

О нелинейных поправках к частотам осцилляций заряженной капли в несжимаемой внешней среде

© А.Н. Жаров, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 ноября 2003 г.)

В третьем порядке малости по величине амплитуды начальной деформации равновесной сферической формы заряженной идеально проводящей капли в несжимаемой диэлектрической среде найдено аналитическое выражение для образующей ее формы и для нелинейных поправок к частотам осцилляций. Показано, что наличие окружающей каплю жидкости приводит к снижению абсолютной величины поправок к частотам и собственного заряда, критического для реализации неустойчивости капли.

1. Задача исследования нелинейных осцилляций заряженной капли во внешней диэлектрической среде представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1,2]. Поэтому она уже становилась предметом теоретического анализа во втором порядке малости как в случае несжимаемой [3], так и в случае сжимаемой внешней среды [4], но за рамками проведенных исследований остался вопрос о нелинейных поправках к частотам осцилляций, проявляющихся лишь в третьем порядке малости [5–7]. В связи со сказанным и проведено настоящее исследование.

2. Пусть имеется сферическая капля радиуса R , имеющая заряд, равный Q , идеальной несжимаемой идеальной проводящей жидкости плотностью $\rho_{(i)}$, находящейся в идеальной несжимаемой жидкости плотности $\rho_{(e)}$ с диэлектрической проницаемостью ε_d и коэффициентом межфазного поверхностного натяжения σ . Полную математическую формулировку задачи о расчете нелинейных капиллярных осцилляций капли в среде можно найти в [3,8], поэтому здесь ее приводить не будем ввиду ограниченности объема статьи.

Решая задачу об отыскании формы нелинейно осциллирующей капли методом многих масштабов (как это делалось в [3,5–7]), можно найти аналитическое выражение для образующей осесимметричной капли в любой момент времени с точностью до слагаемых третьего порядка малости. В безразмерных переменных, в которых $\rho_{(i)} = R = \sigma = 1$, оно имеет вид

$$r(\vartheta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} M_n^{(1)}(t) P_n(\cos \vartheta) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (M_n^{(2)}(t) + \varepsilon M_n^{(3)}(t)) P_n(\cos \vartheta),$$

$$M_n^{(1)}(t) = h_n \cos(\omega_n t) + \varepsilon^2 b_n t;$$

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{m \in \Omega} \frac{h_m^2}{2m+1} \cos^2(\omega_m t);$$

$$b_n = \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{h_n^2 (\Xi_n^0 + 2\omega_n^2 (\Xi_n^1 - 2\Xi_n^2))}{4(2n+1)} + \sum_{k \in \Omega} \frac{h_k^2 \Xi_n^0}{2(2k+1)} - \sum_{k \in \Omega} \frac{h_k^2}{4} \left[H_{nkkn}^{1(-)(+)} + H_{knkn}^{2(+)(+)} + H_{knkn}^{2(-)(-)} + (1 - \delta_{kn}) \times (H_{kknn}^{1(-)(+)} + H_{kknn}^{2(+)(+)} + H_{nkkn}^{2(-)(-)}) \right] \right\};$$

$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{l, m \in \Omega} \frac{h_l h_m}{2} \left(\lambda_{lmn}^{(+)} (\cos((\omega_l + \omega_m)t) - \cos(\omega_n t)) + \lambda_{lmn}^{(-)} (\cos((\omega_l - \omega_m)t) - \cos(\omega_n t)) \right);$$

$$M_0^{(3)}(t) = - \sum_{k \in \Omega} \frac{2h_k}{2k+1} M_k^{(2)}(t) \cos(\omega_k t) - \sum_{k, m, l \in \Omega} \frac{K_{kml} h_k h_m h_l}{3(2l+1)} \cos(\omega_k t) \cos(\omega_m t) \cos(\omega_l t);$$

