01;03

О нелинейных поправках к частотам осцилляций заряженной капли в несжимаемой внешней среде

© А.Н. Жаров, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 ноября 2003 г.)

В третьем порядке малости по величине амплитуды начальной деформации равновесной сферической формы заряженной идеально проводящей капли в несжимаемой диэлектрической среде найдено аналитическое выражение для образующей ее формы и для нелинейных поправок к частотам осцилляций. Показано, что наличие жидкости, окружающей каплю, приводит к снижению абсолютной величины поправок к частотам и собственного заряда, критического для реализации неустойчивости капли.

1. Задача исследования нелинейных осцилляций заряженной капли во внешней диэлектрической среде представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1,2]. Поэтому она уже становилась предметом теоретического анализа во втором порядке малости как в случае несжимаемой [3], так и в случае сжимаемой внешней среды [4], но за рамками проведенных исследований остался вопрос о нелинейных поправках к частотам осцилляций, проявляющихся лишь в третьем порядке малости [5–7]. В связи со сказанным и проведено настоящее исследование.

2. Пусть имеется сферическая капля радиуса R, имеющая заряд, равный Q, идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью $\rho_{(i)}$ и коэффициентом поверхностного натяжения σ, находящаяся в идеальной несжимаемой жидкости плотности $\rho_{(e)}$ с диэлектрической проницаемостью ε_d в условиях отсутствия гравитации. Движение жидкости в капле и внешней среде примем потенциальным с потенциалами скоростей $\psi_{(i)}$ и $\psi_{(e)}$ соответственно. Потенциал электрического поля в окрестности капли обозначим ϕ. Форму капли будем считать осесимметричной как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение границы раздела сред в безразмерных переменных, в которых $\rho_{(i)} = 1$, $R = 1$, $\sigma = 1$ в любой момент времени t, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t). \tag{1}$$

Начальную деформацию сферической формы поверхности капли выберем в виде

$$t = 0: \qquad \xi = \xi_0 P_0(\cos\vartheta) + \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\cos\vartheta) \tag{2}$$

с дополнительным условием

$$t = 0: \qquad \partial_t \xi = 0, \tag{3}$$

где ε — произвольный малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; $P_m(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра порядка m; ξ_0 — константа, подобранная так, чтобы объем капли в начальный момент времени совпадал с объемом равновесной сферы; знак ∂_t означает частную производную по переменной t; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_m — константы, учитывающие вклад m-й моды в формирование начальной формы капли, такие, что $\sum_{m\in\Omega} h_m = 1$.

Полная математическая формулировка задачи о капиллярных колебаниях заряженной капли, кроме уравнения поверхности капли (1) и начальных условий (2), (3), содержит уравнения Лапласа для потенциалов скорости жидкости и электрического поля:

$$\Delta\psi_{(i)} = 0; \qquad \Delta\psi_{(e)} = 0; \qquad \Delta\phi = 0; \tag{4}$$

условия ограниченности потенциалов

$$r \to 0: \qquad \psi_{(i)} \to 0; \tag{5}$$

$$r \to +\infty: \quad \psi_{(e)} \to 0; \qquad \nabla\phi \to 0; \tag{6}$$

кинематическое и динамическое граничные условия

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \partial_t\xi = \partial_r\psi_{(i)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta\psi_{(i)}\partial_\vartheta\xi = \partial_r\psi_{(e)} - \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta\psi_{(e)}\partial_\vartheta\xi, \tag{7}$$

$$\partial_t\psi_{(i)} + \frac{1}{2}(\nabla\psi_{(i)})^2 - \rho_{(e)}\Big(\partial_t\psi_{(e)} + \frac{1}{2}(\nabla\psi_{(e)})^2\Big) = p_0 - p_\infty + p_q - p_\sigma; \tag{8}$$

условие неизменности объема капли

$$\int_V r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{3}, \tag{9}$$

$$V = \big\{r, \vartheta, \varphi \big| \, 0 \le r \le 1 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big\};$$

условие постоянства полного заряда

$$\int_S \mathbf{n}\cdot\nabla\phi\, dS = -4\pi Q;$$

$$S = \big\{r, \vartheta, \varphi \big| r = 1 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big\}; \tag{10}$$

условие постоянства электрического потенциала вдоль поверхности границы раздела сред

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \qquad \phi = \phi_S(t); \tag{11}$$

в выражениях (4)–(11) p_∞, p_0, p_q, p_σ — давления внешней среды на бесконечности, жидкости в центре капли, электрического поля и капиллярного соответственно; **n** — вектор нормали к поверхности капли; ϕ_S — электрический потенциал поверхности капли.

3. Решение задачи (1)–(11) проведем методом многих масштабов [8,9]. В частности, все потенциалы и уравнение образующей формы поверхности будем считать функциями от трех различных временны́х масштабов $T_m = \varepsilon^m t$; $m = 0, 1, 2$ и представим рядами по малому параметру ε

$$\phi(r, \vartheta, t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4); \tag{12}$$

$$\phi_S(r, t) = \sum_{m=0}^{3} \varepsilon^m \phi_S^{(m)}(r, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4); \tag{13}$$

$$\psi_{(i)}(r, \vartheta, t) = \sum_{m=1}^{3} \varepsilon^m \psi_{(i)}^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4); \tag{14}$$

$$\psi_{(e)}(r, \vartheta, t) = \sum_{m=1}^{3} \varepsilon^m \psi_{(e)}^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4); \tag{15}$$

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{m=1}^{3} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4), \tag{16}$$

где $\phi^{(0)} = Q/(\varepsilon_d r)$, $\phi_S^{(0)} = Q/\varepsilon_d$ — решения задачи нулевого порядка малости, т. е. для равновесной сферической поверхности капли.

Подставляя (12)–(16) в (1)–(11), получим задачи различных порядков малости, которые ради краткости изложения вынесены в Приложение А.

Поскольку уравнение Лапласа (4) является линейным, то в каждом порядке малости потенциалы скорости жидкости и электрического поля будут являться решениями уравнений Лапласа (1А), (10А), (19А). Решение этих уравнений с учетом условий ограниченности (2А), (3А), (11А), (12А), (20А), (21А) можно записать в виде

$$\psi_{(i)}^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n D_{(i)n}^{(m)}(T_0, T_1, T_2) P_n(\cos\vartheta);$$
$$m = 1, 2, 3; \tag{17}$$

$$\psi_{(e)}^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{(e)n}^{(m)}}{r^{n+1}} (T_0, T_1, T_2) P_n(\cos\vartheta);$$
$$m = 1, 2, 3; \tag{18}$$

$$\phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta);$$
$$m = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Заметим, что в выражении (17) суммирование начинается с $n = 1$, так как потенциал определяется с точностью до произвольной функции времени, что позволяет принять $D_{(i)0}^{(m)} = 0$.

