01

Масштабные преобразования $1/f$ флуктуаций при неравновесных фазовых переходах

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,
620016, Екатеринбург, Россия
e-mail: vnskokov@itp.uran.ru

(Поступило в Редакцию 16 декабря 2003 г.)

Исследования динамики флуктуаций тепломассообмена показывают, что в кризисных и переходных режимах наблюдаются высокоэнергетические пульсации со спектром мощности, обратно пропорциональным частоте (фликкерные или $1/f$ флуктуации). Такой спектр предполагает перекачку энергии от высокочастотных к низкочастотным модам и возможность крупномасштабных катастрофических выбросов в системе. Теория показывает, что такие флуктуации возникают в системе благодаря одновременному протеканию взаимодействующих фазовых переходов в присутствии белого шума достаточной интенсивности. Исследована функция распределения флуктуаций при масштабных преобразованиях системы стохастических уравнений, описывающих генерацию $1/f$ шума. Показано, что гауссовское распределение случайного процесса с $1/f$ спектром переходит при масштабном преобразовании в экспоненциальное распределение, характерное для статистики экстремальных выбросов. Вероятность таких выбросов следует учитывать при прогнозировании устойчивости различных режимов теплообмена.

Введение

Тепломассообмен в двухфазных системах характеризуется не только средними значениями параметров процесса, но и хаотическими флуктуационными отклонениями от средних значений этих параметров. В особенности сильное возрастание флуктуаций происходит в критических и переходных режимах тепломассообмена [1]. Динамика и эволюция случайных пульсаций может быть охарактеризована зависимостью спектра мощности флуктуаций от частоты. Она определяется отношением среднего квадрата амплитуды шумового сигнала (а следовательно, и его мощности) вблизи частоты f к ширине полосы частот Δf. Устойчивым процессам тепломассообмена соответствует спектр с ограничением мощности со стороны низких частот. Экспериментальное исследование динамики флуктуаций теплообмена в кризисных и переходных режимах [2–4] показывает, что такая ситуация в поведении низкочастотной асимптотики спектров наблюдается не всегда. В кризисных режимах кипения, при взрывном вскипании струй перегретой жидкости, в колебательных режимах горения, при дуговом электрическом разряде наблюдаются низкочастотные высокоэнергетические пульсации со спектром мощности, обратно пропорциональным частоте (фликкерные или $1/f$ пульсации). Характерная черта систем с фликкер-шумом ($1/f$ шумом) заключается в том, что значительная часть энергии флуктуаций связана с очень медленными процессами и, кроме того означает возможность огромных катастрофических выбросов в системе [5].

Спектр мощности флуктуаций, обратно пропорциональный частоте $S \sim 1/f$, встречается в разнообразных физических, химических, механических и биологических системах [6,7]. Поведение $1/f$ продолжает сохраняться в пределах нескольких десятичных порядков мощности флуктуаций. В астрофизике известны $1/f$ пульсации интенсивности излучения квазаров и солнечных пятен, в геофизике $1/f$ спектры мощности используются для описания землетрясений и наводнений. В биологии $1/f$ спектры наблюдаются в колебании инсулина в крови больных диабетом, в сердечных и мозговых ритмах при некоторых заболеваниях. В экономике спектральной зависимости $1/f$ подчиняются финансовые потоки и колебания курсов акций на биржах, фликкерные флуктуации обнаруживаются в колебаниях числа автомобилей на дорогах, даже в музыке и речи [8].

