

01;09

Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов

© Ю.В. Гандель,¹ Г.И. Загинайлов,¹ С.А. Стешенко²

¹ Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
61077 Харьков, Украина
e-mail: zaginaev@postmaster.co.uk

² Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,
61085 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 21 августа 2003 г. В окончательной редакции 3 декабря 2003 г.)

Разработан эффективный и строгий метод для численного анализа резонаторов коаксиальных гиротронов, применяющихся для нагрева плазмы, генерации токов увлечения и в других целях в установках управляемого термоядерного синтеза с магнитным удержанием. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования работы коаксиальных гиротронов, оптимизации резонаторов коаксиальных гиротронов, а также для создания эффективного математического обеспечения в целях исследования физики и инженерных расчетов коаксиальных гиротронов.

Введение

Современный прогресс в области управляемого термоядерного синтеза (УТС) в значительной степени зависит от успехов современной технической физики и технологий. В частности, разработка мощных источников миллиметрового излучения имеет большое значение для совершенствования систем электронно-циклотронного нагрева (ЭЦН) плазмы в установках с магнитным удержанием. Кроме дополнительного нагрева плазмы миллиметровое излучение может быть использовано для генерации токов увлечения, поджига и контроля устойчивости термоядерной реакции и т.д. [1–3]. Широкое и многоплановое использование миллиметрового излучения планируется в наиболее значительном проекте современности в области УТС — ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor).

Системы ЭЦН используют гиротроны в качестве источников миллиметрового излучения. Для их упрощения и уменьшения их стоимости до приемлемых пределов необходимо, чтобы отдельный гиротрон обеспечивал мощность около 2 MW на частоте в интервале 140–200 GHz в режиме непрерывной генерации (импульсы длительностью более 10 s), причем возможность перестройки частоты генерации является весьма желательной [4].

Гиротроны с традиционными резонаторами в виде цилиндрического волновода, которые разрабатываются для проекта ITER, в настоящее время достигают мощности 1 MW на частоте 170 GHz в непрерывном режиме [5,6]. Однако дальнейшее повышение мощности в гиротронах этого типа сопряжено со значительными техническими трудностями, которые обусловлены в основном чрезмерным нагревом стенок резонатора, недопустимым уровнем конкуренции мод и эффектами пространственного заряда электронного пучка. Эти трудности могут быть успешно преодолены в гиро-

тронах нового поколения, использующих в качестве резонаторов коаксиальные структуры с гофрированным внутренним проводником [7–9].

В настоящее время наиболее активные экспериментальные и теоретические исследования гиротронов на коаксиальных резонаторах проводятся в Исследовательском центре Карлсруэ (Forschungszentrum Karlsruhe), Германия [8,9], в Институте прикладной физики (Institute of Applied Physics), Нижний Новгород, Россия [10] и в Массачусетском технологическом институте (Massachusetts Institute of Technology) США [11]. О достижении рекордной выходной мощности около 2.2 MW для гиротронов этого класса при КПД 28% сообщалось в [12]. Длина импульса излучения составляла 0.8 ms при частоте повторения 1 Hz. В качестве рабочей моды коаксиального гиротрона использовалась мода $TE_{31,17}$, частота генерации находилась вблизи 165 GHz. Высокочастотные и низкочастотные паразитные колебания также были обнаружены. Увеличение длины импульса, уменьшение тепловых нагрузок на внутреннем проводнике и повышение уровня одномодовости являются основными текущими задачами при разработке коаксиальных гиротронов для использования в установках УТС. Для эффективного решения этих задач необходимы новые надежные знания относительно сценария конкуренции мод и потерях во внутреннем проводнике.

До сих пор расчет резонаторов коаксиальных гиротронов производился на основе упрощенной импедансной модели гофрированного внутреннего проводника [13–15]. Согласно этой модели, гофрированный внутренний проводник коаксиала (рис. 1) заменялся гладким проводником с эквивалентным импедансом на поверхности. Величина эквивалентного импеданса зависит от параметров гофрировки, чем и учитывается ее влияние. Выражения для эквивалентного импеданса и методы его введения можно найти в [13–15]. Импеданс

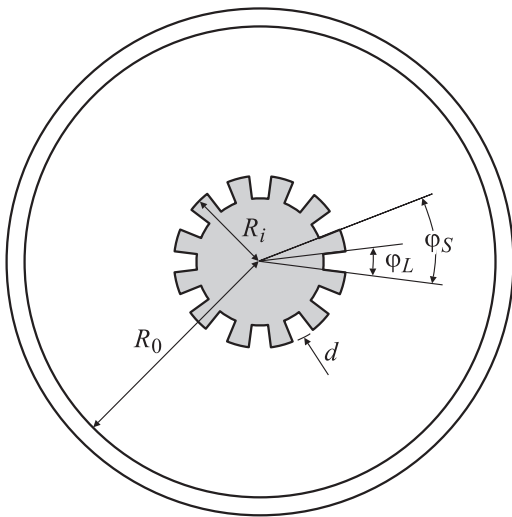


Рис. 1. Поперечное сечение резонатора коаксиального гиротрона.

