

03

О характерном времени реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 24 ноября 2003 г.)

Получено и решено нелинейное интегральное уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуды нелинейной неустойчивой волны на плоской однородной заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Выяснилось, что характерное время реализации неустойчивости определяется начальной амплитудой виртуальной волны, с которой начинается неустойчивость, и закритичностью величины параметра Тонкса–Френкеля. При равной нулю закритичности характерное время реализации неустойчивости определяется только начальной амплитудой и может быть весьма большим, до 8 h. Этот эффект характерен именно для плоской заряженной поверхности жидкости и не имеет места для заряженных капелек.

1. Исследование физических закономерностей реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1,2]. Однако, несмотря на значительный интерес к этому феномену, до сих пор не изучен физический механизм формирования „конусов Тейлора“ — выступов на заряженной поверхности жидкости, образующихся на нелинейной стадии реализации ее неустойчивости, с вершин которых идет сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных капелек [1–4]. Качественная модель формирования таких выступов предложена еще в [5]. В [6] предпринята попытка их численного расчета, которая мало дала для понимания феномена. Но никто не пытался оценить характерное время формирования „конусов Тейлора“ от момента начала реализации неустойчивости заряженной жидкой поверхности. Этому вопросу и посвящено настоящее рассмотрение, проведенное по схеме, использовавшейся ранее при анализе нелинейных стадий развития сильно заряженной капли [7,8] и незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле большой величины [9].

2. Пусть идеальная несжимаемая электропроводная жидкость с плотностью ρ заполняет в поле тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ полупространство $z \leq 0$ в декартовой системе координат (за \mathbf{n}_z обозначен орт оси z), а ее невозмущенная волновым движением, равновесная плоская поверхность (совпадающая с плоскостью XOY) подвержена действию сил поверхностного натяжения с коэффициентом γ и несет однородно распределенный электрический заряд плотностью σ .

В рамках линейной модели [10,11] критические условия реализации неустойчивости такой поверхности имеют вид

$$W_* = ak_* + (ak_*)^{-1}, \quad k_* = \alpha^{-1}, \quad (1)$$

W — безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности

жидкости по отношению к поверхностному заряду: $W = 4\pi\sigma^2/\sqrt{\rho g \gamma}$; k — волновое число; α — капиллярная постоянная жидкости: $\alpha = \sqrt{\gamma/\rho g}$.

Учет нелинейной поправки к частоте, появляющейся при расчетах профилей нелинейных капиллярно-гравитационных волн в третьем порядке по малому параметру $\varepsilon \equiv (a/\alpha)$ — отношению амплитуды волны a к капиллярной постоянной α приводит к появлению зависимости критической величины параметра W от амплитуды волны a (от малого параметра ε) [12]

$$W_* \approx 2 - \beta \cdot \varepsilon^2 \equiv 2 - \beta(a_0/\alpha)^2, \quad \beta = 11/8. \quad (2)$$

Проследим за эволюцией во времени капиллярно-гравитационной волны с $k_* = \alpha^{-1}$, потерявшей устойчивость при выполнении условия (1), т. е. при $W = W_* = 2$, принимая во внимание то обстоятельство, что с ростом амплитуды волны критическое значение параметра Тонкса–Френкеля, согласно (2), снижается.

Невозмущенная капиллярным волновым движением равновесная плоская заряженная поверхность жидкости при $W = 2$ устойчива. Неустойчивость проявится, если на плоской поверхности жидкости появится виртуальная волна сколь угодно малой амплитуды a_0 . В таком случае существующее значение параметра Тонкса–Френкеля $W = 2$ для волны будет закритическим и, согласно теории [5,7–10], амплитуда этой волны начнет нарастать во времени по экспоненциальному закону $a(t) = a_0 \exp(\chi \cdot t)$ с инкрементом χ , пропорциональным корню квадратному из разности между существующим значением $W = W_* = 2$ и критическим для виртуальной волны, определяемым по соотношению (2), т. е.

$$\chi = (a_0/\alpha) \sqrt{(\beta \cdot g/\alpha)}. \quad (3)$$

Такой экспоненциальный рост с инкрементом, пропорциональным начальной амплитуде, будет обеспечен волне лишь на коротком интервале времени: пока прирост начальной амплитуды Δa не выйдет за пределы

условия $\Delta a \ll a_0$. Затем в выражении для инкремента (3) следует заменить a_0 на $a_0 + \Delta a$ и рассмотреть экспоненциальный рост амплитуды на следующем коротком интервале времени и т.д. В итоге (детальные рассуждения вывода можно найти в работах [7–9], посвященных исследованию временной эволюции капель, неустойчивых по отношению к собственному либо поляризационному зарядам) для отыскания амплитуды неустойчивой волны получим нелинейное интегральное уравнение

$$a(t) = a_0 \exp\left(\int_0^t \frac{a(t)}{\alpha} \sqrt{\beta \frac{g}{\alpha}} dt\right), \quad (4)$$