$$M_n^{(3)}(t) = - \sum_{k \in \Omega} \frac{h_n h_k^2 (\Xi_n^0 - 2\Xi_n^1 \omega_n \omega_k - 4\Xi_n^2 \omega_k^2)}{8(2k+1) \omega_k (\omega_n + \omega_k)} \times \sin((\omega_n + \omega_k)t) \sin(\omega_k t) - \sum_{k \in \Omega} \frac{h_n h_k^2 (1 - \delta_{nk}) (\Xi_n^0 + 2\Xi_n^1 \omega_n \omega_k - 4\Xi_n^2 \omega_k^2)}{8(2k+1) \omega_k (\omega_n - \omega_k)} \times \sin((\omega_n - \omega_k)t) \sin(\omega_k t) - \sum_{g=1}^{\infty} \sum_{k, m, l \in \Omega} \frac{h_k h_m h_l (\lambda_{img}^{(+)} + \lambda_{img}^{(-)})}{4} \times \left\{ \frac{H_{kgn}^{0(+)} (\cos((\omega_k + \omega_g)t) - \cos(\omega_n t))}{\omega_n^2 - (\omega_k + \omega_g)^2} + \frac{H_{kgn}^{0(-)} (\cos((\omega_k - \omega_g)t) - \cos(\omega_n t))}{\omega_n^2 - (\omega_k - \omega_g)^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k,m,l \in \Omega} \frac{h_k h_m h_l}{4} \left\{ \frac{H_{kmln}^{1(+)(-)} (\cos(\psi_{klm}^{(+)(+)} t) - \cos(\omega_n t))}{\omega_n^2 - (\omega_k + \omega_l + \omega_m)^2} \right. \\
 & + \frac{H_{kmln}^{1(-)(+)} D_{lm}^{kn} D_{km}^{ln} (\cos(\psi_{klm}^{(+)(-)} t) - \cos(\omega_n t))}{\omega_n^2 - (\omega_k + \omega_l - \omega_m)^2} \\
 & + \frac{H_{kmln}^{2(+)(+)} D_{kl}^{mn} D_{km}^{ln} (\cos(\psi_{klm}^{(-)(-)} t) - \cos(\omega_n t))}{\omega_n^2 - (\omega_k - \omega_l - \omega_m)^2} \\
 & \left. + \frac{H_{kmln}^{2(-)(-)} D_{kl}^{mn} D_{ml}^{kn} (\cos(\psi_{klm}^{(+)(-)} t) - \cos(\omega_n t)) \right\}; \quad (1)
 \end{aligned}$$

где ε — малый параметр, определяющий амплитуду начальной деформации; $P_n(\cos \vartheta)$ — полином Лежандра порядка n ; ϑ — полярный угол сферической системы координат; t — время; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод; h_m — константы, учитывающие вклад m моды в формирование начальной формы капли ($\sum_{m \in \Omega} h_m = 1$); $\omega_n = (\chi_n(n-1)n(n+1)(n+2-W))^{1/2}$ — частота капиллярных колебаний капли; $W = Q^2/(4\pi)\varepsilon_d$ — параметр Рэлея; δ_{kn} — символ Кронекера; χ_n , $\lambda_{lmn}^{(+)}$, $\lambda_{lmn}^{(-)}$, K_{lmn} , Ξ_n^0 , Ξ_n^1 , Ξ_n^2 , $H_{kgn}^{0(\pm)}$, $H_{kmln}^{1(\pm)(\pm)}$, $H_{kmln}^{2(\pm)(\pm)}$, $\psi_{klm}^{(\pm)(\pm)}$, D_{lm}^{kn} — коэффициенты, вынесенные в Приложение.