данная модель достаточно проста и удобна в расчетах. Она была использована для расчета и оптимизации ряда экспериментальных вариантов коаксиальных гиротронов. Однако установить пределы применимости этой модели достаточно сложно. Общепринятым критерием справедливости импедансного приближения в теории коаксиальных гиротронов считается условие $s < \pi R_i/m$, где $s = 2\pi R_i/N$, N — количество канавок на внутреннем проводнике, m — азимутальный индекс основной пространственной гармоники, R_i — радиус внутреннего проводника [13–15]. Оно означает малость периода гофрировки по сравнению с периодом изменения поля фундаментальной пространственной гармоники в азимутальном направлении. Сравнение приближенных расчетов со строгим электродинамическим анализом проведено в работах [16,17] для прямоугольной волноводной структуры с периодической решеткой на одной стороне. Показано, что данное условие обеспечивает хорошую относительную точность расчетов ($\sim 1\%$) постоянной распространения на основе импедансной модели, однако вовсе не обеспечивает малости амплитуд высших пространственных гармоник, которые не учитываются в рамках импедансного приближения. В результате поле вблизи гофрированной поверхности, рассчитанное на основе импедансной модели, может существенно отличаться от истинного. Еще одним серьезным недостатком импедансной модели является ее непригодность для описания вырожденных мод и резонансных режимов. Например, для моды с азимутальным индексом $m = N/2$ импедансное приближение может давать некорректные значения полей не только вблизи гофрированной поверхности, но и вдали от нее, так как радиальное распределение полей основной и (1)-й пространственных гармоник в этом случае является идентичным.

Отмеченные недостатки импедансной модели могут привести к серьезным просчетам при оптимизации резонаторов коаксиальных гиротронов. Селективные свойства коаксиального резонатора основаны на различии в зависимостях собственных значений различных мод χ от соотношения внешнего и внутреннего радиусов коаксиала $C = R_0/R_i$. При изменении C вдоль резонатора (рис. 2) $d\chi/dC$ является разным для различных мод, что и используется для их селекции. Поскольку в мощных гиротронах используются рабочие моды с высокими азимутальными и радиальными индексами, полные относительные изменения собственного значения $\Delta\chi/\chi$ вдоль резонатора, обеспечивающие селекцию мод, являются весьма малыми (~ 0.1 – 0.3%). Таким образом, погрешность импедансного приближения ($\sim 1\%$) не гарантирует корректных расчетов $d\chi/dC$ для конкурирующих мод, так как для этого необходимо, чтобы относительная погрешность вычисления собственного значения была много меньше полного относительного изменения собственного значения $\Delta\chi/\chi$ вдоль резонатора. Достичь подобной точности ($< 0.01\%$) можно лишь на основе строгих электродинамических подходов.

Один из вариантов строгого анализа коаксиальных структур с азимутальной периодичностью был разработан в [18] для расчетов резонаторных структур магнетронов. Позже он был развит и применен для расчетов коаксиальных гиротронов [19]. Он позволяет существенно повысить точность расчетов, особенно для мод с не очень высокими азимутальными и радиальными индексами. Однако при увеличении радиального и азимутального индексов его точность падает. Идея разработки и применения устойчивых прямых численных методов решения системы интегральных уравнений (СИУ) первого рода в задачах радиофизики СВЧ предложена и математически обоснована в [20–24].

Строгий электродинамический анализ коаксиального резонатора с гофрированным внутренним проводником, который предлагается в данной статье, основан на прямых численных методах решения СИУ первого рода, к которому эквивалентно сводится соответствующая краевая задача [25]. С нашей точки зрения, при этом достигается разумный компромисс между сложностью

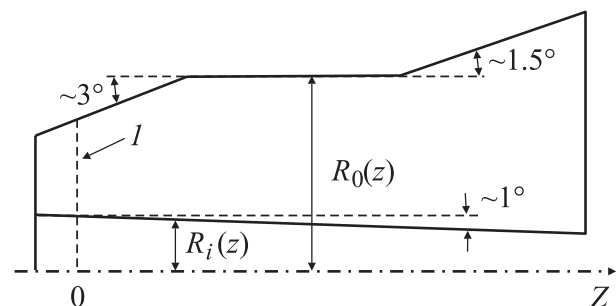


Рис. 2. Типичная геометрия резонатора коаксиального гиротрона (I — критическое сечение).

аналитических преобразований, с одной стороны, и сходимостью и устойчивостью численных решений, с другой стороны. Ранее подобный подход применялся для строгого электродинамического анализа прямоугольной волноводной решетки [16,17], открытых и сверхразмерных решеток конечной длины [26–28], микрополосковых линий [29,30]. Во всех случаях полученные численные результаты обладали хорошей сходимостью и устойчивостью при достаточно скромных затратах машинного времени.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 формулируется исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца, которая эквивалентно сводится к интегральному уравнению первого рода с логарифмической сингулярностью. В разделе 2 интегральное уравнение первого рода с логарифмической сингулярностью эквивалентно сводится к СИУ первого рода с дополнительным условием. Для последнего развиты прямые численные методы решения. Практические примеры расчетов приведены в разделе 3. Результаты расчетов сравниваются с результатами импедансного приближения. Показано, что ошибка в вычислении $d\chi/dC$ либо $\Delta\chi/\chi$ вдоль резонаторов коаксиальных гиротронов, разрабатывающихся для нагрева плазмы в ITER и других установках с магнитным удержанием, может достигать 50% и более, что может приводить к серьезным погрешностям в расчетах сценария конкуренции мод и оптимизации параметров резонаторов коаксиальных гиротронов (см. также [31]). Результаты исследований резюмируются в Заключение.