Функцию, описывающую отклонение формы поверхности капли от сферической, представим в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2) P_n(\cos\vartheta);$$
$$m = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Отметим, что решение сформулированной задачи в третьем порядке малости по ε позволяет выявить зависимость коэффициентов первого порядка малости ($m = 1$) в разложениях (17)–(20) от трех временны́х масштабов T_0, T_1, T_2; коэффициентов второго порядка малости ($m = 2$) — от двух временны́х масштабов T_0, T_1; коэффициентов третьего порядка малости ($m = 3$) — только от времени T_0.

Подставляя выражения (17)–(20) в уравнения (4А)–(9А), найдем явные зависимости всех коэффициентов первого порядка малости от временно́го масштаба T_0:

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = a_n^{(1)}(T_1, T_2) \cos\big(\omega_n T_0 + \tau_n^{(1)}(T_1, T_2)\big); \tag{21}$$

$$D_{(i)n}^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = \partial_{T_0} M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)/n; \tag{22}$$

$$D_{(e)n}^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = -\partial_{T_0} M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)/(n+1); \tag{23}$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2) = Q M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2). \tag{24}$$

В выражении (21) $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $\tau_n^{(1)}(T_1, T_2)$ — функции, зависящие только от временны́х масштабов T_1, T_2 и удовлетворяющие начальным условиям (9А)

$$t = 0: \qquad a_n^{(1)} = h_n \cdot \delta_{n,m}, \quad \tau_n^{(1)} = 0, \quad m \in \Omega, \tag{25}$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Подставляя разложения (17)–(20) и решения (21)–(24) в уравнения (13А)–(18А) и исключая секулярные члены, найдем, что функции $a_n^{(1)}(T_1, T_2)$ и $\tau_n^{(1)}(T_1, T_2)$ не зависят от временно́го масштаба T_1, а зависят только от масштаба T_2, и явные зависимости коэффициентов $D_{(i)n}^{(2)}$, $D_{(e)n}^{(2)}$, $F_n^{(2)}$, $M_n^{(2)}$ в разложениях (17)–(20) от временно́го масштаба T_0 с учетом (25) можно записать в виде

$$M_0^{(2)}(T_0) = -\sum_{m\in\Omega} \frac{\big(a_m^{(1)}\big)^2 \cos^2(\omega_m T_0)}{2m+1};$$

$$M_n^{(2)}(T_0, T_1) = a_n^{(2)}(T_1) \cos\big(\omega_n T_0 + \tau_n^{(2)}(T_1)\big)$$
$$+ \sum_{l,m\in\Omega} \frac{a_l^{(1)} a_m^{(2)}}{2} \Big(\lambda_{lmn}^{(+)} \cos\big((\omega_l + \omega_m)T_0\big)$$
$$+ \lambda_{lmn}^{(-)} \cos\big((\omega_l - \omega_m)T_0\big)\Big), \quad n \geq 1, \tag{26}$$

$$F_0^{(2)}=0:\quad F_n^{(2)}(T_0,T_1)=QM_n^{(2)}(T_0,T_1)$$
$$+Q\sum_{l,m\in\Omega}lK_{lmn}a_l^{(1)}a_m^{(1)}\cos(\omega_lT_0)\cos(\omega_mT_0);\qquad(27)$$

$$D_{(i)n}^{(2)}(T_0,T_1)=\frac{1}{n}\Big\{\partial_{T_0}M_n^{(2)}(T_0,T_1)$$
$$+\sum_{l,m\in\Omega}\Big((l-1)K_{lmn}-\frac{\alpha_{lmn}}{l}\Big)\omega_la_l^{(1)}a_m^{(1)}$$
$$\times\sin(\omega_lT_0)\cos(\omega_mT_0)\Big\},\quad n\ge1;\qquad(28)$$

$$D_{(e)n}^{(2)}(T_0,T_1)=-\frac{1}{(n+1)}\Big\{\partial_{T_0}M_n^{(2)}(T_0,T_1)$$
$$+\sum_{l,m\in\Omega}\big(\alpha_{lmn}/(l+1)-(l+2)K_{lmn}\big)\omega_la_l^{(1)}a_m^{(1)}$$
$$\times\sin(\omega_lT_0)\cos(\omega_mT_0)\Big\},\quad n\ge0,\qquad(29)$$

где $\lambda_{lmn}^{(+)}$, $\lambda_{lmn}^{(-)}$, K_{lmn}, α_{lmn} — коэффициенты, определенные в Приложении B, а $a_n^{(2)}(T_1)$ и $\tau_n^{(2)}(T_1)$ — функции временно́го масштаба T_1, удовлетворяющие начальным условиям (18A)

$$t=0:\quad a_n^{(2)}=-\sum_{l,m\in\Omega}\frac{h_lh_m}{2}\left(\lambda_{lmn}^{(+)}+\lambda_{lmn}^{(-)}\right),\ \ \tau_n^{(2)}=0.\qquad(30)$$

Подставляя выражения (17)–(20) и решения (21)–(24), (26)–(29) в систему уравнений (22A)–(27A) и исключая из нее секулярные слагаемые, находим, что функции $a_n^{(1)}(T_2)$, $a_n^{(2)}(T_1)$ и $\tau_n^{(2)}(T_1)$ не зависят от временны́х масштабов T_1 и T_2, и поэтому их значения вполне определяются начальными условиями (25) и (30), а для функции $\tau_n^{(1)}(T_2)$ справедливо выражение

$$\tau_n^{(1)}(T_2)=T_2b_n=\frac{T_2}{2\omega_n}\bigg\{\frac{h_n^2\big(\Xi_n^0+2\omega_n^2(\Xi_n^1-2\Xi_n^2)\big)}{4(2n+1)}$$
$$+\sum_{k\in\Omega}\frac{h_k^2\Xi_n^0}{2(2k+1)}-\sum_{k\in\Omega}\frac{h_k^2}{4}\Big[H_{nkkn}^{1(-)(+)}+H_{knkn}^{2(+)(+)}$$
$$+H_{knkn}^{2(-)(-)}+(1-\delta_{kn})\big(H_{kknn}^{1(-)(+)}+H_{kknn}^{2(+)(+)}+H_{nkkn}^{2(-)(-)}\big)\Big]\bigg\}.\qquad(31)$$