3. Из (1) видно, что поправки к частотам, пропорциональные b_n , имеют второй порядок малости по ε и содержат в знаменателях множители, обращающиеся при определенных соотношениях между частотами различных мод в нуль (в таких случаях принято говорить о резонансном характере соответствующих поправок [9]). Так, когда в начальный момент времени возбуждена четвертая мода, поправка к частоте имеет резонанс при $\omega_6^2 - 4\omega_4^2 = 0$, а когда возбуждена пятая мода, резонанс реализуется при $\omega_8^2 - 4\omega_5^2 = 0$. Вдали от положений резонансов величины поправок к частотам $b_n \cdot \varepsilon^2$ с ростом плотности окружающей жидкости $\rho_{(e)}$ уменьшаются по абсолютной величине (рис. 1).

Учет нелинейных поправок к частотам капиллярных колебаний капли приводит к изменению критического значения параметра Рэлея W_{cr} , при котором реализуется неустойчивость n -й моды по отношению к собственному заряду [6]. Условие проявления неустойчивости n моды с учетом нелинейной поправки к частоте может быть записано в виде

$$(\omega_n + \varepsilon^2 b_n)^2 = \omega_n^2 + 2\varepsilon^2 \omega_n b_n + O(\varepsilon^4) = 0.$$

Влияние наличия внешней среды на критические условия неустойчивости сводится к незначительному увеличению критического значения параметра Рэлея с ростом плотности окружающей жидкости $\rho_{(e)}$ (в связи с уменьшением по абсолютной величине коэффициента b_b) [7] и к весьма заметному снижению величины коэффициента межфазного поверхностного натяжения по сравнению с коэффициентом поверхностного натяжения капли в вакууме [10]. В итоге критическая для

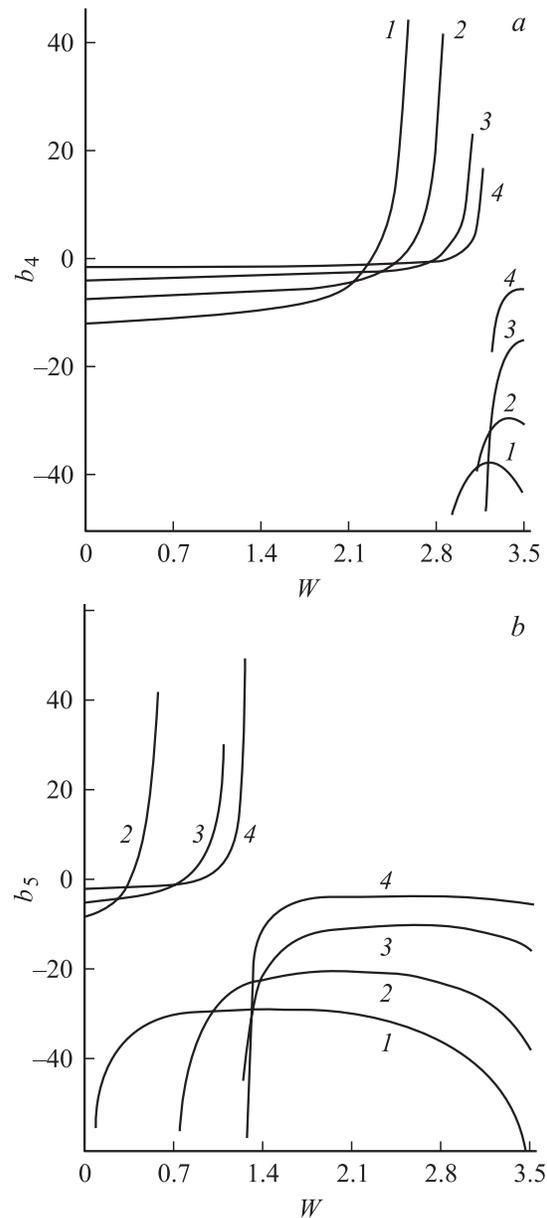


Рис. 1. Зависимость коэффициента b_n , характеризующего сдвиг частоты n -й моды, от параметра Рэлея W при начальном возбуждении n -й моды для различных значений плотности окружающей жидкости: $\rho_{(e)} = 0$ (1), $\rho_{(e)} = 1$ (2), $\rho_{(e)} = 10$ (3), $\rho_{(e)} = 100$ (4). $n = 4$ (a), 5 (b).