1. Постановка задачи и вывод исходного интегрального уравнения

Резонатор коаксиального гиротрона представляет собой отрезок плавно неоднородного коаксиального волновода, поперечное сечение которого показано на рис. 1. Обычно при расчетах взаимодействием различных мод вследствие продольной неоднородности пренебрегают, так что в каждом сечении представляется суперпозицией нескольких мод, характеристики которых локальным образом зависят от параметров поперечного сечения. Поэтому расчет структуры полей в каждом поперечном сечении резонатора производится независимо в предположении, что она такая же, как и в бесконечном волноводе с тем же поперечным сечением. Такой подход является традиционным и достаточно эффективным для плавно нерегулярных волноводов [32]. Обычно для расчета одного резонатора необходимо рассчитать около 300–400 поперечных сечений. Далее эти результаты используются при решении задачи возбуждения резонатора электронным пучком.

Таким образом, ключевой задачей при расчете резонаторов коаксиальных гиротронов является задача расчета постоянных распространения и структуры полей

собственных волн бесконечного волновода, сечение которого совпадает с поперечным сечением коаксиального резонатора.

Как известно, собственные моды регулярного вакуумного волновода с произвольным поперечным сечением допускают разделение на моды TE и TM поляризации. В дальнейшем будем рассматривать моды TE поляризации, так как именно они являются рабочими либо наиболее опасными паразитными в коаксиальном гиротроне.

Все компоненты произвольной моды TE поляризации могут быть выражены через одну функцию $\Psi(r, \varphi)$ (мембранную функцию) [32], которая пропорциональна H_z

$$E_r = (ikR_0^2/r) \partial\Psi/\partial\varphi, \quad E_\varphi = -ikR_0^2 \partial\Psi/\partial r, \quad E_z = 0,$$

$$H_r = ik_z R_0^2 \partial\Psi/\partial r, \quad H_\varphi = (ik_z R_0^2/r) \partial\Psi/\partial\varphi, \quad H_z = \chi^2 \Psi,$$

где r, φ — цилиндрические координаты; R_0 — радиус внешнего проводника; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны; k_z — продольное волновое число; $\chi = R_0 \sqrt{k^2 - k_z^2}$ — нормированное поперечное волновое число, зависящее только от геометрии поперечного сечения (далее его будем называть собственным значением в соответствии с общепринятой терминологией в теории коаксиальных гиротронов); фазовый множитель $\exp[i(k_z z - \omega t)]$ опущен.

Мембранная функция для TE -мод удовлетворяет уравнению

$$[\Delta_\perp + (\chi/R_0)^2] \Psi = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_\perp = (1/r)(\partial/\partial r)(r\partial/\partial r) + (1/r^2)\partial^2/\partial\varphi^2$, с граничным условием Дирихле

$$\partial\Psi/\partial n = 0 \tag{2}$$

на контуре поперечного сечения.

Обозначим $C = R_0/R_i$, $C' = R_0/(R_i - d)$. Здесь R_i — радиус гофрированной вставки, d — глубина канавок. В области над канавками ($R_i < r < R_0$) мембранная функция может быть представлена в виде суперпозиции пространственных гармоник

$$\Psi \equiv \Psi^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n G_{k_n}(\chi, \chi/C, \chi r/R_0) \exp(ik_n \varphi), \tag{3}$$

где $G_v(a, b, c) = (J'_v(a)Y'_v(c) - Y'_v(a)J'_v(c))/(J'_v(a)Y'_v(b) - Y'_v(a)J'_v(b))$, $k_n = m + nk_s$, $k_s = 2\pi/\varphi_s = N$, $\varphi_s = 2\pi/N$ — угловой период гофрировки, m — азимутальный индекс моды, $J_v(x)$ и $Y_v(x)$ — функции Бесселя и Неймана соответственно, угол φ отсчитывается от середины канавки.

Представление (3) автоматически удовлетворяет граничному условию (2) на поверхности внешнего коаксиала.

Далее в силу квазипериодичности представления (3) удобно ограничиться рассмотрением одного периода по углу φ : $-\varphi_S/2 < \varphi < \varphi_S/2$. Мембранную функцию в канавке ($R_i - d < r < R_i$, $-\varphi_L/2 < \varphi < \varphi_L/2$) представим в виде ряда Фурье

$$\Psi \equiv \Psi^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n G_{\xi_n} \left(\frac{\chi}{C'}, \frac{\chi}{C}, \frac{\chi r}{R_0} \right) \cos(\xi_n(\varphi + \varphi_L/2)), \quad (4)$$

где $\xi_n = \pi n / \varphi_L$.

Введем новую неизвестную функцию $F(\varphi) = (R_0/\chi) \partial \Psi^+ / \partial r|_{r=R_i}$, для которой из (3) получаем представление

$$F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(ik_n \varphi). \quad (5)$$

В силу граничного условия (2)

$$F(\varphi) = 0, \quad \varphi \in [-\varphi_S/2, -\varphi_L/2] \cup [\varphi_L/2, \varphi_S/2]. \quad (6)$$

Используя (5) и (6), выражаем коэффициенты A_n через $F(\varphi)$

$$A_n = \frac{1}{\varphi_S} \int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} F(\theta) \exp(-ik_n \theta) d\theta. \quad (7)$$

Поле должно удовлетворять условиям непрерывности при $r = R_i$, $-\varphi_L/2 < \varphi < \varphi_L/2$

$$\Psi^+(R_i, \varphi) = \Psi^-(R_i, \varphi), \quad (8)$$

$$\frac{R_0}{\chi} \frac{\partial \Psi^-}{\partial r}(R_i, \varphi) = F(\varphi). \quad (9)$$

Из (4) и (9) выражаем через $F(\varphi)$ коэффициенты X_n

$$X_n = \frac{2\varepsilon_n}{\varphi_L} \int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} F(\theta) \cos(\xi_n(\theta + \varphi_L/2)) d\theta, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

Первое условие непрерывности (8) с учетом (3) и (4) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n W_{k_n}(\chi, \chi/C) \exp(ik_n \varphi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n W_{\xi_n}(\chi/C', \chi/C) \cos(\xi_n(\varphi + \varphi_L/2)), \\ & \quad -\varphi_L/2 < \varphi < \varphi_L/2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $W_\nu(a, b) = (1/b)G_\nu(a, b, b)$.