Коэффициенты $D_{(i)n}^{(3)}$, $D_{(e)n}^{(3)}$, $F_n^{(3)}$, $M_n^{(3)}$ разложений (17)–(20) определяются выражениями

$$M_0^{(3)}(T_0)=-\sum_{k\in\Omega}\frac{2M_k^{(2)}(T_0)}{2k+1}\,h_k\cos(\omega_kT_0)$$
$$-\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{K_{kml}h_kh_mh_l}{3(2l+1)}\cos(\omega_kT_0)\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0);$$

$$M_n^{(3)}(T_0)=-\sum_{k\in\Omega}\frac{h_nh_k^2(\Xi_n^0-2\Xi_n^1\omega_n\omega_k-4\Xi_n^2\omega_k^2)}{8(2k+1)\omega_k(\omega_n+\omega_k)}$$
$$\times\sin\big((\omega_n+\omega_k)T_0\big)\sin(\omega_kT_0)$$
$$-\sum_{k\in\Omega}\frac{h_nh_k^2(1-\delta_{nk})(\Xi_n^0+2\Xi_n^1\omega_n\omega_k-4\Xi_n^2\omega_k^2)}{8(2k+1)\omega_k(\omega_n-\omega_k)}$$
$$\times\sin\big((\omega_n-\omega_k)T_0\big)\sin(\omega_kT_0)$$
$$-\sum_{g=1}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l\big(\lambda_{lmg}^{(+)}+\lambda_{lmg}^{(-)}\big)}{4}$$
$$\times\bigg\{\frac{H_{kgn}^{0(+)}\big(\cos((\omega_k+\omega_g)T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_g)^2}$$
$$+\frac{H_{kgn}^{0(-)}\big(\cos((\omega_k-\omega_g)T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_g)^2}\bigg\}$$
$$+\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l}{4}\bigg\{\frac{H_{kmln}^{1(+)(-)}\big(\cos(\psi_{klm}^{(+)(+)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l+\omega_m)^2}$$
$$+\frac{H_{kmln}^{1(-)(+)}D_{lm}^{kn}D_{km}^{ln}\big(\cos(\psi_{klm}^{(+)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_l-\omega_m)^2}$$
$$+\frac{H_{kmln}^{2(+)(+)}D_{kl}^{mn}D_{km}^{ln}\big(\cos(\psi_{klm}^{(-)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l-\omega_m)^2}$$
$$+\frac{H_{kmln}^{2(-)(-)}D_{kl}^{mn}D_{ml}^{kn}\big(\cos(\psi_{klm}^{(+)(-)}T_0)-\cos(\omega_nT_0)\big)}{\omega_n^2-(\omega_k-\omega_l+\omega_m)^2}\bigg\},\ \ n\ge1;\qquad(32)$$

$$F_0^{(3)}(T_0)=Q\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{k+1}{2l+1}\left(\alpha_{kml}-\frac{k(k+1)}{2}K_{kml}\right)$$
$$\times h_kh_mh_l\cos(\omega_kT_0)\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0);$$

$$F_0^{(3)}(T_0)=QM_n^{(3)}(T_0)$$
$$+\sum_{m\in\Omega}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)K_{kmn}F_k^{(2)}(T_0)h_m\cos(\omega_mT_0)$$
$$+Q\sum_{k\in\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}(k-1)K_{kmn}M_m^{(2)}(T_0)h_k\cos(\omega_kT_0)$$
$$-Q\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{k(k+3)}{2}K_{kmg}K_{gln}h_kh_mh_l$$
$$\times\cos(\omega_kT_0)\cos(\omega_mT_0)\cos(\omega_lT_0),\quad n\ge1;\qquad(33)$$

$$D^{(3)}_{(i)n}(T_0) = \frac{1}{n}\,\partial_{T_0} M^{(3)}_n(T_0) - \frac{1-\delta_{1n}}{n}\,h_n b_n \sin(\omega_n T_0)$$
$$- \frac{1}{n}\sum_{m\in\Omega}\sum_{k=1}^{\infty}\big(k(k-1)K_{kmn} - \alpha_{kmn}\big) D^{(2)}_k(T_0) h_m \cos(\omega_m T_0)$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{k\in\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}\big(k(k-1) - \alpha_{kmn}\big) M^{(2)}_m(T_0)\omega_k h_k \sin(\omega_k T_0)$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{k,m,l\in\Omega}\sum_{g=0}^{\infty}\Big(\frac{k(k-1)}{2}K_{kmg} - \alpha_{kmg}\Big)(k-2)$$
$$\times K_{gln}\omega_k h_k h_m h_l \sin(\omega_k T_0)\cos(\omega_m T_0)\cos(\omega_l T_0),\ \ n \ge 1; \tag{34}$$

$$D^{(3)}_{(e)n}(T_0) = -\frac{1}{n+1}\,\partial_{T_0} M^{(3)}_n(T_0)$$
$$+ \frac{(1-\delta_{0n})(1-\delta_{1n})}{n+1}\,h_n b_n \sin(\omega_n T_0)$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{k\in\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}\Big((k+2)K_{kmn} - \frac{\alpha_{kmn}}{k+1}\Big) M^{(2)}_m \omega_k h_k \sin(\omega_k T_0)$$
$$- \frac{1}{n+1}\sum_{k\in\Omega}\sum_{m=0}^{\infty}\big(\alpha_{kmn} - (m+1)(m+2)K_{kmn}\big) D^{(2)}_m h_k \cos\omega_k(T_0)$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{k,m,l\in\Omega}\sum_{g=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha_{kmg}}{k+1} - \frac{k+2}{2}K_{kmg}\Big)(k+3)$$
$$\times K_{gln}\omega_k h_k h_m h_l \sin(\omega_k T_0)\cos(\omega_m T_0)\cos(\omega_l T_0),\ \ n \ge 0; \tag{35}$$

где Ξ^0_n, ξ^1_n, Ξ^2_n, $\beta^{1(\pm)}_{kmgln}$, $\beta^{2(\pm)}_{kmgln}$, $H^{0(\pm)}_{kgn}$, $H^{1(\pm)(\pm)}_{kmln}$, $H^{2(\pm)(\pm)}_{kmln}$, $\psi^{(\pm)(\pm)}_{kml}$, D^{kn}_{lm} — коэффициенты, вынесенные в Приложение B; δ_{kn} — символ Кронекера.

