{hl^2}{2}d\theta = \frac{hl^2b_c}{2\rho bu_0^2}dp_c,$$

но

$$dV/dt = -S_f v_f \equiv -q_f,$$

где S_f — площадь поперечного сечения канала ОС, v_f — средняя по расходу скорость среды в нем, h — высота рабочей камеры.

Тогда получаем

$$-\frac{hl^2b_c}{2S_f\rho bu_0^2} \frac{dp_c}{dt} = u_f \quad (3)$$

(„минус“ учитывает, что смещение струи в сторону меньшего управляющего давления заставляет рабочую среду в канале двигаться в сторону большего давления).

Для трубки обратной связи запишем уравнение Даламбера

$$p_c(t) = R_f q_f(t) + L_f \frac{dq_f}{dt},$$

где активное сопротивление R_f и индуктивность L_f вычисляются по формулам

$$R_f = 8\chi_a \rho \nu l_f / \pi r_f^4; \quad L_f = \chi_r \beta \rho l_f / \pi r_f^2,$$

l_f и r_f — длина и радиус трубки ОС, коррективы χ_a и $\chi_r \beta$ учитывают неустановившийся характер течения рабочей среды [7].

Как показывают проведенные эксперименты, для преобразователей рассматриваемого типа в первом приближении корректив $\chi_r \beta$ можно считать равным 1, а значение корректива χ_a вычислять по формуле

$$\chi_a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_f^2 \omega}{8\nu}} + 0.4.$$

В результате приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{p}_c + \frac{32\chi_a \nu}{d_f^2} \dot{p}_c + \frac{\pi d_f^2 b u_0^2}{2hb_c l^2 l_f} p_c = 0 \quad (4)$$

(где $d_f = 2r_f$ — диаметр сечения трубки ОС), описывающему колебания с частотой

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d_f^2 b u_0^2}{2hb_c l^2 l_f} - \frac{256\chi_a^2 \nu^3}{d_f^4}}. \quad (5)$$

Если выполняется условие

$$\frac{\pi d_f^6 Q^2}{512\chi_a^2 \nu^2 h^3 b b_c l^2 l_f} \gg 1, \quad (6)$$

где $Q = u_0 h b$ — объемный расход рабочей среды, то вязкостью среды можно пренебречь, следовательно, частота колебаний будет прямо пропорциональна объемному расходу рабочей среды

$$f = \frac{u_0 d_f \sqrt{b}}{2l \sqrt{2\pi h b_c l_f}} = \frac{Q d_f}{2l \sqrt{2\pi h^3 b b_c l_f}}. \quad (7)$$

Формула (7) описывает влияние объемного расхода рабочей среды и геометрических размеров струйного генератора на частоту его колебаний. Условие (6) определяет нижний предел Q_{\min} , при котором частота генерации пропорциональна расходу и не зависит от вязкости среды.

Уравнение (4) и формула (7) получены с использованием приближенной формулы Даламбера. При точном решении уравнений гидродинамики для случая несжимаемой жидкости при гармоническом воздействии, вызвав точное решение в виде модифицированных функций Бесселя, выполнив их разложение в ряд и удержав только первые два члена, получим для амплитуд объемного расхода Q_f в трубке ОС и амплитуды разности давлений в управляющих каналах P_c следующее выражение (громоздкие выкладки опускаем):

$$Q_f = \frac{P_c d_f^2}{8\rho l_f f \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{\nu/\pi f}}{d_f} - \dots}}, \quad (8)$$

откуда для частоты колебаний получаем уравнение

$$f = Qd_f \left(1 - \sqrt{\frac{v}{\pi f d_f^2}} \right) \frac{1}{2l \sqrt{2\pi h^3 b b_c l_f}}. \quad (9)$$

Заметим, что при $f \gg v/\pi d_f^2$ из уравнения (9) следует линейная зависимость частоты f от расхода Q с тем же коэффициентом пропорциональности, что и в формуле (7).

Если используется канал ОС прямоугольного сечения $h_f \times b_f$, то вместо (9) имеем

$$f = Q \frac{\sqrt{h_f b_f}}{\pi l \sqrt{2h^3 b b_c l_f}} \left(1 - \frac{h_f + b_f}{h_f b_f} \sqrt{\frac{v}{4\pi f}} \right).$$

Задавая для характеристики преобразования $f = f(Q)$ максимально допустимое отклонение δ от линейной зависимости

$$\delta = \frac{h_f + b_f}{h_f b_f} \sqrt{\frac{v}{4\pi f}},$$

получим выражение для минимального измеряемого расхода

$$Q_{\min} = \frac{(h_f + b_f)^2 v l}{4\delta^2} \sqrt{\frac{2h^3 b b_c l_f}{h_f^5 b_f^5}},$$

откуда при $h_f = h$ находим, что минимально возможное значение Q_{\min} достигается при равенстве ширины b_f канала ОС и высоты элемента $b_f = h_f = h$.

Для проверки построенной математической модели был повторен эксперимент, описанный в [4]. Результаты приведены в таблице (экспериментальные и расчетные значения частоты колебаний указаны для расхода $Q = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$).

Использовался струйный бистабильный элемент, имеющий следующие геометрические размеры: $b = 4.7 \text{ мм}$, $h = 20.2 \text{ мм}$, $l = 26.2$ и 36.2 мм , $l_f = 630$ и 705 мм , $b_c = 8.1$ и 9.9 мм , $d_f = 8$ и 10 мм .

Таким образом, построенная математическая модель рабочего процесса струйного измерительного преобразователя расхода позволяет при проектировании проводить теоретический расчет характеристики преобразования $f(Q)$ и оценивать диапазон измеряемых расходов Q , при которых отклонение характеристики от линейной не превышает наперед заданной величины.

Список литературы

- [1] *Кремлевский П.П.* Расходомеры и счетчики количества. Справочник. 4-е изд. Л.: Машиностроение, 1989. 701 с.
- [2] *Трескунов С.Л., Аристов П.А., Барыкин Н.А.* // Приборы и системы управления. 1990. № 11. С. 24–26.
- [3] *Залманзон Л.А.* Теория элементов пневмоники. М.: Наука, 1989. 508 с.
- [4] *Wu S.-G., Su H.-N., Wang L.-J.* // 20th Anniversary Fluidic Symposium. 1980. P. 49–54.

- [5] *Земсков Ю.В., Чаплыгин Э.И.* Всероссийская конф. „Пневмогидроавтоматика-99“. М.: Институт проблем управления, 1999. С. 177–178.
- [6] *Лойцянский Д.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [7] *Попов Д.Н.* Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. М.: Машиностроение, 1976. 424 с.