Подставляя (7), (10) в (11) и меняя порядок суммирования и интегрирования, приходим к исходному интегральному уравнению первого рода на отрезке

$$\int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} H(\varphi, \theta) F(\theta) d\theta = 0, \quad -\varphi_L/2 < \varphi < \varphi_L/2, \quad (12)$$

где

$$H(\varphi, \theta) = G_1(\varphi - \theta) + G_2(\varphi - \theta) + G_2(\varphi + \theta + \varphi_L),$$

$$G_1(x) = (1/\varphi_S) \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{k_n}(\chi, \chi/C) \exp(ik_n x),$$

$$G_2 = -(1/\varphi_L) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n W_{\xi_n}(\chi/C', \chi/C) \cos(\xi_n x).$$

Интегральное уравнение (12) эквивалентно двумерной краевой задаче (1), (2). Оно учитывает вклад всех пространственных и фурье-гармоник поля. Нетрудно показать, что ядро интегрального уравнения (12) содержит логарифмическую сингулярность при $\varphi = 0$: $H(\varphi, \theta) = (2/\pi) \ln |\varphi - \theta| + H_r(\varphi, \theta)$, где $H_r(\varphi, \theta)$ — гладкая функция внутри интервала $(-\varphi_L/2, \varphi_L/2)$ по обоим переменным. К уравнению типа (12) могут быть сведены многие задачи радиофизики СВЧ [20–30,33], поэтому знание некоторых вопросов теории этих уравнений является полезным и может существенно помочь при построении эффективных численных методов. Как известно, интегральные уравнения с логарифмической особенностью по своим свойствам весьма похожи на уравнения Фредгольма и их иногда называют квазифредгольмовыми. Прямое решение таких уравнений может быть недостаточно устойчивым. Это подтверждают многочисленные результаты решения подобных задач методом частичных областей либо методом моментов. Причем часто интегральное уравнение не выписывается, а используются соотношения типа (11) для получения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов A_n либо X_n (см., например, [18,19]). Прямое редуцирование этих СЛАУ может приводить к плохой устойчивости численных результатов и их зависимости от способа усечения коэффициентов A_n и X_n , так как редуцированная СЛАУ эквивалентна уравнению Фредгольма первого рода. Сингулярная часть ядра (12), обусловленная вкладом бесконечного числа пространственных гармоник, исчезает при редукации.

В следующем разделе будут предложены некоторые строгие численные методы нахождения искомой функции $F(\varphi)$ и собственных значения χ исходя из (12), аккуратно учитывающие сингулярность ядра.

2. Строгие численные методы анализа исходного интегрального уравнения

Дифференцируя (12) по φ , приходим к СИУ первого рода

$$\int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} F(\theta) d\theta / (\theta - \varphi) + \int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} K(\varphi, \theta) F(\theta) d\theta = 0, \quad \varphi \in (-\varphi_L/2, \varphi_L/2), \quad (13)$$

где первый интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши, $K(\varphi, \theta) = -(\pi/2)\partial H(\varphi, \theta)/\partial\varphi - 1(\theta - \varphi)$ — гладкая по обеим переменным функция.

Для единственности решения (13) необходимо дополнительное условие, которое можно получить интегрированием (12) по φ

$$\int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} L(\theta) F(\theta) d\theta = 0, \quad (14)$$

где $L(\theta) = \int_{-\varphi_L/2}^{\varphi_L/2} H(\varphi, \theta) d\varphi$ — гладкая функция.

Для удобства введем безразмерные переменные $t = 2\varphi/\varphi_L$, $\tau = 2\theta/\varphi_L$. В новых переменных (13) и (14) принимают вид

$$\int_{-1}^1 v(\tau) f\tau / (\tau - t) + \int_{-1}^1 K_1(t, \tau) v(\tau) d\tau = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad (15)$$

$$\int_{-1}^1 L_1(\tau) v(\tau) d\tau = 0, \quad (16)$$

где $v(\tau) = F(\varphi_L\tau/2)$, $K_1(t, \tau) = (\varphi_L/2)K(\varphi_L t/2, \varphi_L\tau/2)$, $L_1(\tau) = L(\varphi_L\tau/2)$.

Уравнения типа (15) с дополнительным условием (16) часто возникают в задачах аэродинамики [34], теории упругости, электростатики и т.д. Для них развит и математически обоснован ряд прямых численных методов, получивших название метода дискретных особенностей [20,22,34]. Ключевым шагом в этих подходах является замена сингулярных интегралов квадратурными формулами. Оценка точности квадратурных формул может быть получена аналитически. В результате СИУ (11) с дополнительным условием (12) сводятся к СЛАУ. Равенство нулю определителя полученной СЛАУ и дает искомые собственные значения. Два способа дискретизации (11), (12) приведены в Приложении.