Подставляя (20) в (1), запишем выражение для образующей капли в виде

$$r(\vartheta, T_0, T_2) = 1 + \varepsilon\sum_{n\in\Omega} M^{(1)}_n(T_0, T_2) P_n\big(\cos(\vartheta)\big)$$
$$+ \varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(M^{(2)}_n(T_0) + \varepsilon M^{(3)}_n(T_0)\Big) P_n\big(\cos(\vartheta)\big). \tag{36}$$

4. Анализируя выражения (26), (32) и (36), заметим, что амплитуды второго и третьего порядков малости в отклонении поверхности капли от сферической формы, как и в случае отсутствия внешней среды, пропорциональны выражениям

$$M^2_g \sim \sum_{k,m\in\Omega} K_{kmg}, \qquad M^{(3)}_n \sim \sum_{g=0}^{\infty}\sum_{k,m,l\in\Omega} K_{kmg}K_{gln},$$

где коэффициенты K_{kmg} отличны от нуля, только если $|k-m| \le g \le |k+m|$ и $k+m+g$ — четное число.

Таким образом, наличие внешней среды не приводит к расширению спектра мод, формирующих поверхность заряженной капли.

Из выражений (21) и (31) видно, что любая изначально возбужденная мода первого порядка малости имеет сдвиг частоты, пропорциональный квадрату амплитуды начального возмущения поверхности капли ε^2, существенно зависящий от множества изначально возбужденных мод Ω и плотности окружающей среды $\rho_{(e)}$.

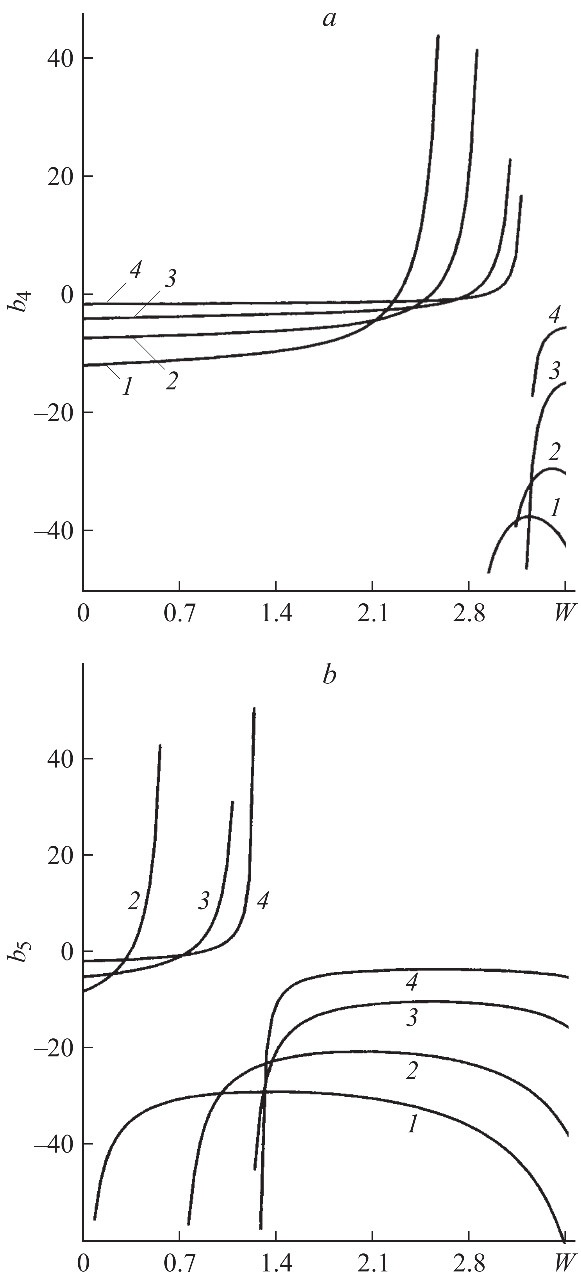

Рис. 1. Зависимость коэффициента b_n, характеризующего сдвиг частоты n-й моды, от параметра Рэлея W при начальном возбуждении n-й моды для различных значений плотности окружающей жидкости: $\rho_{(e)} = 0$ (*1*), 1 (*2*), 10 (*3*), 100 (*4*); $n = 4$ (*a*), 5 (*b*).

Из (36) видно, что поправки к частотам, пропорциональные b_n, имеют второй порядок малости по ε и содержат в знаменателях множители, обращающиеся при определенных соотношениях между частотами различных мод в нуль (в таких случаях принято говорить о резонансном характере соответствующих поправок [9]). Так, когда в начальный момент времени возбуждена четвертая мода, поправка к частоте имеет резонанс при $\omega_6^2 - 4\omega_4^2 = 0$, а когда возбуждена пятая мода, резонанс реализуется при $\omega_8^2 - 4\omega_5^2 = 0$. Вдали от положений резонансов величины поправок к частотам $b_n \cdot \varepsilon^2$ с ростом плотности окружающей жидкости $\rho_{(e)}$ уменьшаются по абсолютной величине (рис. 1).

Учет нелинейных поправок к частотам капиллярных колебаний капли приводит к изменению критического значения параметра Рэлея W_{cr}, при котором реализуется неустойчивость n-й моды по отношению к собственному заряду [6]. Условие проявления неустойчивости n моды с учетом нелинейной поправки к частоте может быть записано в виде

$$(\omega_n + \varepsilon^2 b_n)^2 = \omega_n^2 + 2\varepsilon^2\omega_n b_n + O(\varepsilon^4) = 0.$$

Влияние наличия внешней среды на критические условия неустойчивости сводится к незначительному увеличению критического значения параметра Рэлея с ростом плотности окружающей жидкости $\rho_{(e)}$ (в связи с уменьшением по абсолютной величине коэффициента b_n) [7] и к весьма заметному снижению величины коэффициента межфазного поверхностного натяжения по сравнению с коэффициентом поверхностного натяжения капли в вакууме [10]. В итоге критическая для реализации неустойчивости капли величина собственного заряда при наличии внешней среды снижается.

Амплитуды мод второго $M_n^{(2)}$ и третьего $M_n^{(3)}$ порядков также зависят от плотности окружающей жидкости, что приводит к некоторому изменению формы поверхности капли (к локальному уменьшению кривизны ее поверхности), находящейся во внешней среде, по сравнению с каплей в вакууме (рис. 2). Наличие внешней среды наиболее заметно сказывается на форме поверхности капли в окрестности точек, обладающих наиболее высокой скоростью движения.

