

01

## Управление энтропией динамических систем с дискретным и непрерывным временем

© С.Н. Владимиров, А.А. Штраух

Томский государственный университет,  
634050 Томск, Россия  
e-mail: vsn@re.tsu.ru, vsn@ic.tsu.ru

(Поступило в Редакцию 14 августа 2003 г. В окончательной редакции 22 декабря 2003 г.)

Рассмотрена динамика модифицированного логистического отображения при модуляции параметра порядка внешним сигналом. Показано, что изменение коэффициента модуляции приводит к изменению энтропии Колмогорова–Синяя, а в качестве модулирующих сигналов могут быть использованы как гармонические сигналы, так и белый шум. Установлены условия возбуждения в фазовом пространстве регулярных и странных нехаотических аттракторов.

### Введение

В настоящее время хаотические колебания обнаружены в объектах самой различной природы, начиная от грубых механических систем и заканчивая высокоорганизованными биологическими системами. В теоретических и прикладных исследованиях детерминированного хаоса можно выделить ряд приоритетных направлений, таких как поиск новых сценариев перехода от регулярных движений к хаотическим, способы генерации динамического хаоса, изучение взаимодействий хаотических систем и возможных типов их коллективного поведения, нетрадиционная динамика и информационные процессы, управление энтропией динамических систем с непрерывным и дискретным временем. Последнее направление обусловлено потребностями как в возбуждении, так и в подавлении хаотических типов колебаний в одной и той же динамической системе [1–6].

Управление степенью упорядоченности движений помимо чисто теоретического интереса имеет и важное прикладное значение. Так, на основе динамических систем с хаотическими типами колебаний возможно построение систем радиомаскировки и радиопротиводействия, шумовой радиолокации, конфиденциальной связи, нетрадиционного воздействия на биологические объекты [7–9]. Однако в ряде случаев возникновение и развитие режимов детерминированного хаоса являются крайне нежелательными.

Целью настоящей работы является исследование одного из возможных способов управления степенью упорядоченности движения — модуляцией параметра порядка внешним сигналом, в качестве которого использовались гармоническое колебание и белый шум.

### Математическая модель и ее аналитическое исследование

В качестве объекта исследования нами выбрана система с дискретным временем — модифицированное логистическое отображение [10]. После добавления множителя, обеспечивающего модуляцию параметра порядка,

это отображение примет следующий вид:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \text{ mod } 1,$$

$$\Phi(x_n) = 1 - \alpha_0 \left[ 1 + m \sin \left( \frac{2\pi}{T} n + \varphi_0 \right) \right] |x_n|. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha_0 \geq 1$  — параметр порядка;  $0 \leq m \leq 1$  — коэффициент модуляции параметра порядка — управляющий параметр;  $T$  и  $\varphi_0$  — период внешней силы и ее начальная фаза соответственно;  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  — дискретное время. Отображение (1) является моделью неавтономной динамической системы, на которую внешняя периодическая сила действует параметрическим образом. В автономном случае  $m = 0$  параметр порядка  $\alpha_0$  определяет степень хаотичности движения  $\{x_n\}$ , при этом энтропия Колмогорова–Синяя вычисляется точно и имеет значение  $K = \log_2 \alpha_0$  [10].

Кусочно-линейное отображение (1) представляет собой два луча, исходящие из точки  $(x = 0, \Phi(x) = 1)$  под углом  $\theta$  и уходящие в  $-\infty$ . При фиксированных значениях  $\alpha_0$  и  $m$  с изменением дискретного времени  $n$  угол  $\theta$  изменяется с периодом  $T$  в пределах от  $\theta_{\min} = \pi - 2 \arctg[\alpha_0(1 + m)]$  до  $\theta_{\max} = \pi - 2 \arctg[\alpha_0(1 - m)]$ , что приводит к периодическому изменению локального характеристического показателя Ляпунова.

Действительно, локальный ляпуновский показатель  $\lambda_n$  вычисляется аналитически и определен соотношением

$$\lambda_n = \log_2 \left| \frac{d\Phi(x_n)}{dx_n} \right|$$

$$= \log_2 \alpha_0 \left[ 1 + m \sin \left( \frac{2\pi}{T} n + \varphi_0 \right) \right], \quad (2)$$

из которого следует, что он является  $2\pi$ -периодической функцией дискретной фазы  $\tau_n = 2\pi n/T + \varphi_0$ . За период действия внешней силы  $\lambda_n$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, при различных значениях  $\tau_n$  может быть или отсутствовать существенная зависимость от начальных условий, т.е.