Чаще всего в литературе под $1/f$ шумом понимаются флуктуационные процессы со спектром мощности, пропорциональным $1/f^{\alpha}$, где показатель степени α изменяется в некоторых пределах $(0.8 < \alpha < 2)$. Хорошо известным свойством $1/f^{\alpha}$ флуктуаций является динамический скэйлинг, наблюдаемый в равновесных критических точках. Имеется много попыток объяснить возможный механизм генерации масштабно-инвариантных флуктуаций. Выдающимся примером является концепция самоорганизованной критичности [9], которая применяется для описания сложных систем с развитыми флуктуациями. Система в состоянии самоорганизованной критичности имеет большое число метастабильных состояний, в которых она может находиться. В процессе своей эволюции система самоорганизуется и подстраивается к критическому поведению с масштабно-инвариантными флуктуациями. В работе [9] самоорганизованная критичность продемонстрирована на модели клеточных автоматов „куча песка“. При постоянном потоке песчинок в куче песка, достигшей самоорганизованной критичности, возникают лавины различного размера или флуктуации, которые поддерживают критическое состояние системы независимо от величины внешних воздействий. Теория самоорганизованной критичности дает спектр вида $1/f^{\alpha}$ ($\alpha \simeq 1.4-2$) и степенное распределение флуктуаций. Точная обратная пропорциональность частоте ($\alpha = 1$) наблюдается для спектра флуктуаций напряжения, когда электрический ток течет через резистор [6,10] и неравновесные фазовые переходы взаимодействуют в процессах тепломассообмена [2–4].

В настоящей работе приводится теория флуктуационных процессов с фликкерным спектром мощности, согласно которой фликкер-шум возникает в результате наложения и взаимодействия неравновесных фазовых переходов. Существенным фактором наряду со взаимодействием является развитая флуктуационная природа процесса, что проявляется в генерации шума с расходящимися спектрами при низких частотах.

Функция распределения $1/f$ флуктуаций

Теория $1/f$ флуктуаций при неравновесных фазовых переходах предложена в работе [2]. Простейшие стохастические уравнения, описывающие динамику флуктуаций в сосредоточенной системе, имеют вид

$$\frac{d\phi}{dt} = -\phi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = -\phi^2\psi + \lambda\phi + \Gamma_2(t). \qquad (1)$$

Здесь ϕ, ψ — динамические переменные (параметры порядка); Γ_1 и Γ_2 — гауссовы δ-коррелированные шумы (белый шум), которые имеют одинаковые дисперсии. Коэффициент $\lambda > 1$ при переменной ϕ во втором уравнении делает два уравнения системы (1) неэквивалентными. Его наличие можно интерпретировать как присутствие в системе (1) макропотоков. Ниже будем рассматривать случай $\lambda = 2$. Если определить потенциал

$$\Phi = \frac{1}{2}\phi^2\psi^2 - \phi\psi, \qquad (2)$$

то систему (1) можно переписать в виде

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + \Gamma_1(t),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} + \phi + \Gamma_2(t). \qquad (3)$$

Чтобы лучше понять физический смысл потенциала (2), сделаем линейное преобразование динамических переменных $\phi = \eta - \theta$, $\psi = \eta + \theta$, которое соответствует повороту координат потенциала на угол $\pi/4$. В новых переменных потенциал примет вид

$$\Phi = \frac{1}{2}\eta^4 - \eta^2 + \frac{1}{2}\theta^4 + \theta^2 - \eta^2\theta^2, \qquad (4)$$

который характерен для взаимодействия докритического (с параметром порядка η) и закритического (с параметром θ) фазовых переходов. Последнее слагаемое в (4), пропорциональное $\eta^2\theta^2$, учитывает взаимодействие параметров порядка в самом общем виде.

Для численного интегрирования систему (1) при $\lambda = 2$ переписывают в виде

$$\phi_{i+1} = (\phi_i + \psi_i\Delta t)(1 + \psi_i^2\Delta t)^{-1} + \xi_i\Delta t^{0.5},$$
$$\psi_{i+1} = (\psi_i + 2\phi_i\Delta t)(1 + \phi_i^2\Delta t)^{-1} + \zeta_i\Delta t^{0.5}, \qquad (5)$$

где ξ_i и ζ_i — последовательности гауссовских случайных чисел с нулевым средним и стандартным отклонением σ, которые моделируют внешний белый шум.

Характерная особенность стохастических уравнений состоит в том, что дифференциал времени в системе (1) имеет второй порядок малости относительно дифференциала стохастической переменной [11]. Поэтому в системе для численного интегрирования (5) дифференциалы $\xi_i\Delta t^{0.5}$ и $\zeta_i\Delta t^{0.5}$ содержат интервал времени в степени 0.5. Это создает математические удобства при изменении шага интегрирования Δt: не нужно корректировать значение стандартного отклонения σ гауссовских случайных чисел ξ_i и ζ_i при изменении шага интегрирования.