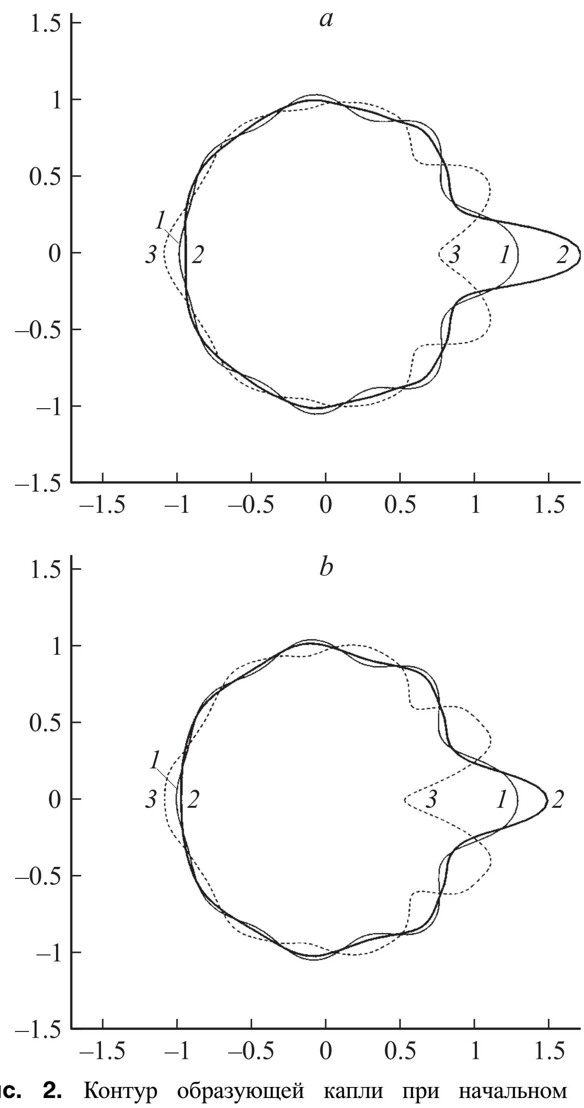

Рис. 2. Контур образующей капли при начальном возбуждении седьмой и восьмой мод, когда $h_7 = h_8 = 0.5$, $W = 3$, $\varepsilon = 0.3$. *a*) — $\rho_{(e)} = 0$; $t = 0.01$ (*1*), 0.075 (*2*), 0.22 (*3*); *b*) — $\rho_{(e)} = 5$; $t = 0.02$ (*1*), 0.14 (*2*), 0.525 (*3*).

Заключение

Величины нелинейных поправок к частотам осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в диэлектрической несжимаемой внешней среде существенно зависят от отношения плотностей сред и снижаются с ростом плотности среды. Влияние на устойчивость капли по отношению к собственному заряду внешней среды, моделируемой несжимаемой жидкостью, складывается из двух факторов: с одной стороны, нелинейный сдвиг частоты осцилляций приводит к слабому росту критического заряда; с другой стороны, существенное снижение величины коэффициента межфазного поверхностного натяжения (по сравнению с каплей в вакууме) приводит к весьма заметному снижению величины критического заряда.

Приложение А. Выделение задач различного порядка малости

Задача первого порядка малости, полученная после подстановки (12)–(16) в (1)–(11), имеет вид

$$\Delta\psi_{(i)}^{(1)} = 0; \qquad \Delta\psi_{(e)}^{(1)} = 0; \qquad \Delta\phi^{(1)} = 0; \tag{1A}$$

$$r \to 0: \qquad \psi_{(i)}^{(1)} \to 0; \tag{2A}$$

$$r \to +\infty: \quad \psi_{(e)}^{(1)} \to 0; \qquad \nabla\phi^{(1)} \to 0; \tag{3A}$$

$$r = 1: \qquad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = \partial_r\psi_{(i)}^{(1)} = \partial_r\psi_{(e)}^{(1)}; \tag{4A}$$

$$\partial_{T_0}\psi^{(1)} - \rho_{(e)}\partial_{T_0}\psi^{(1)}_{(e)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_d}\,\partial_r\phi^{(0)}$$

$$\times\left(\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(0)}\right) + 2\xi^{(1)} + \Delta_\Omega\xi^{(1)}; \quad (5A)$$

$$\int_{-1}^{1}\xi^{(1)}d(\cos\vartheta) = 0; \quad (6A)$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\left(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\right)\right\}d(\cos\vartheta) = 0; \quad (7A)$$

$$\phi^{(1)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t); \quad (8A)$$

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = \varepsilon\sum_{m\in\Omega}h_mP_m(\cos\vartheta); \quad \partial_{T_0}\xi^{(1)} = 0. \quad (9A)$$

Задача второго порядка малости имеет вид

$$\Delta\psi^{(2)}_{(i)} = 0; \qquad \Delta\psi^{(2)}_{(e)} = 0; \qquad \Delta\phi^{(2)} = 0; \quad (10A)$$

$$r\to 0: \qquad \psi^{(2)}_{(i)} \to 0; \quad (11A)$$

$$r\to+\infty: \quad \psi^{(2)}_{(e)} \to 0; \qquad \nabla\phi^{(2)} \to 0; \quad (12A)$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)}$$

$$= \partial_r\psi^{(2)}_{(i)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)}_{(i)} - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)}$$

$$= \partial_r\psi^{(2)}_{(e)} + \xi^{(1)}\partial_{rr}\psi^{(1)}_{(e)} - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)}; \quad (13A)$$

$$\partial_{T_0}\psi^{(2)}_{(i)} + \partial_{T_1}\psi^{(1)}_{(i)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)}_{(i)} + \frac{1}{2}\left(\partial_r\psi^{(1)}_{(i)}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)}\right)^2 - \rho_{(e)}\Bigg(\partial_{T_0}\psi^{(2)}_{(e)} + \partial_{T_1}\psi^{(1)}_{(e)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)}_{(e)}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\partial_r\psi^{(1)}_{(e)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)}\right)^2\Bigg) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_d}\Big\{2\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)}$$

$$+(\xi^{(1)})^2\left((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2 + \partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}\right)$$

$$+(\partial_\vartheta\phi^{(1)})^2 + (\partial_r\phi^{(1)})^2 + 2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}$$