может существовать или отсутствовать перемешивание фазовых траекторий.

Характеристический показатель Ляпунова  $\Lambda$ , вычисляемый как среднее вдоль всей временной реализации  $\{x_n\}$

$$\Lambda = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n, \quad (3)$$

в силу периодичности  $\lambda_n$  достаточно вычислять на интервале  $[0 \dots 2\pi]$ . Переходя от дискретной фазы  $\tau_n$  к непрерывной, получим

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\tau) d\tau = \log_2 \alpha_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log_2(1 + m \sin \tau) d\tau \\ &= \log_2 \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 - m^2}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $\Lambda < 0$ , то в среднем движение на аттракторе упорядочено, и, наоборот, если  $\Lambda > 0$ , то движение хаотично. Поэтому, приравняв правую часть (4) нулю, можно определить критическое значение  $\hat{m}$ , разделяющее хаотические и нехаотические режимы

$$\hat{m} = \frac{2}{\alpha_0} \sqrt{\alpha_0 - 1}. \quad (5)$$

Важно отметить, что в последнее соотношение не входит ни период внешней силы, ни ее начальная фаза, поэтому тип движения в системе определяется только параметрами  $\alpha_0$  и  $m$ . Это означает, что определяющую роль играют лишь силовые, энергетические соотношения. Внешнее воздействие не изменяет свойство грубости, присущее автономной системе [10], следовательно, и основные свойства модели (1) качественно не изменяются при малых вариациях ее параметров.

Энтропия Колмогорова–Синяя (далее просто энтропия) для отображения (1), согласно известной теореме [11], определяется соотношением

$$K = \int_0^{\infty} \rho(x) \Lambda(x) dx,$$

в котором  $\rho(x)$  — инвариантная вероятностная мера динамической системы. Поскольку динамика рассматриваемого отображения протекает в ограниченной области фазового пространства, то для временного ряда, порожденного таким отображением, вероятностная мера существует всегда [12]. В нашем случае  $\Lambda$  не зависит от  $x$ , поэтому с учетом условия нормировки  $K \equiv \Lambda$ . При дальнейшем изложении мы не будем различать эти два понятия и отождествлять ляпуновский характеристический показатель модели (1) с ее энтропией.

До сих пор речь шла о свойствах системы с дискретным временем, причем о способе построения модели (1) ничего не сообщалось. В то же время известно, что многим системам с дискретным временем можно сопоставить некоторую потоковую систему, что в полной

мере относится и к рассматриваемому отображению. Модель (1) тождественно преобразуется к системе двух автономных отображений

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \alpha_0(1 + m \sin 2\pi\psi_n)|x_n|, & \text{mod } 1, \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{T}, & \text{mod } 1, \end{cases} \quad (6)$$

которые описывают динамику уже нелинейной системы с непрерывным временем, подверженную бигармоническому внешнему возбуждению с периодами  $T_1$  и  $T$ .

Действительно, первое из уравнений системы (6) получается при стробоскопических сечениях движения исходной потоковой системы, проводимых с периодом  $T_1$ , при этом само первое воздействие исключается. Одна итерация в дискретном времени  $n$  соответствует периоду первого гармонического воздействия  $T_1$ .

Поскольку для фазы внешнего воздействия справедливо соотношение

$$\psi_n = \psi_0 + \frac{1}{T} n, \text{ mod } 1,$$

то число вращения  $\Theta$  определится следующим образом:

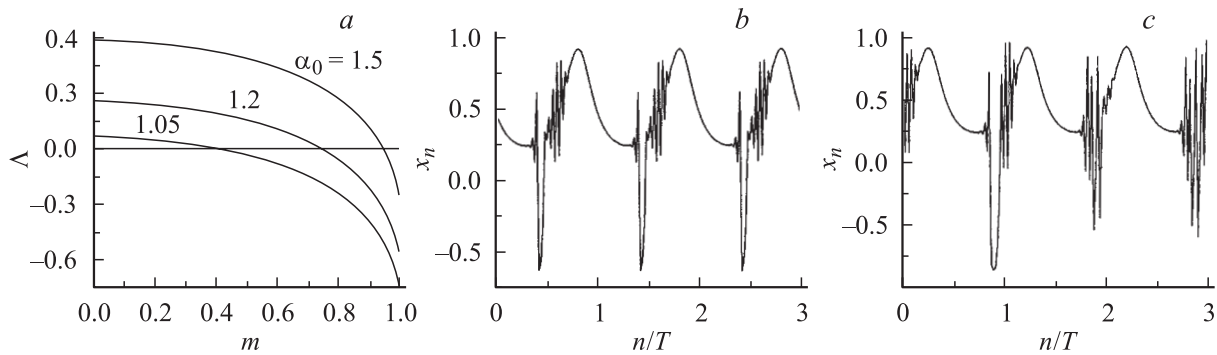
$$\Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n - \psi_0}{2\pi n} = \frac{1}{T}. \quad (7)$$