Следует также отметить, что при вычислении ядер СИУ для параметров реальных коаксиальных гиротронов возникают существенные трудности, связанные с вычислением функций Бесселя больших порядков и аргументов. Непосредственное вычисление функций Бесселя с помощью стандартных встроенных программ возможно лишь для нескольких первых членов бесконечных

рядов, входящих в (10). В силу медленной сходимости этих рядов ($W_\nu(a, b) \sim (|b - a|/(b - a))/|\nu| + O(|\nu|^{-3})$, $\nu \rightarrow \pm\infty$) необходимо применять оригинальные методы повышения сходимости рядов при вычислении функций $G_1(x)$, $G_2(x)$ и функций Бесселя, которые не приводят к накоплению погрешностей. Иначе достичь необходимой точности при вычислении собственных значений ($< 0.01\%$) невозможно. Один из вариантов повышения сходимости указанных рядов описан в [25].

3. Примеры численных расчетов

Конкретные численные расчеты выполнялись для резонаторов двух коаксиальных гиротронов. Одним из них является коаксиальный гиротрон на моде $TE_{31,17}$, экспериментально реализованный в Карлсруэ, Германия [12]. Геометрия резонатора $TE_{31,17}$ коаксиального гиротрона качественно не отличается от приведенной на рис. 2. Внутренний проводник имеет 72 канавки прямоугольной формы. Ширина канавок 0.35 mm, глубина — 0.45 mm. Наиболее опасными паразитными модами в этом гиротроне являются $TE_{28,18}$, $TE_{29,18}$, $TE_{29,17}$, $TE_{30,17}$, $TE_{32,17}$ и $TE_{30,18}$. Расчет добротностей этих мод на основе строгого подхода Q_{SIE} и импедансного Q_{IMP} приближения приведен в табл. 1.

Как видно из таблицы, более строгие расчеты приводят к более высоким значениям добротности для всех без исключения мод. Однако повышение не является одинаковым. Для мод с более низкой добротностью повышение, как правило, более существенно. Небольшое исключение составляет лишь мода $TE_{30,18}$.

На рис. 3 в качестве иллюстрации приведена зависимость собственного значения моды $TE_{29,18}$ от продольной координаты для резонатора $TE_{31,17}$ коаксиального гиротрона $\chi_{29,18}(z)$, полученная на основе строгого электродинамического анализа (жирная линия) и импедансного приближения (тонкая линия). Как видно из графиков, истинное значение χ меньше даваемого импедансным приближением. Относительная погрешность импедансного приближения является не очень большой ($\sim 0.01\%$). Однако она достигает 50% от полного изменения $\chi_{29,18}(z)$ вдоль длины резонатора, что может привести к значительным искажениям при оценках

Таблица 1. Сравнение вычисления дифракционной добротности конкурирующих мод на основе импедансного приближения и строгого подхода для $TE_{31,17}$ коаксиального гиротрона [12]

| Мода | Q_{IMP} | Q_{SIE} | $\Delta Q, \%$ |
|--------------|-----------|-----------|----------------|
| $TE_{31,17}$ | 1866 | 1892 | 1.39 |
| $TE_{28,18}$ | 1275 | 1419 | 11.29 |
| $TE_{29,18}$ | 1518 | 1647 | 8.5 |
| $TE_{29,17}$ | 1602 | 1671 | 4.31 |
| $TE_{30,17}$ | 1752 | 1797 | 2.5 |
| $TE_{30,18}$ | 1731 | 1831 | 5.78 |
| $TE_{32,17}$ | 1951 | 1965 | 0.07 |

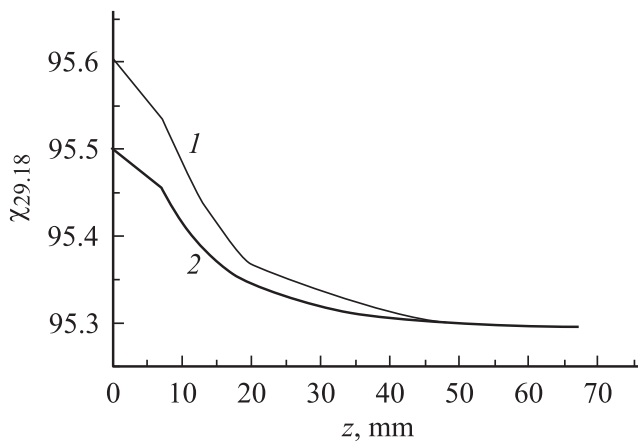


Рис. 3. Сравнение вычисления собственного значения моды $TE_{29,18}$ в зависимости от продольной координаты для резонатора $TE_{31,17}$ коаксиального гиротрона при использовании импедансного приближения (1) и строгого подхода (2).

селективных свойств коаксиальных резонаторов, сделанных на основе импедансного приближения. Сравнительные графики для собственных значений остальных мод этого резонатора качественно не отличаются от приведенных на рис. 3. При этом следует отметить, что для мод с меньшей добротностью погрешность импедансного приближения оказывается более существенной.

Результаты, полученные для другого резонатора коаксиального гиротрона, который в настоящее время находится на стадии проектирования (рабочая мода $TE_{34,19}$ [35]) и предназначен для использования в проекте ПЕР, показали очень похожие различия [31]. Резонатор $TE_{34,19}$ коаксиального гиротрона качественно не отличается от показанного на рис. 2, более полные и точные данные о нем можно найти в [35]. Кроме добротностей и собственных значений для обоих резонаторов был рассчитан сценарий конкуренции мод [31]. Показано, что более точный расчет собственных значений на основе строгого электродинамического подхода приводит к существенным изменениям в сценарии конкуренции мод по сравнению с импедансным приближением в случае $TE_{34,19}$ гиротрона. В случае $TE_{31,17}$ гиротрона сценарий конкуренции мод оказался менее чувствителен к погрешностям, даваемым импедансной моделью. Детали сравнительного анализа конкуренции мод можно найти в [31].