$$+2\xi^{(1)}\left(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)} + \partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)}\right)\Big\}$$

$$+2\xi^{(2)} + \Delta_\Omega\xi^{(2)} - 2(\xi^{(1)})^2 - 2\xi^{(1)}\Delta_\Omega\xi^{(1)}; \quad (14A)$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2\right)d(\cos\vartheta) = 0; \quad (15A)$$

$$\int_{-1}^{1}\Big\{\partial_r\phi^{(2)} + \xi^{(1)}\left(\partial_{rr}\phi^{(1)} + 2\partial_r\phi^{(1)}\right)$$

$$+\xi^{(2)}\left(\partial_{rr}\phi^{(0)} + 2\partial_r\phi^{(0)}\right)$$

$$+(\xi^{(1)})^2\left(\frac{1}{2}\,\partial_{rrr}\phi^{(0)} + 2\partial_{rr}\phi^{(0)} + \partial_r\phi^{(0)}\right)$$

$$-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}\Big\}d(\cos\vartheta) = 0; \quad (16A)$$

$$\phi^{(2)} + \xi^{(1)}\partial_r\phi^{(1)} + \xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}$$

$$+\frac{1}{2}\,(\xi^{(1)})^2\partial_{rr}\phi^{(0)} = \phi_S^{(2)}(t); \quad (17A)$$

$$t = 0: \quad \xi^{(2)} = -\sum_{m\in\Omega}\frac{h_mP_0(\cos\vartheta)}{2m+1}; \quad \partial_{T_0}\xi^{(2)} + \partial_{T_1}\xi^{(1)} = 0. \quad (18A)$$

Задача третьего порядка малости имеет вид

$$\Delta\psi^{(3)}_{(i)} = 0; \qquad \Delta\psi^{(3)}_{(e)} = 0; \qquad \Delta\phi^{(3)} = 0; \quad (19A)$$

$$r\to 0: \qquad \psi^{(3)}_{(i)} \to 0; \quad (20A)$$

$$r\to+\infty: \quad \psi^{(3)}_{(e)} \to 0; \qquad \nabla\phi^{(3)} \to 0; \quad (21A)$$

$$r = 1: \quad \partial_{T_0}\xi^{(3)} + \partial_{T_1}\xi^{(2)} + \partial_{T_2}\xi^{(1)} = \partial_r\psi^{(3)}_{(i)}$$

$$-\partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)} - \partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(2)}_{(i)} + \xi^{(2)}\partial_{rr}\psi^{(1)}_{(i)}$$

$$+\xi^{(1)}\left(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\left(2\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)} - \partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}_{(i)}\right) + \partial_{rr}\psi^{(2)}_{(i)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\,(\xi^{(1)})^2\partial_{rrr}\psi^{(1)}_{(i)} = \partial_r\psi^{(3)}_{(e)} - \partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)}$$

$$-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\psi^{(2)}_{(e)} + \xi^{(2)}\partial_{rr}\psi^{(1)}_{(e)}$$

$$+\xi^{(1)}\left(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\left(2\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)} - \partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}_{(e)}\right) + \partial_{rr}\psi^{(2)}_{(e)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\,(\xi^{(1)})^2\partial_{rrr}\psi^{(1)}_{(e)}; \quad (22A)$$

$$\partial_{T_0}\psi^{(3)}_{(i)} + \partial_{T_2}\psi^{(1)}_{(i)} + \partial_{T_1}\psi^{(2)}_{(i)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_1}\psi^{(1)}_{(i)}$$

$$+\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)}\partial_\vartheta\psi^{(2)}_{(i)} + \partial_r\psi^{(1)}_{(i)}\partial_r\psi^{(2)}_{(i)} + \xi^{(2)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)}_{(i)}$$

$$+\xi^{(1)}\Big(\partial_{rT_0}\psi^{(2)}_{(i)} + \partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)}\left(\partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}_{(i)} - \partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(i)}\right)$$

$$+\partial_r\psi^{(1)}_{(i)}\partial_{rr}\psi^{(1)}_{(i)}\Big) + \frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\partial_{rrT_0}\psi^{(1)}_{(i)}$$

$$-\rho_{(e)}\Bigg(\partial_{T_0}\psi^{(3)}_{(e)} + \partial_{T_2}\psi^{(1)}_{(e)} + \partial_{T_1}\psi^{(2)}_{(e)} + \xi^{(1)}\partial_{rT_1}\psi^{(1)}_{(e)}$$

$$+\partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)}\partial_\vartheta\psi^{(2)}_{(e)} + \partial_r\psi^{(1)}_{(e)}\partial_r\psi^{(2)}_{(e)} + \xi^{(2)}\partial_{rT_0}\psi^{(1)}_{(e)}$$

$$+\xi^{(1)}\Big(\partial_{rT_0}\psi^{(2)}_{(e)} + \partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)}\left(\partial_{r\vartheta}\psi^{(1)}_{(e)} - \partial_\vartheta\psi^{(1)}_{(e)}\right)$$

$$+\partial_r\psi^{(1)}_{(e)}\partial_{rr}\psi^{(1)}_{(e)}\Big) + \frac{1}{2}\,(\xi^{(1)})^2\partial_{rrT_0}\psi^{(1)}_{(e)}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_d}\Big\{2\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^3\Big(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)}$$

$$+\frac{1}{3}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrrr}\phi^{(0)}\Big)+2\Big(\partial_\vartheta\phi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)}$$
$$+\partial_r\phi^{(1)}\big(\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}+\partial_r\phi^{(2)}\big)+\partial_r\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(3)}$$
$$+\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)}\Big)+2\xi^{(1)}\Big(\xi^{(2)}\big((\partial_{rr}\phi^{(0)})^2$$
$$+\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(0)}\big)+\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(2)}$$
$$+\partial_\vartheta\phi^{(1)}\big(\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)}-\partial_\vartheta\phi^{(1)}\big)+\partial_r\phi^{(1)}\partial_{rr}\phi^{(1)}$$
$$+\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(2)}\Big)+(\xi^{(1)})^2\Big(\partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)}$$
$$+2\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_{rr}\phi^{(1)}+\partial_r\phi^{(0)}\partial_{rrr}\phi^{(1)}\Big)\Big\}$$
$$+(2+\Delta_\Omega)\xi^{(3)}+2\xi^{(1)}\Big(\big(\xi^{(1)}\big)^2-(2+\Delta_\Omega)\xi^{(2)}\Big)$$
$$-2\xi^{(2)}\Delta_\Omega\xi^{(1)}+3\big(\xi^{(1)}\big)^2\Delta_\Omega\xi^{(1)}-\big(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\big)^2\partial_{\vartheta\vartheta}\xi^{(1)}$$
$$-\frac{1}{2}\big(\partial_\vartheta\xi^{(1)}\big)^2\Delta_\Omega\xi^{(1)}; \qquad (23A)$$