реализации неустойчивости капли величина собственного заряда при наличии внешней среды снижается.

Амплитуды мод второго $M_n^{(2)}$ и третьего $M_n^{(3)}$ порядков также зависят от плотности окружающей жидкости, что приводит к некоторому изменению формы поверхности капли (к локальному уменьшению кривизны ее поверхности), находящейся во внешней среде, по сравнению с каплей в вакууме (рис. 2). Наличие внешней среды наиболее заметно сказывается на форме поверхности капли в окрестности точек, обладающих наиболее высокой скоростью движения.

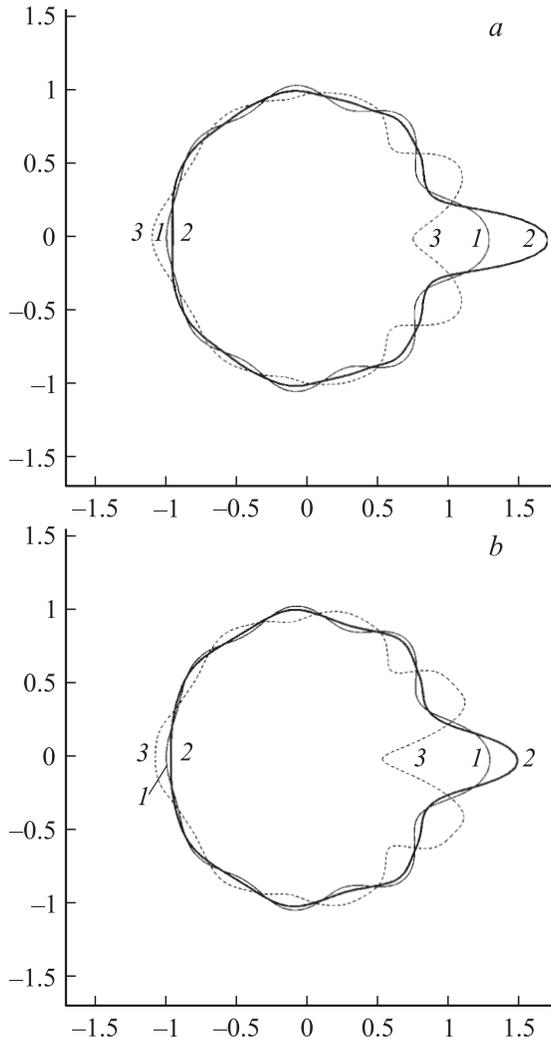


Рис. 2. Контур образующей капли при начальном возбуждении седьмой и восьмой мод, когда $h_7 = h_8 = 0.5$, $W = 3$, $\varepsilon = 0.3$. *a* — $\rho_{(e)} = 0$, $t = 0.01$ (1), $t = 0.075$ (2), $t = 0.22$ (3); *b* — $\rho_{(e)} = 5$, $t = 0.02$ (1), $t = 0.14$ (2), $t = 0.525$ (3).

Заключение

Величины наливных поправок к частотам осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в диэлектрической несжимаемой внешней среде существенно зависят от отношения плотностей сред и снижаются с ростом плотности среды. Влияние наличия внешней среды, моделируемой несжимаемой жидкостью, на устойчивость капли по отношению к собственному заряду складывается из двух факторов: с одной стороны, нелинейный сдвиг частоты осцилляций приводит к слабому росту критического заряда, с другой стороны, существенное снижение величины коэффициента межфазного поверхностного натяжения (по сравнению с каплей в вакууме) приводит к весьма заметному снижению величины критического заряда.