В заключение отметим, что расчеты выполнялись независимо на основе двух алгоритмов, использующих различные схемы дискретизации и различные методы вычисления матричных элементов. Получена высокая точность совпадения результатов, что снимает всякие сомнения относительно их достоверности. Сходимость численных результатов для собственных значений иллюстрируется в Приложении. Полученные результаты позволяют заключить, что абсолютная погрешность в вычислениях собственных значений не превышает $5 \cdot 10^{-7}$,

что является вполне достаточным для адекватных расчетов сценария конкуренции мод, несмотря на его высокую чувствительность к погрешности вычисления собственных значений.

Приложение

Используя квадратурные формулы интерполяционного типа с узлами в нулях полиномов Чебышева, можно свести (15), (16) к СЛАУ без каких-либо дополнительных аналитических преобразований. Этот подход был предложен и разработан в [22,36]. В соответствии с ним неизвестная функция $v(\tau)$ представляется в виде

$$v(\tau) = \frac{\vartheta_0(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad (17)$$

где $\vartheta_0(\tau)$ — ограниченная функция.

Будем искать приближение $\vartheta_0^{(n)}(\tau)$ новой неизвестной функции $\vartheta(\tau)$ в виде полинома степени $n-1$ из приближенного СИУ

$$\int_{-1}^1 \frac{\vartheta_0^{(n)}(\tau)}{\tau-t} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \int_{-1}^1 K_1^{(n)}(t, \tau) \vartheta_0^{(n)}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \quad t \in (-1, 1) \quad (18)$$

с приближенным дополнительным условием

$$\int_{-1}^1 L_1^{(n)}(\tau) \vartheta_0^{(n)}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0. \quad (19)$$

Здесь ядра заменены интерполяционными полиномами Лагранжа

$$K_1^{(n)}(t, \tau) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} K_1(t_j^{(2,n)}, t_k^{(1,n)}) \frac{T_n(\tau)}{(\tau - t_k^{(1,n)}) T_n'(t_k^{(1,n)})} \times \frac{U_{n-1}(t)}{(t - t_j^{(2,n)}) U_{n-1}'(t_j^{(2,n)})},$$

$$L_1^{(n)}(\tau) = \sum_{k=1}^n L_1(t_k^{(1,n)}) \frac{T_n(\tau)}{(\tau - t_k^{(1,n)}) T_n'(t_k^{(1,n)})}.$$

Причем в качестве узлов интерполирования по переменной τ выбраны нули полинома Чебышева первого рода $T_n(\tau)$

$$t_k^{(1,n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

а по переменной t — нули полинома Чебышева второго рода $U_{n-1}(t)$

$$t_j^{(2,n)} = \cos \frac{j\pi}{n}; \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Из свойств интегрального оператора с ядром Коши следует, что в левой части (18) стоит полином степени $n - 2$. Поэтому, чтобы уравнение (18) выполнялось, достаточно потребовать его выполнение в точках $t = t_j^{(2,n)}$; $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Вычисляя интегралы, входящие в (18), (19) с помощью квадратурных формул типа Гаусса, получаем СЛАУ для определения $\vartheta_0^{(n)}(t_k^{(1,n)})$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \vartheta_0^{(n)}(t_k^{(1,n)}) \left[\frac{1}{t_k^{(1,n)} - t_j^{(2,n)}} + K_1(t_j^{(2,n)}, t_k^{(1,n)}) \right] = 0;$$

$$j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \vartheta_0^{(n)}(t_k^{(1,n)}) L_1(t_k^{(1,n)}) = 0. \quad (20)$$

СЛАУ (20) полностью эквивалентна задаче (18), (19).

Сходимость может быть ускорена, если использовать другое, более адекватное физическим условиям задачи представление неизвестной функции

$$v(\tau) = \frac{\vartheta_0(\tau)}{\sqrt[3]{1 - \tau^2}}. \quad (21)$$

Опишем метод дискретизации в этом случае. Пусть $\{P_n(t)\}$ — система полиномов Якоби, ортогональная на отрезке $[-1, 1]$ относительно веса $(1 - t^2)^{-1/3}$, а $\{Q_n(t)\}$ — система сопряженных функций Якоби

$$Q_n(t) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\tau)}{\tau - t} \frac{d\tau}{\sqrt[3]{1 - \tau^2}}.$$