$$\int_{-1}^{1}\Big(3\xi^{(3)}+6\xi^{(1)}\xi^{(2)}+\big(\xi^{(1)}\big)^3\Big)d(\cos\vartheta)=0; \qquad (24A)$$

$$\int_{-1}^{1}\Big\{\partial_r\phi^{(3)}+\xi^{(3)}\big(\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)}\big)$$
$$+\xi^{(2)}\big(\partial_{rr}\phi^{(1)}+2\partial_r\phi^{(1)}\big)$$
$$+(\xi^{(1)})^3\Big(\frac{1}{6}\partial_{rrrr}\phi^{(0)}+\partial_{rrr}\phi^{(0)}+\partial_{rr}\phi^{(0)}\Big)$$
$$+(\xi^{(1)})^2\Big(\frac{1}{2}\partial_{rrr}\phi^{(1)}+2\partial_{rr}\phi^{(1)}+\partial_r\phi^{(1)}\Big)$$
$$+\xi^{(1)}\Big(\xi^{(2)}\big(\partial_{rrr}\phi^{(0)}+4\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)}\big)$$
$$+2\partial_r\phi^{(2)}+\partial_{rr}\phi^{(2)}-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_{r\vartheta}\phi^{(1)}\Big)$$
$$-\partial_\vartheta\xi^{(2)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(2)}\Big\}d(\cos\vartheta)=0; \qquad (25A)$$

$$\phi^{(3)}+\xi^{(1)}\partial_r\phi^{(2)}+\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(1)}+\xi^{(3)}\partial_r\phi^{(0)}$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^{(1)})^2\partial_{rr}\phi^{(1)}+\xi^{(1)}\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}$$
$$+\frac{1}{6}(\xi^{(1)})^3\partial_{rrr}\phi^{(0)}=\phi_S^{(3)}(t); \qquad (26A)$$

$$t=0:\quad \xi^{(3)}=-\sum_{k,m,l\in\Omega}\frac{h_kh_mh_l}{3(2l+1)}K_{kml}P_0(\cos\vartheta);$$

$$t=0:\qquad \partial_{T_0}\xi^{(3)}+\partial_{T_1}\xi^{(2)}+\partial_{T_2}\xi^{(1)}=0, \qquad (27A)$$

где $K_{mln}=(C^{n0}_{m0l0})^2$, C^{n0}_{m0l0} — коэффициенты Клебша–Гордана.

Приложение B. Выражения для коэффициентов разложений

$$H^{1(+)(-)}_{kmln}=\sum_{g=1}^{\infty}\Big(\beta^{1(+)}_{kmgln}\lambda^{(+)}_{lmg}+\mu^{1(-)}_{kmgln}\Big)+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(-)}_{kmgln};$$

$$H^{1(-)(+)}_{kmln}=\sum_{g=1}^{\infty}\Big(\beta^{1(-)}_{kmgln}\lambda^{(-)}_{lmg}+\mu^{1(+)}_{kmgln}\Big)+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(+)}_{kmgln};$$

$$H^{2(+)(+)}_{kmln}=\sum_{g=1}^{\infty}\Big(\beta^{2(+)}_{kmgln}\lambda^{(+)}_{lmg}+\mu^{1(+)}_{kmgln}\Big)+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(+)}_{kmgln};$$

$$H^{2(-)(-)}_{kmln}=\sum_{g=1}^{\infty}\Big(\beta^{2(-)}_{kmgln}\lambda^{(-)}_{lmg}+\mu^{1(-)}_{kmgln}\Big)+\sum_{g=0}^{\infty}\mu^{0(-)}_{kmgln};$$

$$H^{0(+)}_{mgn}=\Big(\Pi^0_{mgn}-\Pi^1_{mgn}\omega_m\omega_g-\Pi^2_{mgn}\omega_g^2\Big)\Big(\lambda^{(+)}_{mmg}+\lambda^{(-)}_{mmg}\Big);$$

$$H^{0(-)}_{mgn}=\Big(\Pi^0_{mgn}+\Pi^1_{mgn}\omega_m\omega_g-\Pi^2_{mgn}\omega_g^2\Big)\Big(\lambda^{(+)}_{mmg}+\lambda^{(-)}_{mmg}\Big);$$

$$\beta^{1(+)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}-\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l+\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l+\omega_m)^2;$$

$$\beta^{1(-)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}-\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l-\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l-\omega_m)^2;$$

$$\beta^{2(+)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}+\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l+\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l+\omega_m)^2;$$

$$\beta^{2(-)}_{kmgln}=\Pi^0_{kgn}+\Pi^1_{kgn}\omega_k(\omega_l=\omega_m)-\Pi^2_{kgn}(\omega_l-\omega_m)^2;$$

$$\mu^{1(-)}_{kmgln}=\Lambda^1_{kmgln}-\Gamma^1_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\mu^{1(+)}_{kmgln}=\Lambda^1_{kmgln}+\Gamma^1_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\mu^{0(-)}_{kmgln}=\Lambda^0_{kmgln}-\Gamma^0_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\mu^{0(+)}_{kmgln}=\Lambda^1_{kmgln}+\Gamma^0_{kmgln}\omega_m\omega_k;$$

$$\Lambda^0_{kmgln}=(n+1)\chi_n\omega_k^2K_{gln}\big(\alpha_{kmg}(k-2)/k$$
$$+(k-1)(n-k+2)K_{kmg}/2\big)$$
$$+\rho_{(e)}n\chi_n\omega_k^2\Big(\big((g+1-n)K_{gln}-\alpha_{gln}/(g+1)\big)\big((k+2)K_{kmg}$$
$$-\alpha_{kmg}/(k+1)\big)+\big((k+3)\alpha_{kmg}/(k+1)$$
$$+(k+2)(n-2-k)K_{kmg}/2\big)K_{gln}\Big)+n(n+1)\chi_n$$
$$\times\Big(WK_{gln}\big((k^3-2(m+1)(m+2)-k^2(n-9)$$
$$-k(2m(m+3)+3n-22)\big)K_{kmg}-2(k+2)\alpha_{kmg}\big)/2$$
$$-\big((3k(k+1)-2\big)K_{kmg}-l(l+1)\alpha_{kmg}/2)K_{gln}$$
$$+\alpha_{kmg}\Big(l^2K_{lgn}-\sum_{\nu=1}^{[l/2]}(2l-4\nu+1)K_{l-2\nu,g,n}\Big)\Big);$$