Система (1) и ее расчетный вариант (5) имеют индуцированный шумом переход по отношению к плотности вероятности $P(\sqrt{\phi^2\psi^2})$ [5]. Индуцированный шумом переход означает, что при изменении интенсивности внешнего белого шума плотность вероятности меняет положение экстремума (рис. 1). Это изменение протекает как фазовый переход. Если σ меньше некоторого критического значения σ_c $(0 < \sigma < \sigma_c)$, то плотность вероятности $P(\sqrt{\phi^2\psi^2})$ имеет максимум при некотором значении аргумента $\sqrt{\phi^2\psi^2}$. При интенсивности внешнего шума, соответствующей $\sigma = \sigma_c$, максимум $P(\sqrt{\phi^2\psi^2})$ совпадает с нулем. При дальнейшем увеличении интенсивности $(\sigma > \sigma_c)$ плотность вероятности становится монотонно убывающей функцией (рис. 1).

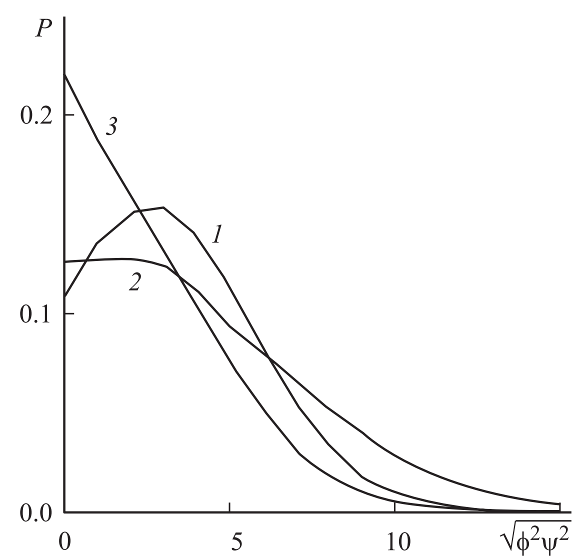

Рис. 1. Стационарные плотности вероятности $P(\sqrt{\phi^2\psi^2})$ для системы (5). Расчет с шагом интегрирования $\Delta t = 0.1$: *1* — $\sigma < \sigma_c$, *2* — $\sigma = \sigma_c$, *3* — $\sigma > \sigma_c$, $\sigma_c = 0.8$.

Когда интенсивность внешнего белого шума соответствует критичности индуцированного шумом перехода ($\sigma = \sigma_c$), система (1) и соответственно система (5) генерируют стационарные стохастические процессы $\phi(t)$ и $\psi(t)$, спектры, мощности которых имеют частотные зависимости $1/f$ и $1/f^2$ соответственно. При выборе шага интегрирования в интервале ($0.05 < \Delta t < 0.3$) критичность индуцированного шумом перехода отвечает значению $\sigma_c = 0.8$ и, следовательно, при интенсивности $0.7 < \sigma < 0.9$ спектральные мощности флуктуаций ϕ_i и ψ_i следуют указанным зависимостям.