Приложение. Выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} \gamma_{mln} = & (n+1)\chi_n K_{mln} \left(\omega_m^2 (n-m+1) \right. \\ & - \rho_{(e)} n(n-m-1)/(n+1) + 2n(l(l+1)-1) \\ & + (l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3)nW/2) + (n+1) \\ & \left. \times \chi_n \alpha_{mln} \left((1/m - n\rho_{(e)}) / ((n+1)(m+1)) \right) \omega_m^2 + nW/2 \right); \end{aligned}$$

$$\lambda_{mln}^{(\pm)} = \frac{\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2};$$

$$\begin{aligned} \eta_{mln} = & (n+1)\chi_n K_{mln} (n/2 - m + 1 \\ & + \rho_{(e)} n(2m+3-n)/(2(n+1))) \\ & + (n+1)\chi_n \alpha_{mln} \left((1 + n/(2l)) / m \right. \\ & \left. - n\rho_{(e)} (n+2l+3)/(2(m+1)(l+1)(n+1)) \right); \end{aligned}$$

$$H_{kmln}^{1(\pm)(\mp)} = \sum_{g=1}^{\infty} \left(\beta_{kmgln}^{1(\pm)} \lambda_{lmg}^{(\pm)} + \mu_{kmgln}^{1(\mp)} \right) + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(\mp)};$$

$$\chi_n = (1 + n(1 + \rho_{(e)}))^{-1}; \quad K_{mln} = (C_{m0l0}^n)^2;$$

$$H_{kmln}^{2(\pm)(\pm)} = \sum_{g=1}^{\infty} \left(\beta_{kmgln}^{2(\pm)} \lambda_{lmg}^{(\pm)} + \mu_{kmgln}^{1(\pm)} \right) + \sum_{g=0}^{\infty} \mu_{kmgln}^{0(\pm)};$$

$$\alpha_{mln} = -C_{m0l0}^n C_{m(-1)l}^n \sqrt{m(m+1)l(l+1)};$$

$$H_{mgn}^{0(\pm)} = (\Pi_{mgn}^0 \mp \Pi_{mgn}^1 \omega_m \omega_g - \Pi_{mgn}^2 \omega_g^2) (\lambda_{nmg}^{(+)} + \lambda_{nmg}^{(-)});$$

$$\psi_{kml}^{(\pm)(\pm)} = \omega_k \pm \omega_m \pm \omega_l;$$

$$\Xi_n^0 = \omega_n^2 + n(n+1)\chi_n(n-1)(4+2n-5W);$$

$$\psi_{kml}^{(+)(-)} = \omega_k + \omega_m - \omega_l;$$

$$\beta_{kmgln}^{1(\pm)} = \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l \pm \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l \pm \omega_m)^2;$$

$$\Xi_n^1 = ((n+1)(n-1) - 3n\rho_{(e)})\chi_n;$$

$$\beta_{kmgln}^{2(\pm)} = \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l \pm \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l \pm \omega_m)^2;$$

$$\Xi_n^2 = \rho_{(e)} n(n-1)\chi_n;$$

$$\mu_{kmgln}^{1(\pm)} = \Lambda_{kmgln}^1 \pm \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k;$$

