01

# К доказательству разложения обратного расстояния в сфероидальных координатах

© А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория,
196140 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 1 декабря 2003 г.)

В сжатой форме дано доказательство формулы разложения обратного расстояния между двумя точками по сфероидальным гармоникам. Доказательство приведено как для сжатого, так и для вытянутого сфероида.

## Введение

Разложение обратной величины расстояния $D$ между двумя произвольными точками по сфероидальным гармоникам играет центральную роль при представлении решений уравнений Лапласа и Пуассона в сфероидальных координатах. Соответствующая общая формула выводится в [1], но доказательство несколько громоздко. Сходный вывод содержится в несколько более позднем руководстве [2]. Еще одно доказательство дано в [3], но все же несколько косвенное, использующее поверхностные интегралы.

В данной работе мы показываем, как получить хотя бы аксиально-симметричную часть разложения $D^{-1}$ наиболее кратким и непосредственным путем. Надо полагать, что несимметричную часть удастся получить совершенно аналогичным путем, используя предлагаемый вывод в качестве образца. Это послужит достижению более четкой структуры всей теории потенциала в сфероидальных координатах, краткое изложение которой, помимо указанных руководств, содержится в [4].

## Координаты сжатого сфероида

Используем декартовы координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ и сфероидальные координаты $t$, $\tau$, $\varphi$ с известной связью между ними

$$x_1 = R\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\varphi,$$

$$R = c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)},$$

$$x_3 = c\lambda\mu, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{1}$$

(ось $x_3$ выбрана полярной).

Подразумевается наличие некоторого опорного сфероида с полуосями $a_1(=a_2)$ и $a_3$, причем $a_1 > a_3$ (т.е. рассматриваем пока сжатый сфероид). Введенный в (1) параметр $c$ определяется как фокальное расстояние $c = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$. Исходим из известного тождества [5]

$$\frac{1}{h-t} = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n\left(\frac{t}{c}\right)Q_n\left(\frac{h}{c}\right)$$

$$(-c < t < c, \quad h > c) \tag{2}$$

($P_n$ и $Q_n$ — стандартные обозначения присоединенных функций Лежандра соответственно первого и второго рода).

Заменяем в (2) $c$ на $-ic$. Тогда

$$\frac{1}{h-t} = \frac{i}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n\left(\frac{it}{c}\right)Q_n\left(\frac{ih}{c}\right). \tag{3}$$

Для применения теоремы сложения сферических функций [6, т. II, с. 184] используем $t = -ic(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi\cos\varphi)$ (углы $\theta$, $\psi$, $\varphi$ меняются от 0 до $2\pi$). Тогда

$$P_n\left(\frac{it}{c}\right) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\psi) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\psi)\cos n\varphi.$$

Интегрирование по $\varphi$ от 0 до $2\pi$ дает

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(h+ic\cos\theta\cos\psi)^2 + c^2\sin^2\theta\sin^2\psi}} = \frac{2\pi i}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n\left(\frac{ih}{c}\right)P_n(\cos\theta)P_n(\cos\psi). \tag{4}$$

Считаем $\cos\psi$ чисто мнимым, $\cos\psi = i\eta$, тогда $\sin\psi > 1$. Слева в (4) после сокращения на $2\pi$ остается $1/\sqrt{(h - c\eta\cos\theta)^2 + c^2\sin^2\theta\sin^2\psi}$, т.е. обратная величина расстояния между пробной точкой с координатой $z = h$ на оси вращения, с одной стороны, и притягивающей точкой с цилиндрическими координатами $R = c\sin\theta\sin\psi$, $z = c\eta\cos\theta$, с другой стороны, сравнение этих соотношений с (1) дает

$$\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} = \sin\theta\sin\psi, \quad \lambda\mu = \eta\cos\theta. \tag{5}$$

Вещественным решением уравнений (5) является

$$\lambda = \eta, \quad \mu = \cos\theta. \tag{6}$$

Для единообразия сфероидальные координаты пробной точки также обозначаем через $\lambda$ и $\mu$, но со штрихом сверху. Пока мы рассматриваем ее положение на оси, должно быть $\mu' = 1$, $\lambda' = h/c$.

С учетом всех этих замечаний и определения функции $q$, принятого в [6], из (4) получаем

$$\frac{1}{D} = \frac{i}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(i\lambda')P_n(\mu)P_n(i\lambda)$$

$$= \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)q_n(\lambda')P_n(\mu)p_n(\lambda). \tag{7}$$

Это соотношение получено для пробной точки на оси. В остальном пространстве, если брать ротационно-симметричную часть и отмечать это угловыми скобками, надо по общему правилу заменять $q_n(\lambda')$ на гармоническую функцию $P_n(\mu')q_n(\lambda')$, тогда находим искомую формулу

$$\left\langle \frac{1}{D} \right\rangle = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\mu')q_n(\lambda')P_n(\mu)p_n(\lambda). \tag{8}$$

Естественно, полученная формула совпадает с теми, которые даны в [1–3].

## Координаты вытянутого сфероида

В некоторых физических задачах в основу координатной системы кладется вытянутый сфероид. Для него вместо (1) действуют несколько иные формулы связи

$$R = c\lambda\mu, \quad z = c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}. \tag{9}$$

В этом случае в (2) подставляем $t = c(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi\cos\varphi)$, тогда

$$P_n\left(\frac{t}{c}\right) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\psi)$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\psi)\cos n\varphi.$$

Интегрирование (2) по $\varphi$ дает

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(h - c\cos\theta\cos\psi)^2 - c^2\sin^2\theta\sin^2\psi}}$$

$$= \frac{2\pi}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n\left(\frac{h}{c}\right)P_n(\cos\theta)P_n(\cos\psi). \tag{10}$$

Сравнением с формулами связи (9) находим

$$R = ic\sin\theta\sin\psi, \quad h = c\sqrt{\lambda'^2+1},$$

$$z = c\cos\theta\cos\psi. \tag{11}$$

После несложных выкладок получается

$$\lambda = i\sin\psi, \quad \mu = \sin\theta, \tag{12}$$

т.е. $\sin\psi$ должен быть чисто мнимым, тогда $\cos\psi > 1$.

В результате получаем соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{(h-z)^2+R^2}} = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n\left(\frac{h}{c}\right)$$

$$\times P_n\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)P_n\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right) \tag{13}$$

с искомым его обобщением на произвольную точку

$$\left\langle \frac{1}{D} \right\rangle = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n\left(\sqrt{1+\lambda'^2}\right)P_n\left(\sqrt{1-\mu'^2}\right)$$

$$\times P_n\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)P_n\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right). \tag{14}$$

Формула (14) также известна (с точностью до обозначений) в литературе.

## Заключение

Вопросы, связанные с разделением переменных в теории потенциала, в основном были разработаны к началу двадцатого века. Однако различные детали и сама структура теории продолжают совершенствоваться [7]. Наш подход, как мы надеемся, полезен: он лучше выявляет логическую связь между различными формулами и может поэтому способствовать выведению новых соотношений, представляющих практический интерес для задач астрономии, электростатики, теории упругости и других вопросов математической физики.

Автор искренне благодарен В.А. Антонову за неизменный интерес и внимание к работе.

## Список литературы

[1] *Гобсон Е.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
[2] *Robin L.* Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Paris: Gauthie-Villars, 1958. Vol. II, III.
[3] *Баранов А.С.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 2. С. 36–41.
[4] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 272 с.
[5] *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
[6] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1979. Т. II. 295 с.
[7] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 624 с.