Если  $T$  является иррациональным числом, то внешнее воздействие квазипериодическое, в противном случае — периодическое. Таким образом, результаты, полученные для модели (1), могут быть в полной мере отнесены и к системам с непрерывным временем указанного вида.

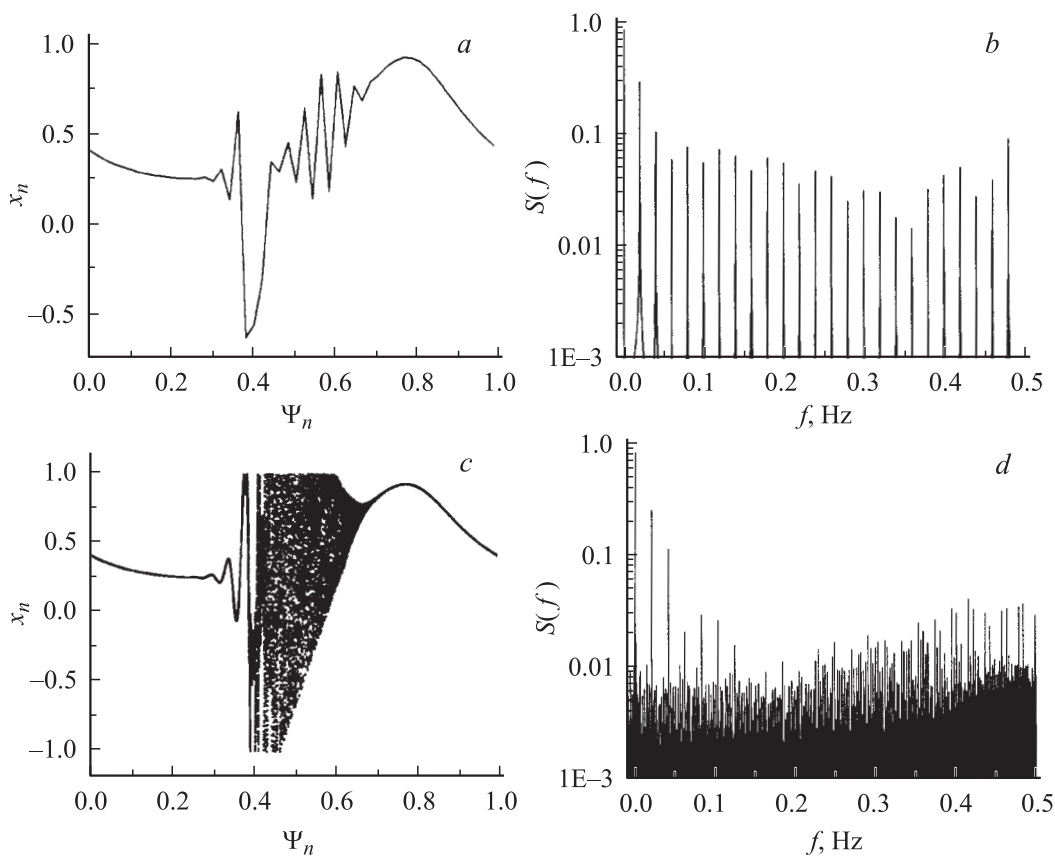
На этом возможности аналитического исследования моделей (1), (6) исчерпываются. В следующих разделах приведены результаты численных экспериментов.