Система (5) хорошо работает не только в ближайшей окрестности критичности индуцированного шумом перехода, но в достаточно широком диапазоне изменения средней интенсивности белого шума [4]. Это связано с некоторым самосогласованием переменных ϕ_i и ψ_i в системе (1). Еще в работе [2] было отмечено для сосредоточенной системы, что среднее значение произведения $\langle\phi\psi\rangle \simeq 1$ соблюдается независимо от начальных условий, длины реализации случайного процесса, управляющих параметров и является инвариантом системы. Поэтому следует ожидать, что обратная функция от ψ также имеет фликкерный спектр мощности. Чтобы избежать расходимости при нулевых значениях ψ_i, определим обратную функцию в виде [12] $\chi_i = \psi_i/(\varepsilon + \psi_i^2)$, где ε — малый параметр (обычно $\varepsilon \simeq 0.01{-}0.02$). Функция χ_i близка к $1/\psi_i$ в большинстве точек реализации случайного процесса, только в окрестностях, где ψ_i близко к нулю, χ_i также близко к нулю. От расходимости в нуле при определении обратной функции для ψ_i можно избавиться и другим способом, но это не меняет главного результата: спектральная плотность переменной χ_i обратно пропорциональна первой степени частоты ($S_\chi \sim 1/f$) и численно совпадает со спектральной плотностью переменной ϕ_i. Спектры переменных χ_i и ϕ_i приведены на рис. 2. В масштабе рисунка они совпадают и следуют зависимости $\sim 1/f$ (пунктир на рис. 2).

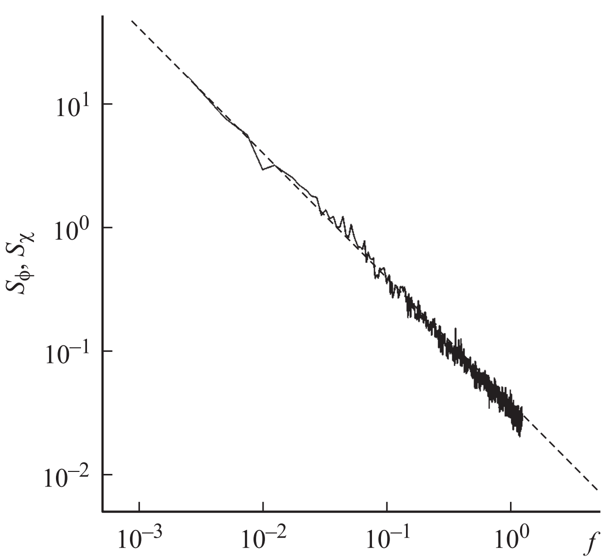

Рис. 2. Спектральная плотность переменных ϕ_i и χ_i. Пунктир — зависимость $S \sim 1/f$.

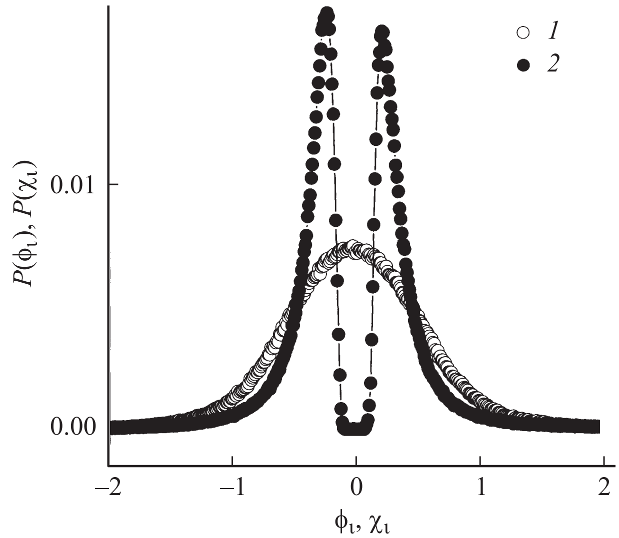

Рис. 3. Функции распределения переменных: *1* — $P(\phi_i)$, *2* — $P(\chi_i)$.

В расчетах использовано $10^4{-}10^5$ шагов интегрирования системы (5) и усреднение по нескольким десяткам реализаций. Хотя спектр мощности переменной ψ_i обратно пропорционален квадрату частоты, спектр мощности обратной переменной χ_i обратно пропорционален первой степени частоты. Таким образом, не только первое уравнение системы (1) или (5) дает $1/f$ спектр, но и второе уравнение после преобразования от $\psi(t)$ к $\chi(t)$ связано с таким спектром.