$$\Lambda^1_{kmgln} = n(n+1)\chi_n WkK_{kmg}$$
$$\times \big((g+1)(l-2-g+n)K_{lgn} + \alpha_{lgn}\big)$$
$$+ (n+1)\chi_n\Big(\big(\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}\big)$$
$$\times \big(\alpha_{kmg}/m + (1-m)K_{kmg}\big)\Big)\omega_m^2;$$

$$\Gamma^0_{kmgln} = (n+1)\chi_n\Big((k-2)K_{gln}\big((k-1)K_{kmg}/2 - \alpha_{kmg}/k\big)\Big)$$
$$+ K_{mgn}\big((k-1)K_{klg}/2 - \alpha_{klg}/k\big)\big)$$
$$- n(k-1)K_{gln}\big(\alpha_{kmg}/(mk) + K_{kmg}\big)\big)$$
$$- \rho_{(e)}n\chi_n\Big(\big((g+2)K_{mgn} - \alpha_{mgn}/(g+1)\big)\big((k+2)K_{klg}$$
$$- \alpha_{klg}/(k+1)\big) + (k+3)K_{mgn}\big(\alpha_{klg}/(k+1)$$
$$- (k-2)K_{klg}/2\big) + \Big((g+2)K_{gln} - \alpha_{gln}/(g+1)\big)$$
$$\times \big((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)\big)$$
$$+ (k+3)K_{gln}\big(\alpha_{kmg}/(k+1) - (k+2)K_{kmg}/2\big)$$
$$- (n+1)\Big(\big(\alpha_{mgn}/((m+1)(g+1)\big) + K_{mgn}\Big)\big((k+2)K_{klg}$$
$$- \alpha_{klg}/(k+1)\big) + K_{gln}\big((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)\big)$$
$$- \Big(\alpha_{kmg}/\big((k+1)(m+1)\big) + K_{kmg}\Big)(k+2)K_{gln})\big);$$

$$\Gamma^1_{kmgln} = (n+1)\chi_n\Big(\big(\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}\Big)$$
$$\times \big((m-1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m\big) + \big((k+n)\alpha_{kgn}/(gk)$$
$$+ (n+1-g)K_{kgn}\big)\big((m-1)K_{mlg} - \alpha_{mlg}/m\big)\big);$$

$$\Pi^0_{kmn} = (n+1)\chi_n\Big(nK_{kmn}\big(2\big((k-1)(k+2) + m(m+1)\big)$$
$$+ W(k-1)(n-5-k)\big) + \big(\alpha_{kmn}/k + (n+1-k)K_{kmn}\big)\omega_k^2\Big)$$
$$- \rho_{(e)}n\chi_n\omega_k^2\big((n-1-k)K_{kmn} + \alpha_{kmn}/(k+1)\big)$$
$$+ n(n+1)\chi_n W\big((m+1)(k+n-m-2)K_{kmn} + \alpha_{kmn}\big);$$

$$\Pi^1_{kmn} = (n+1)\chi_n\big((k+m-n-2)K_{kmn}$$
$$- (n+k+m)\alpha_{kmn}/(mk)\big)$$
$$+ n\rho_{(e)}\chi_n\big((n-k-m-3)K_{kmn}$$
$$+ (k+m+n+3)\alpha_{kmn}/((m+1)(k+1))\big);$$

$$\Pi^2_{kmn} = (n+1)\chi_n\big((m-n-1)K_{kmn} - \alpha_{kmn}/m\big)$$
$$+ n\rho_{(e)}\chi_n\big((n-m-1)K_{kmn} + \alpha_{kmn}/(m+1)\big);$$

$$\Xi^0_n = \omega_n^2 + n(n+1)\chi_n(n-1)(4+2n-5W);$$
$$\Xi^1_n = \big((n+1)(n-1) - 3n\rho_{(e)}\big)\chi_n; \quad \Xi^2_n = \rho_{(e)}n(n-1)\chi_n;$$

$$\psi^{(+)(+)}_{kml} = \omega_k + \omega_m + \omega_l; \qquad \psi^{(+)(-)}_{kml} = \omega_k + \omega_m - \omega_l;$$
$$\psi^{(-)(-)}_{kml} = \omega_k - \omega_m - \omega_l; \qquad D^{kn}_{lm} = 1 - \delta_{lm}\delta_{kn};$$
$$\lambda^{(\pm)}_{mln} = (\gamma_{mln} \pm \omega_m\omega_l\eta_{mln})/\big(\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2\big);$$
$$\alpha_{mln} = -C^{n0}_{m0l0}C^{n0}_{m(-1)l1}\sqrt{m(m+1)l(l+1)};$$

$$\gamma_{mln} = (n+1)\chi_n K_{mln}\Big(\omega_m^2\big(n-m+1$$
$$- \rho_{(e)}n(n-m-1)/(n+1)\big) + 2n\big(l(l+1)-1\big)$$
$$+ \big(l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3\big)nW/2\Big) + (n+1)\chi_n\alpha_{mln}$$
$$\times \Big(\big(1/m - n\rho_{(e)}/\big((n+1)(m+1)\big)\big)\omega_m^2 + nW/2\Big);$$

$$\eta_{mln} = (n+1)\chi_n K_{mln}\Big(n/2 - m + 1$$
$$+ \rho_{(e)}n(2m+3-n)/\big(2(n+1)\big)\Big)$$
$$+ (n+1)\chi_n\alpha_{mln}\Big(\big(1 + n/(2l)\big)/m$$
$$- n\rho_{(e)}(n+2l+3)/\big(2(m+1)(l+1)(n+1)\big)\Big);$$

$$\chi_n = \big(1 + n(1+\rho_{(e)})\big)^{-1};$$
$$\omega_n = \sqrt{\chi_n(n-1)n(n+1)(n+2-W)}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 44–51.
[4] *Гаибов А.Р., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 13–20.
[5] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
[6] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6.
[7] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
[8] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
[9] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[10] *Рид Р., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 702 с.