## Гармоническое внешнее воздействие

Рассмотрим влияние управляющего параметра  $m$  на динамику моделей (1), (6) при различных значениях параметра порядка  $\alpha_0$ . Расчеты проводились по соотношению (4) и численно с использованием алгоритма [13] по достаточно длительной реализации временного ряда  $\{x_n\}$ . Оба способа показали идентичные результаты (рис. 1, а). При любом значении параметра порядка существует такое значение  $\hat{m}$ , которое разделяет хаотические и нехаотические типы колебаний. Зависимость  $\Lambda(m, \alpha_0)$  представляет собой монотонно убывающую функцию, следовательно, управляющий параметр „мягко“ изменяет энтропию системы, степень упорядоченности движений в ней. Характер движения принципиально отличается при близких, но рациональных и иррациональных значениях числа вращения. Если период модуляции рационален, то временной ряд периодичен (рис. 1, б), в противном случае периодичность отсутствует (рис. 1, с). В то же время видно, что движения имеют и сходные черты. В те моменты времени, когда локальный показатель Ляпунова отрицателен, переменная  $x_n$  представляет собой



**Рис. 1.** Зависимость характеристического показателя Ляпунова  $\Lambda$  системы (1) от управляющего параметра  $m$  при различных значениях параметра порядка  $\alpha_0$  (a). Фрагменты временных реализаций  $x_n$ , рассчитанные при  $m = 0.95$ . Период модулирующего сигнала  $T = 50$  рационален (b) и иррационален  $T = 20/(\sqrt{2} - 1) \approx 48.284271$  (c).



**Рис. 2.** Фазовый портрет (a) и фурье-спектр (b) системы (6), рассчитанные при  $\alpha_0 = 1.5$ ,  $m = 0.95$  и рациональном значении числа вращения  $\Theta = 0.02$ . Фазовый портрет (c) и фурье-спектр (d), рассчитанные при тех же значениях  $\alpha_0$  и  $m$ , но при иррациональном значении числа вращения  $\Theta = (\sqrt{2} - 1)/20 \approx 0.020711$  (d). При этом размерности аттрактора имели следующие значения: емкость аттрактора (фрактальная размерность)  $D_C \approx 1.478$ , информационная размерность  $D_I \approx 1.251$ , корреляционная размерность  $D_{cor} \approx 1.077$ .

гладкую функцию, период изменения которой совпадает с периодом модуляции. Если локальный ляпуновский показатель становится положительным, характер движения качественно изменяется, его характерный временной масштаб уже не связан с периодом внешней силы и проявляется локальное экспоненциальное разбегание фазовых траекторий, хотя в среднем на аттракторе перемешивание отсутствует.

Более полное представление о характере движения при  $m > \hat{m}$  можно составить, анализируя его фазовые портреты и фурье-спектры (рис. 2). Фазовые портреты строились на единичном квадрате с отождествленными сторонами, что топологически эквивалентно двумерному тору.

В случае рационального значения внешней силы траектория представляет собой негладкую замкнутую

линию (рис. 2, *a*), что указывает на периодичность движения. Негладкость траектории обусловлена негладкостью порождающего отображения. На периодичность движения указывает и линейчатый фурье-спектр, представляющий собой набор эквидистантных гармоник с частотным интервалом между ними  $\Delta f = 1/T$ .

При иррациональном значении числа вращения аттрактор отображения качественно отличен от предыдущего случая (рис. 2, *c*). Рассчитанные по алгоритму [14,15] размерности оказались дробными величинами. Нецелые значения размерностей в сочетании с отрицательным значением ляпуновского показателя указывают, что наблюдается странный нехаотический аттрактор. При этом в системе существует сложное непериодическое движение, аттрактор не является регулярным по своей геометрической структуре, но в то же время само движение асимптотически устойчиво. Емкость аттрактора — это чисто геометрическая мера, а информационная размерность учитывает частоту, с которой точки  $\{x_n\}$  посещают различные участки аттрактора, что и обуславливает расхождение в числовых значениях размерностей. Фурье-спектр (рис. 2, *d*) является сингулярно-непрерывным, т.е. занимает промежуточное положение между дискретным и непрерывным спектрами. На сплошном пьедестале спектра выделяются компоненты с частотой внешнего воздействия и ее гармоник. Кроме того, он содержит множество гармонических компонент, частоты которых не связаны с внешним воздействием, что достаточно типично для странных нехаотических аттракторов [16].

В заключение настоящего раздела отметим, что рождение странного нехаотического аттрактора при квазигармоническом возбуждении наблюдалось ранее только при исследовании гладких динамических систем, таких как отображение окружности, отображение Эно, логистическое отображение, отображение Гребоджи–Пеликана–Йорка. Полученные нами результаты позволяют обобщить ранее установленные закономерности и на негладкие системы.