В отличие от спектров функции распределения переменных ϕ_i и χ_i различны. На рис. 3 приведена функция распределения переменной ϕ_i. Она близка к гауссовской, но имеет длинные хвосты больших амплитудных выбросов, которые можно заменить только в полулогарифмических координатах. Как показывают численные расчеты, функция распределения переменной ϕ_i может быть аппроксимирована выражением

$$P(\phi) = A \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_\phi}\right) + B \exp\left(-\frac{|\phi|}{\sigma_\phi}\right), \qquad (6)$$

где A и B — константы ($A \gg B$), $\sigma_\phi = 2\sigma\, dt^{0.5}$ — стандартное отклонение случайного процесса $\phi(t)$, второе слагаемое в (6) как раз и аппроксимирует длинные „хвосты“ на фоне гауссовского распределения.

Распределение $P(\chi_i)$ отличается от $P(\phi_i)$ наличием двух максимумов и минимума в нуле (рис. 3), длинные „хвосты“ наблюдаются так же, как и для $P(\phi_i)$. Однако они могут быть деформированы в зависимости от способа аппроксимации обратной функции ψ_i.

Масштабное преобразование $1/f$ флуктуаций

Рассмотрим, как изменяются функции распределения переменных при масштабных преобразованиях реализаций случайных процессов. Для этого из последовательности рассчитанных релазиций $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

создадим последовательность огрубленных реализаций $\{y^{(\tau)}\}$ с помощью усреднения по некоторому масштабу времени τ в соответствии с уравнением

$$y_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=\tau j}^{\tau(j+1)-1} x_i, \quad 0 \le j \le N/\tau, \tag{7}$$

где x_i — стохастическая переменная (ϕ_i, χ_i и др.).

Параметр τ называют еще коэффициентом масштабного преобразования. Для первого масштаба реализация $\{y^{(1)}\}$ является просто исходной реализацией. Длина каждой последующей огрубленной реализации уменьшается в τ раз, т.е. содержит N/τ точек. Заметим, что данное масштабное преобразование не меняет частотную зависимость спектра. В случае $\phi_i^{(\tau)}$ и $\chi_i^{(\tau)}$ спектр остается обратно пропорциональным частоте $S \sim 1/f$.

Реализации исходных и огрубленных случайных процессов приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что с ростом коэффициента масштабных преобразований

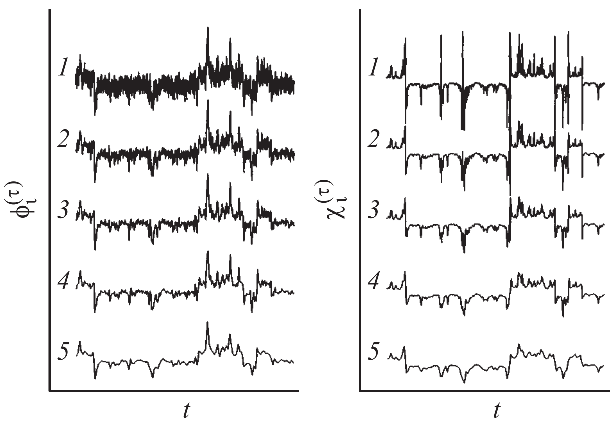

Рис. 4. Реализации исходных и огрубленных случайных процессов $\phi_i^{(\tau)}$ и $\chi_i^{(\tau)}$ при коэффициенте масштабного преобразования τ: *1* — 1, *2* — 4, *3* — 8, *4* — 16, *5* — 32.

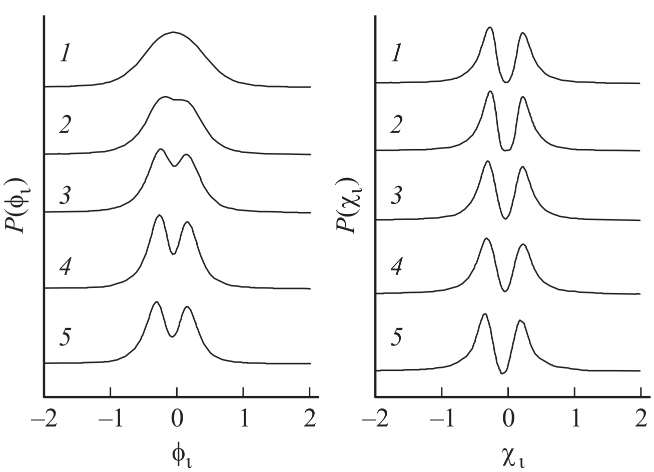

Рис. 5. Изменения функций распределения переменных $\chi_i^{(\tau)}$ и $\phi_i^{(\tau)}$ в зависимости от коэффициента масштабного преобразования τ: *1* — 1, *2* — 4, *3* — 8, *4* — 16, *5* — 32.