решение которого имеет вид

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - (a_0/\alpha)\sqrt{\beta \cdot g/\alpha} \cdot t} \equiv \frac{a_0}{1 - \chi t}. \quad (5)$$

Из (5) несложно видеть, что характерное время реализации неустойчивости t_* , определяемое как характерное время неограниченного приближения к нулю знаменателя (5), полностью характеризуется инкрементом неустойчивости в начальный момент реализации неустойчивости $t_* = \chi^{-1}$, хотя весь процесс является существенно нелинейным. Отметим, что смысл χ в рассмотренном нелинейном росте амплитуды неустойчивой волны со временем и в экспоненциальном росте, характерном для линейной теории, различен: в линейной теории за время χ^{-1} амплитуда волны увеличивается ≈ 2.73 раза, а в рассмотренном нелинейном процессе за то же время амплитуда достигает бесконечно больших значений. То, что закон нарастания амплитуды волны со временем (5) обеспечивает большую скорость роста по сравнению с экспоненциальным, легко увидеть, раскладывая (5) и $\exp(\chi t)$ при $\chi t < 1$ по степеням χt и сравнивая их между собой.

Минимально возможное значение a_0 определяется амплитудой капиллярных волн, порождаемых тепловым движением молекул жидкости $a_0 \approx \sqrt{\kappa T/\gamma}$ (κ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура жидкости). Амплитуда таких волн для подавляющего большинства реальных жидкостей при разумных (в смысле возможности существования жидкости) температурах будет иметь величину около половины ангстрема, и, следовательно, характерное время развития неустойчивости будет весьма большим. Так, при $a_0 = 10^{-8}$ см характерное время реализации неустойчивости t_* , например, для заряженной поверхности воды, граничащей с вакуумом, приближается к 8 h. С ростом начальной амплитуды a_0 характерное время t_* уменьшается $\sim a_0^{-1}$ и уже при $a_0 \approx 10^{-3}$ см измеряется единицами секунд. В итоге получаем, что для получения в экспериментах при $W = W_* = 2$ характерных времен реализации неустойчивости, измеряемых секундами, необходимо виртуальные волны $k \cdot \alpha = 1$, с которых начинается неустойчивость, создавать искусственно.

Сказанное означает, что в экспериментах по проверке справедливости критерия неустойчивости заряженной поверхности жидкости [13,14] характерное время ожидания реализации неустойчивости должно зависеть от способа задания виртуальной волны. Поскольку в работах [13,14] это обстоятельство не упоминалось, остается предположить, что в экспериментах виртуальные волны возникали либо из-за теплового движения молекул, но тогда время ожидания реализации неустойчивости должно быть весьма большим, либо генерировались в результате случайных сотрясаний установки, а их амплитуда не контролировалась. Впрочем, в [3] имеется прямое указание на длительность линейной стадии подготовки разряда: так, там упоминается, что примерно из пятнадцати метров киноплетки, на которую фиксировался эксперимент с момента подачи напряжения, сам акт выброса струйки жидкости при реализации неустойчивости зафиксирован лишь на одном кадре. В [14] о времени задержки разряда вообще не упоминается. Сказанному существует еще одно возможное объяснение: в экспериментах [13,14] использовалось напряжение, превышавшее критическое, и эксперимент происходил при наличии закритичности параметра Тонкса–Френкеля ΔW по сравнению с критическим значением $W = W_* = 2$, определяемым (1), что и сказалось на величине характерного времени реализации неустойчивости.

3. Пусть в начальный момент времени величина параметра Тонкса–Френкеля превышает критическое для плоской поверхности жидкости на ΔW и равна $W_* + \Delta W$. В такой ситуации величина инкремента неустойчивости в начальный момент ее реализации будет зависеть как от величины начальной амплитуды виртуальной волны a_0 , так и от степени закритичности ΔW и в соответствии с традиционными представлениями [1,7–10] задается соотношением

$$\chi = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[\Delta W + \beta \left(\frac{a_0}{\alpha} \right)^2 \right]}.$$

Зависимость же амплитуды неустойчивой волны от времени определится как решение нелинейного интегрального уравнения

$$a(t) = a_0 \exp\left(\int_0^t \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[\Delta W + \beta \left(\frac{a(t)}{\alpha} \right)^2 \right]} dt\right),$$