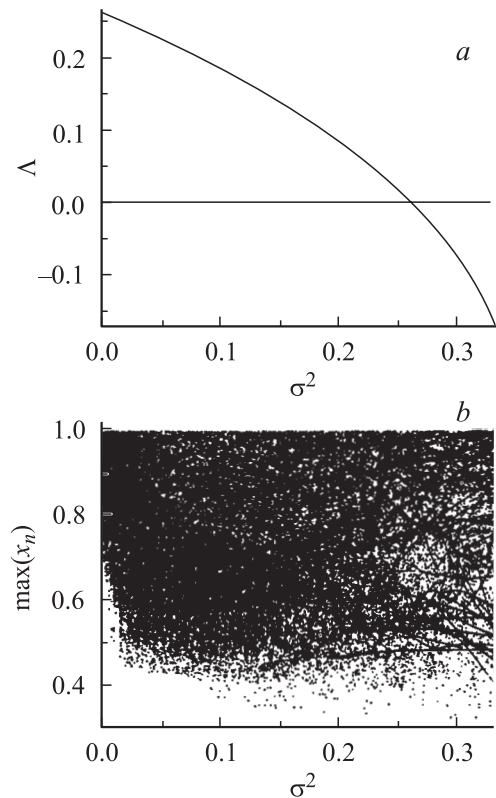
## Воздействие белым шумом

Уместно задаться нетривиальным вопросом о возможности управления энтропией динамической системы в том случае, когда внешнее воздействие не упорядочено, более того, представляет собой крайний случай неупорядоченного процесса — белый шум. Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим динамическую систему вида

$$x_{n+1} = 1 - \alpha_0(1 + \xi_n)|x_n|, \quad (8)$$

где  $\xi_n$  — белый шум с равномерным и симметричным законом распределения относительно точки  $x = 0$ , нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ ; в качестве управляющего параметра выберем дисперсию белого шума.

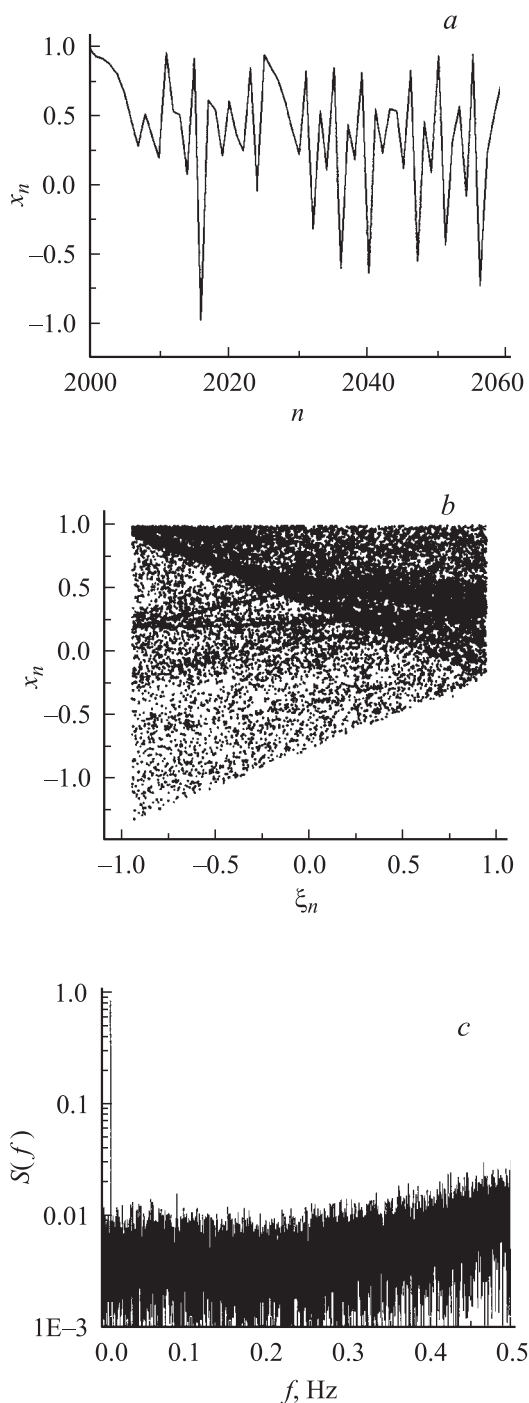
Вначале исследуем влияние на динамику модели управляющего параметра. Результаты расчетов представлены на рис. 3, анализ которого позволяет установить следующее. Энтропия системы изменяется при



**Рис. 3.** Зависимость характеристического показателя Ляпунова  $\Lambda$  системы (8) от дисперсии белого шума  $\sigma^2$  (*a*) и бифуркационная диаграмма (*b*), рассчитанные при  $\alpha_0 = 1.2$ . Критическое значение дисперсии, разделяющее хаотическое и регулярное движения  $\hat{\sigma}^2 \cong 0.275$ .