реализации процессов $\chi_i^{(\tau)}$ и $\phi_i^{(\tau)}$ приближаются друг к другу (рис. 4). Коэффициент корреляции реализаций процессов $\chi_i^{(\tau)}$ и $\phi_i^{(\tau)}$ при $\tau = 32$ составляет более 0.9. С дальнейшим ростом коэффициента масштабного преобразования реализации $\chi_i^{(\tau)}$ и $\phi_i^{(\tau)}$ совпадут.

Изменения функций распределения переменных $\chi_i^{(\tau)}$ и $\phi_i^{(\tau)}$ приведены на рис. 5. Функции распределения обоих процессов при $\tau = 32$ практически совпадают и аппроксимируются формулой

$$P(\chi) = C\chi^2 \exp\left(-\frac{|\chi|}{\sigma_\chi}\right), \tag{8}$$

где C — нормировочный коэффициент.

Экспоненциальный множитель в (8) описывает длинноволновые выбросы случайного процесса с $1/f$ спектром мощности. Это согласуется с результатами [13], что скэйлинговая функция огрубленного распределения определенного класса периодических сигналов с $1/f$ спектров становится распределением экстремальных выбросов [14,15]. Результаты настоящей работы показывают, что гауссовское распределение стохастического процесса $\phi(t)$ с $1/f$ спектром переходит при масштабном преобразовании в экспоненциальное распределение, характерное для статистики экстремальных выбросов. К такому же распределению с ростом коэффициента масштабного преобразования стремится распределение переменной χ_i, только значительно быстрее.

Энтропийный анализ реализаций

Для численной характеристики изменения распределения в результате масштабного преобразования определим величину

$$H(x) = -\sum_{x_i} p(x_i) \log\bigl(p(x_i)\bigr). \tag{9}$$

Величина $H(x)$ имеет смысл информационной энтропии. Использование зависимости энтропии от масштабного фактора названо в работе [16] мультискэйлинговым энтропийным анализом реализаций случайных процессов. Результаты расчета энтропии огрубленных реализаций в зависимости от коэффициента масштабного преобразования τ приведены на рис. 6. Из этого рисунка видно, что для случайного процесса $\chi_i^{(\tau)}$ энтропия не зависит от τ (точки *1* на рис. 6), как и сама функция распределения, и не изменяется. Функция распределения $P(\chi_i^{(\tau)})$ практически сразу является масштабно-инвариантной, как и в процессе самоорганизованной критичности. Энтропия случайного процесса $H(\phi_i^{(\tau)})$ с ростом коэффициента масштабного преобразования убывает и стремится к значению $H(\chi_i)$.

Энтропия случайного процесса при масштабном преобразовании может характеризовать воздействие других управляющих параметров системы. В частности, увеличение коэффициента λ при линейном члене второго