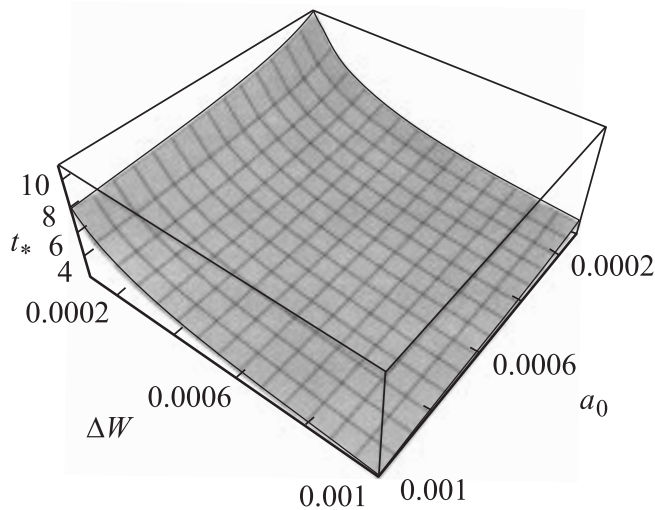
решение которого имеет вид

$$a(t) = \frac{2 \exp(\sqrt{g \cdot \Delta W / \alpha} \cdot t) \cdot (1 + \delta)}{(1 + \delta)^2 - (a_0/\alpha)^2 \exp(2\sqrt{g \cdot (\Delta W / \alpha)} t)},$$

$$\delta \equiv \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\Delta W}\right) \left(\frac{a_0}{\alpha}\right)^2\right)}.$$

Характерное время реализации неустойчивости, определяемое данной зависимостью, получается из условия обращения в нуль знаменателя $a(t)$ в виде

$$t_* = \sqrt{(\alpha/g \cdot \Delta W)} \ln[\delta(\alpha/a_0)]. \quad (6)$$



Зависимость характерного времени реализации неустойчивости t_* от величины начальной амплитуды волны a_0 при ее изменении от 10^{-4} до 10^{-3} см и степени закритичности параметра Тонкса–Френкеля ΔW , изменяющейся от 10^{-4} до 10^{-3} .

Из (6) видно, что основной вклад в величину характерного времени реализации неустойчивости дает закритичность параметра Тонкса–Френкеля ΔW , а влияние величины начальной амплитуды виртуальной волны a_0 более слабо (см. рисунок). Принимая во внимание, что величина капиллярной постоянной α для большинства жидкостей измеряется единицами миллиметров, из (6) несложно найти, что уже при $\Delta W \approx 10^{-3}$ независимо от величины a_0 характерное время реализации неустойчивости будет измеряться секундами. Применительно к экспериментам [13–14] сказанное позволяет предположить, что в обоих случаях измерения проводились при определяющем влиянии на характерное время реализации неустойчивости закритичности параметра Тонкса–Френкеля.

4. Интересно отметить, что при рассмотрении закономерностей реализации неустойчивости капель по отношению к собственному и индуцированному зарядам [7–9] зависимость характерного времени реализации неустойчивости от амплитуды начального возмущения равновесной формы капли $\xi_0 P_2(\cos \theta)$ (здесь $P_2(\cos \theta)$ — полином Лежандра) маскируется его сильной зависимостью от радиуса капли R , имеющей вид $t_* \sim (R^4/\xi_0)$. При $R \approx 10^{-2}$ см (а именно для капель таких размеров проводились экспериментальные исследования их устойчивости по отношению к поверхностному заряду [2]) и $\xi_0 \approx 10^{-8}$ см получим $(R^4/\xi_0) \sim 1$. Поэтому обнаруженная в проведенном рассмотрении сильная зависимость характерного времени развития неустойчивости от величины начальной амплитуды на пороге критичности параметра Тонкса–Френкеля свойственна именно плоской заряженной поверхности жидкости.

Заключение

Характерное время реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости t_* определяется начальной амплитудой a_0 виртуальной волны, с которой начинается неустойчивость, и степенью превышения параметром Тонкса–Френкеля критического для волны данной длины значения (т.е. закритичностью ΔW). Влияние закритичности ΔW на величину t_* при $\Delta W \neq 0$ является преобладающим. При $\Delta W = 0$ характерное время t_* обратно пропорционально a_0 и при достаточно малых a_0 может достигать весьма больших величин в силу медленности нарастания амплитуды на линейной стадии неустойчивости. Так, если виртуальная волна порождается тепловым движением молекул жидкости и $a_0 \approx 10^{-8}$ см, то t_* , например, для воды приближается к 8 h.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 03-01-00760) и гранта Президента РФ (№ МК 929.2003.01).

Список литературы

- [1] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. N. 1. С. 137–151.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Taylor G.I. // Proc. Roy. Soc. (London). 1964. Vol. 280A. P. 383–397.
- [4] Шевченко С.И. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 2. С. 54–58.
- [5] Tonks L. Phys. Rev. 1936. Vol. 48. P. 562–571.
- [6] Allen J.E. // J. Phys. D. 1985. Vol. 18. P. 59–62.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
- [8] Ширяева С.О. // ПЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
- [9] Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 24. С. 36–40.
- [10] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. №. 4. С. 348–350.
- [11] Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 15–22.
- [12] Белоножко Д.Ф., Климов А.В., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 24. С. 41–45.
- [13] Taylor G.I., McIwan A.D. // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. Pt 1. P. 1–15.
- [14] Шутов А.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 126–130.