варьировании  $\sigma^2$ , с увеличением дисперсии белого шума энтропия уменьшается (рис. 3, *a*) и при критическом значении  $\hat{\sigma}^2$  принимает отрицательные значения. Беспорядок рождает упорядочение. Анализ бифуркационной диаграммы (рис. 3, *b*) не позволяет визуально определить критическое значение дисперсии. Следовательно, геометрическая структура аттрактора в окрестности  $\hat{\sigma}^2$  изменяется слабо.

Как и в случае гармонического внешнего воздействия, исследуем динамику модели и ее фурье-спектр, ограничившись случаем  $\sigma^2 > \hat{\sigma}^2$ . Результаты расчетов представлены на рис. 4. Временная реализация  $\{x_n\}$  (рис. 4, *a*) представляет собой ограниченный непериодический процесс, имеющий в фазовом пространстве сложную геометрическую структуру (рис. 4, *b*). Фрактальная и информационная размерности возрастают по сравнению со случаем гармонического внешнего воздействия, приближаясь к предельно возможному значению, равному двум. Отрицательный ляпуновский показатель и дробные значения размерностей указывают, что в случае воздействия белым шумом в системе возбужден странный нехаотический аттрактор. Фурье-спектр (рис. 4, *c*) равномерен, по своей структуре близок к спектру белого шума и, за исключением постоянной составляющей, не имеет регулярных гармонических компонент. Это на-



**Рис. 4.** Фрагмент временной реализации  $x_n$  (a), фазовый портрет (b) и фурье-спектр (c), рассчитанные при  $\alpha_0 = 1.2$ ,  $\sigma^2 = 0.3$ . Емкость аттрактора  $D_C \approx 1.839$ , информационная размерность  $D_I \approx 1.837$ , корреляционная размерность  $D_{cor} \approx 1.744$ .

рушает привычные представления о сингулярно-непрерывной форме спектра, присущей странному нехаотическому аттрактору. Поэтому в предыдущем разделе мы говорили о типичности такого спектра, а не об его универсальности.

## Заключение

В работе исследованы неавтономные динамические системы с дискретным и непрерывным временем. Показана возможность управления энтропией Колмогорова–Синая этих систем, степенью упорядоченности их движения не только гармоническим воздействием, но и белым шумом. Поскольку воздействие первого рода является регулярным, а второго рода — предельно неупорядоченным, то полученные результаты имеют высокую степень общности. Впервые показана возможность возбуждения странного нехаотического аттрактора в негладких динамических системах и в отсутствие квазипериодического воздействия.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность профессору Саратовского университета Т.Е. Вадивасовой за разъяснение ряда вопросов, возникших при подготовке настоящей работы и профессору Калифорнийского университета Д. Сарэйлу за предоставление программы расчета фрактальных размерностей и ценные советы по интерпретации возвращаемых ей результатов.

## Список литературы

- [1] Abarbanel H.D., Korzinov L., Mees A.I., Starobinets I.M. // Syst. Control Lett. 1997. Vol. 31. N 5. P. 263–276.
- [2] Grebogy C., Lai Y.C. // Syst. Control Lett. 1997. Vol. 31. N 5. P. 307–312.
- [3] Безручко Б.П., Иванов Р.Н., Пономаренко В.И. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 4. С. 61–67.
- [4] Alexeyev A.A., Shalfeev V.D. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5. N 2. P. 551–557.
- [5] Vincent T., Yu J. // Dynamics and Control. 1991. Vol. 1. P. 35–52.
- [6] Долов А.М., Кузнецов С.П. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 8. С. 139–142.
- [7] Кислов В.Я. // РиЭ. 1993. Т. 38. № 10. С. 1783–1815.
- [8] Владимиров С.Н., Золотов С.В., Негруль В.В. и др. // Электронная пром-сть. 2002. № 2–3. С. 154–156.
- [9] Hasler M. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8. N 4. P. 647–659.
- [10] Владимиров С.Н., Негруль В.В. // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8. № 6. С. 53–64.
- [11] Песин Я.Б. // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 55–72.
- [12] Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
- [13] Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M. // Phys. Rev. 1976. Vol. A14. P. 2338–2345.
- [14] Liebovitch S., Toth T. // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 141. P. 386–390.
- [15] Sarraillie J.J., Myers L.S. // Educational and Psychological Measurement. 1994. Vol. 54. N 1. P. 94–97.
- [16] Анищенко В.С. // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5. № 1. С. 109–127.