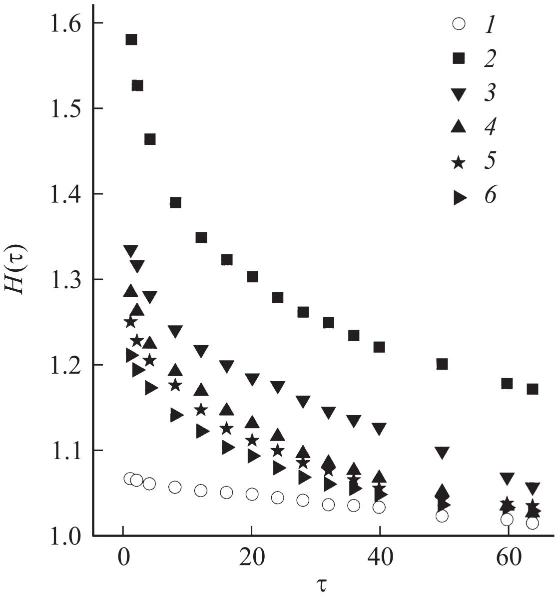

Рис. 6. Зависимость энтропии огрубленных реализаций от коэффициента масштабного преобразования τ при различных значениях управляющего параметра λ. *1* — зависимость $H(\tau)$ для случайного процесса $\chi_i^{(\tau)}$; *2–6* — зависимости $H(\tau)$ для случайного процесса $\phi_i^{(\tau)}$. $\lambda = 4$ (*2*), 3 (*3*), 2 (*4*), 1.8 (*5*), 1.5 (*6*).

уравнения (1) по сравнению с (2) приводит к затягиванию гауссовости процесса $\phi_i^{(\tau)}$ при возрастании коэффициента масштабного преобразования τ. При уменьшении λ по сравнению с (2) масштабно-инвариантное распределение (близкое к распределению переменной $\chi_i^{(\tau)}$) получается при меньших значениях коэффициента масштабного преобразования. При $\lambda = 2$ система (1) дает $1/f$ флуктуации в наиболее широком диапазоне интенсивностей белого шума и шагов интегрирования. Это связано с максимальной самоорганизацией случайных процессов, имеющих $1/f$ спектр: гауссовского и процесса с масштабно-инвариантной функцией распределения.

Заключение

Теория флуктуационных процессов с фликкерным спектром мощности при неравновесных фазовых переходах показывает, что огрубленное распределение при больших коэффициентах масштабного преобразования становится экспоненциальным, характерным для статистики экстремальных выбросов. Развитая флуктуационная природа процессов теплообмена в двухфазных системах и генерация шума с расходящимися при низкой частоте спектрами приводят к перекачке энергии от высокочастотных колебаний к низкочастотным и может приводить к крупномасштабным выбросам в системе. Возможность таких выбросов следует учитывать при оценке устойчивости систем с развитыми флуктуационными процессами. Наряду со спектральным анализом полезно проводить масштабный анализ функций распределения.

Работа выполнена при поддрежке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-02-16215) и Программы фундаментальных научных исследований ОЭММПУ РАН.

Список литературы

[1] *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984.
[2] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 5. С. 1748–1757.
[3] *Скоков В.Н., Решетников А.В., Коверда В.П.* // ТВТ. 2000. Т. 38. Вып. 5. С. 786–791.
[4] *Skokov V.N., Koverda V.P., Reshetnikov A.V., Skripov V.P., Mazheiko N.A., Vinogradov A.V.* // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 1879–1883.
[5] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН. 2002. Т. 386. № 2. С. 187–189.
[6] *Коган Ш.М.* // УФН. 1985. Т. 145. № 2. С. 285–328.
[7] *Weisman M.B.* // Rev. Mod. Phys. 1988. Vol. 60. N 2. P. 537–571.
[8] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: ТОО „Янус“, 1995. 624 с.
[9] *Bak P., Tang Ch., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. N 1. P. 364–374.
[10] *Yakimov A.V., Hooge F.N.* // Physica B. 2000. Vol. 291. N 1–2. P. 97–104.
[11] *Олемской А.И.* // УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 287–321.
[12] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН. 2003. Т. 393. № 2. С. 184–187.
[13] *Antal T., Droz M., Guorgui G, and Rach Z.* // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. N 24. P. 240601-1–240601-4.
[14] *Bramwell S.T., Christensen K., Fortin J.-Y., Holdsworth P.C.W., Jensen H.J., Lise S., López J.M., Nicodemi M., Pinton J.-F., Sellitto M.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 3744–3747.
[15] *Dahlstedt K., Jensen H.J.* // J. Phys. A. 2001. Vol. 34. P. 11193–11200.
[16] *Costa M., Goldberger A.L., Peng C.-K.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 89. N 6. P. 068102-1-4.