Будем искать приближение $\vartheta_r^{(n)}(\tau)$ функции $\vartheta_r(\tau)$ в виде полинома степени $n - 1$ из приближенных СИУ и дополнительного условия, в которых ядра заменены интерполяционными полиномами. При этом в качестве узлов интерполирования по переменной τ берутся нули полинома $P_n(t)$: $x_k^{(1,n)}$; $k = 1, 2, \dots, n$, а по переменной t — точки, лежащие между ними, $x_j^{(2,n)} = (x_j^{(1,n)} + x_{j+1}^{(1,n)})/2$; $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Рассматривая уравнение (15) в точках $x_j^{(2,n)}$; $j = 1, 2, \dots, n - 1$ и используя квадратурную формулу интерполяционного типа для вычисления сингулярного интеграла [37] и формулу Гаусса для вычисления остальных интегралов, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения $\vartheta_r^{(n)}(x_k^{(1,n)})$; $k = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n \vartheta_r^{(n)}(x_k^{(1,n)}) \left[\frac{Q_n(x_k^{(1,n)}) - Q_n(x_j^{(2,n)})}{P'_n(x_k^{(1,n)})(x_k^{(1,n)} - x_j^{(2,n)})} + \lambda_k^{(n)} K_1(x_j^{(2,n)}, x_k^{(1,n)}) \right] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$\sum_{k=1}^n \vartheta_r^{(n)}(x_k^{(1,n)}) L_1(x_k^{(1,n)}) = 0.$$

Таблица 2. Вычисления по квадратурным формулам на основе полиномов Чебышева

| n | χ |
|-----|--------------|
| 2 | 94.646576961 |
| 3 | 94.645294198 |
| 4 | 04.645102862 |
| 5 | 94.645022786 |
| 10 | 94.644937760 |
| 20 | 94.644923566 |
| 30 | 94.644921730 |
| 40 | 94.644921225 |

Таблица 3. Вычисления по квадратурным формулам на основе полиномов Якоби

| n | χ |
|-----|--------------|
| 2 | 94.645055902 |
| 3 | 94.644915529 |
| 4 | 94.644907864 |
| 5 | 94.644912573 |
| 6 | 94.644917864 |
| 7 | 94.644918747 |
| 8 | 94.644919839 |
| 9 | 94.644920050 |

Здесь

$$\lambda_k^{(n)} = \int_{-1}^1 \left[\frac{P_n(\tau)}{P'_n(x_k^{(1,n)})(\tau - x_k^{(1,n)})} \right]^2 \frac{d\tau}{\sqrt[3]{1 - \tau^2}}$$

— коэффициенты Кристоффеля [38]. В (17) функция $\vartheta_0(\tau)$ в силу условия Мейкснера на ребре прямоугольного клина ведет себя как $(1 - \tau^2)^{1/6}$ на концах отрезка интегрирования. Поэтому ее производная стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow \pm 1$. Функция $\vartheta_r(\tau)$, определенная в (21), является более гладкой ($\vartheta_r'(\tau)$ — ограниченная функция), поэтому успешнее интерполируется полиномами. Но для применения этого подхода необходимо вычислять $x_j^{(2,n)}$, $x_j^{(1,n)}$, $P'(x_k^{(1,n)})$, $Q_n(x_k^{(1,n)})$, $Q_n(x_j^{(2,n)})$; $k = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Табл. 2 и 3 иллюстрируют точность и сходимость вычисления собственного значения χ для рабочей моды резонатора $TE_{31,17}$ гиротрона в сечении $z = 0$ ($R_0 = 26.38425$, $R_i = 7.71946$), где погрешность импедансного приближения наибольшая, так же как и чувствительность результатов к погрешностям.

Заключение

Расчеты резонаторов коаксиальных гиротронов, проведенные на основе строгого электродинамического подхода, обнаружили серьезные отличия от результатов, полученных на основе приближенной импедансной модели. Собственные значения различных мод коаксиального резонатора оказываются завышенными, особенно вблизи

входного конца резонатора. Величина завышения имеет порядок полного изменения собственного значения вдоль резонатора и зависит от радиального и азимутального индексов моды. Анализ результатов по расчету добротностей конкурирующих мод для обеих гиротронов работающих как на $TE_{31,17}$, так и на $TE_{34,19}$ позволяет заключить, что добротность мод обоих резонаторов, рассчитанные на основе импедансной модели, оказываются в основном заниженными. Причем величина погрешности увеличивается с увеличением радиального индекса и уменьшается при увеличении азимутального индекса. В то же время ее влияние на сценарий конкуренции мод увеличивается как при увеличении азимутального, так и радиального индексов мод. Для $TE_{31,17}$ гиротрона средняя погрешность добротностей является значительно больше, чем для $TE_{34,19}$ гиротрона, однако сценарий конкуренции мод качественно мало отличается от рассчитанного в импедансном приближении. В то же время для $TE_{34,19}$ гиротрона сценарий конкуренции на основе строгого подхода мод существенно отличается от рассчитанного в импедансном приближении [31]. Принимая во внимание тот факт, что эволюция резонаторов коаксиальных гиротронов идет в сторону увеличения азимутальных и радиальных индексов рабочей и конкурирующих мод, использование импедансной модели для прогнозирования селективных свойств коаксиальных резонаторов с гофрированным внутренним проводником представляется все более проблематичным. Предложенный строгий электродинамический подход на основе СИУ является эффективной альтернативой импедансному приближению. Сравнительно низкие затраты компьютерного времени за счет улучшения организации вычислений позволяют использовать этот подход для оптимизации параметров коаксиальных гиротронов и усовершенствования геометрии их резонаторов.

Авторы признательны проф. Хельсинского технологического университете О. Думбрайсу (O. Dumbrajs), проф. Гамбургского технического университета К. Шунеману (K. Schünemann), директору института импульсной и микроволновой техники (Institut für Hochleistungsimpuls und Mikrowellentechnik) Исследовательского центра Карлсруэ (Forschungszentrum Karlsruhe) проф. М. Тумму (M. Thumm) и сотрудникам того же института доктору Б. Пешчику (B. Piosczyk) и доктору Г. Даммерцу (G. Dammertz) за интерес к работе и ценные замечания.