$$\mu_{kmgln}^{0(\pm)} = \Lambda_{kmgln}^0 \pm \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k; \quad D_{lm}^{kn} = 1 - \delta_{lm} \delta_{kn};$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{kmgln}^0 &= (n+1)\chi_n \omega_k^2 K_{gln} \\ &\times (\alpha_{kmg}(k-2)/k + (k-1)(n-k+2)K_{kmg}/2) \\ &+ \rho_{(e)} n \chi_n \omega_k^2 \left(((g+1-n)K_{gln} - \alpha_{gln}/(g+1)) \right. \\ &\times ((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)) + ((k+3)\alpha_{kmg}/(k+1) \\ &+ (k+2)(n-2-k)K_{kmg}/2) K_{gln} \\ &+ n(n+1)\chi_n \left(WK_{gln}((k^3 - 2(m+1)(m+2) - k^2(n-9) \right. \\ &- k(2m(m+3) + 3n - 22))K_{kmg} - 2(k+2)\alpha_{kmg})/2 \\ &- \left. \left. \left((3k(k+1) - 2)K_{kmg} - l(l+1)\alpha_{kmg}/2 \right) K_{gln} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \alpha_{kmg} \left(l^2 K_{lgn} - \sum_{\nu=1}^{[l/2]} (2l - 4\nu + 1) K_{l-2\nu, g, n} \right) \right) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{kmgln}^1 &= n(n+1)\chi_n W k K_{kmg} \\ &\times ((g+1)(l-2-g+n)K_{lgn} + \alpha_{lgn}) + (n+1)\chi_n \\ &\times \left((\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}) \right. \\ &\times \left. (\alpha_{kmg}/m + (1-m)K_{kmg}) \right) \omega_m^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{kmgln}^0 &= (n+1)\chi_n \left((k-2)(K_{gln}((k-1)K_{kmg}/2 - \alpha_{kmg}/k) \right. \\ &+ K_{mgn}((k-1)K_{klg}/2 - \alpha_{klg}/k)) \\ &- n(k-1)K_{gln}(\alpha_{kmg}/(mk) + K_{kmg}) \\ &- \rho_{(e)} n \chi_n \left(((g+2)K_{mgn} - \alpha_{mgn}/(g+1)) \right. \\ &\times ((k+2)K_{klg} - \alpha_{klg}/(k+1)) + (k+3)K_{mgn} \\ &\times (\alpha_{klg}/(k+1) - (k+2)K_{klg}/2) \\ &+ ((g+2)K_{gln} - \alpha_{gln}/(g+1))((k+2)K_{kmg} \\ &- \alpha_{kmg}/(k+1)) + (k+3)K_{gln}(\alpha_{kmg}/(k+1) \\ &- (k+2)K_{kmg}/2) - (n+1) \\ &\times ((\alpha_{mgn}/((m+1)(g+1)) + K_{mgn})((k+2)K_{klg} \\ &- \alpha_{klg}/(k+1)) + K_{gln}((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)) \\ &- \left. \left. \left(\alpha_{kmg}/((k+1)(m+1)) + K_{kmg} \right) (k+2)K_{gln} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{kmgln}^1 &= (n+1)\chi_n ((\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}) \\ &\times ((m-1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m) + ((k+n)\alpha_{kgn}/(gk) \\ &+ (n+1-g)K_{kgn})((m-1)K_{mlg} - \alpha_{mlg}/m); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{kmn}^0 &= (n+1)\chi_n \left(nK_{kmn}(2((k-1)(k+2) + m(m+1)) \right. \\ &+ W(k-1)(n-5-k)) + (\alpha_{kmn}/k + (n+1-k)K_{kmn})\omega_k^2 \\ &- \rho_{(e)} n \chi_n \omega_k^2 ((n-1-k)K_{kmn} + \alpha_{kmn}/(k+1)) \\ &+ n(n+1)\chi_n W((m+1)(k+n-m-2)K_{kmn} + \alpha_{kmn}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{kmn}^1 &= (n+1)\chi_n ((k+m-n-2)K_{kmn} \\ &- (n+k+m)\alpha_{kmn}/(mk)) + n\rho_{(e)}\chi_n ((n-k-m-3)K_{kmn} \\ &+ (k+m+n+3)\alpha_{kmn}/((m+1)(k+1))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{kmn}^2 &= (n+1)\chi_n ((m-n-1)K_{kmn} - \alpha_{kmn}/m) \\ &+ n\rho_{(e)}\chi_n ((n-m-1)K_{kmn} + \alpha_{kmn}/(m+1)), \end{aligned}$$

$C_{m0l0}^{n0}, C_{m(-1)l}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 44–51.
- [4] Гаиров А.Р., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 13–20.
- [5] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
- [6] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 36.
- [7] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
- [8] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
- [9] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [10] Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 702 с.