Работа выполнялась при частичной поддержке Академии наук Финляндии.

Список литературы

- [1] Thumm M. // Intern. J. Infrared and Millimeter Waves. 2001. Vol. 22. N 3. P. 377–386.
- [2] Felch K.L. et al. // Proc. IEEE. 1999. Vol. 87. N 5. P. 752–781.
- [3] Makovski M. // IEEE Trans., Plasma Sci. 1996. Vol. 24. N 3. P. 1023–1032.
- [4] Dumbrajs O., Heikkinen J.A., Zohm H. // Nuclear Fusion. 2001. Vol. 41. N 7. P. 927–944.
- [5] Myasnikov V.E. et al. // Proc. Conf. Dig. 23rd Intern. Conf. Infrared and Millimeter Waves. Colchester (England), 1998. P. 24–25.
- [6] Sakomoto K. et al. // J. Phys. Soc. Japan. 1996. Vol. 65. P. 1888–1890.
- [7] Piosczyk B. et al. // IEEE Trans., Plasma Sci. 1998. Vol. 26. N 3. P. 393–401.
- [8] Piosczyk B. et al. // Frequenz. 2001. Vol. 55. N 9–10. P. 242–246.
- [9] Kuntze M. et al. // Fusion Engineering and Design. 2001. Vol. 56–57. P. 645–648.
- [10] Flyagin V.A. et al. // Proc. Conf. Dig. 22nd Intern. Conf. Infrared and Millimeter Waves. Wintergreen (VA), 1997. P. 112–113.
- [11] Advani R. et al. // IEEE Trans., Plasma Sci. 2001. Vol. 29. N 6. P. 943–950.
- [12] Piosczyk B. et al. // Proc. Conf. Dig. 25th Intern. Conf. Infrared and Millimeter Waves. Beijing (China), 2000. P. 19–20.
- [13] Iatrou C.T. // IEEE Trans., Plasma Sci. 1996. Vol. 24. N 3. P. 596–605.
- [14] Iatrou C.T., Kern S., Pavelyev A.B. // IEEE Trans., Microwave Theory and Techniques. 1996. Vol. 44. N 1. P. 596–605.
- [15] Barosso J.J., Correa R.A., de Castro P.J. // IEEE Trans., Microwave Theory and Techniques. 1998. Vol. 46. N 9. P. 1221–1230.
- [16] Zaginaylov G.I., Hirata A., Ueda T. et al. // IEEE Trans., Plasma Sci. 2000. Vol. 28. N 3. P. 614–620.
- [17] Zaginaylov G.I., Gandel Yu.V., Kamyschan O.P. et al. // IEEE Trans., Plasma Sci. 2002. Vol. 30. N 3. P. 1151–1159.
- [18] Omar A.S., Jostingmeier A., Rieckmann C. et al. // IEEE Trans., Microwave Theory and Techniques. 1994. Vol. 42. N 11. P. 2139–2148.
- [19] Raguin J.-Y., Schuenemann K. // Proc. Intern. Conf. „Electronics and Radiophysics of Ultra-High Frequencies“. St. Petersburg, 1999. P. 403–409.
- [20] Гандель Ю.В. Вопросы кибернетики, М.: Изд-во АН СССР, 1986. ВК-124. С. 166–183.
- [21] Gandel Yu.V., Polyanskaya T.S. // J. Soviet Mathematics. A Translation of Selected Russian Serial Publications in Mathematics. New York, 1990. Vol. 48. N 2. P. 144–152.
- [22] Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полнянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. Учебное пособие. Ч. II. Харьков, ХГУ, 1992. 145 с.
- [23] Гандель Ю.В. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: Институт математики НАН Украины, 1995. С. 65–66.
- [24] Гандель Ю.В. // Электромагнитные явления. 1998. Т. 1. № 2. С. 220–232.
- [25] Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. // Радиофизика и электроника. Харьков: Изд-во Института радиофизики и электроники НАН Украины, 2002. Т. 7. Спецвыпуск. С. 196–203.
- [26] Zaginaylov G.I., Gandel Yu.V., Turbin P.V. // Microwaves and Optical Technology Lett. 1997. Vol. 16. N 1. P. 50–54.
- [27] Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И. // ДАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 475–477.
- [28] Загинайлов Г.И. // ДАН. 1999. Т. 367. № 1. С. 40–43.
- [29] Гандель Ю.В., Хорошун В.В. // 46-я Всесоюз. научная сессия общества им. Попова, посвященная Дню радио. Тез. докл. Москва: Радио и связь, 1991. С. 33.

- [30] *Tsalamengas J.L.* // IEEE Trans., Microwaves Theory and Techniques. 2001. Vol. 49. N 3. P. 555—559.
- [31] *Dumbrajs O., Gandel Yu.V., Zaginaylov G.I.* // 27th Intern. Conf. Infrared and Millimeter Waves. Conference Digest San-Diego (USA), 2002. P. 185–186.
- [32] *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
- [33] *Nosich A.I.* // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1999. Vol. 41. N 3. P. 34–49.
- [34] *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО „Янус“, 1995. 520 с.
- [35] *Piosczyk B. et al.* // 26th Intern. Conf. Infrared and Millimeter Waves. Conference Digest. Toulouse (France), 2001. P. 5-15–5-16.
- [36] *Гандель Ю.В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков; Херсон, 2001. 92 с.
- [37] *Корнейчук А.А.* // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. 1964. С. 64–74.
- [38] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.