01;03;05

К теории образования слоистой структуры льда на поверхности пластины, помещенной в поток переохлажденного водного аэрозоля

© Р.Г. Закинян

Ставропольский государственный университет,
355035 Ставрополь, Россия
e-mail: zakinyan@mail.ru

(Поступило в Редакцию 30 июня 2003 г. В окончательной редакции 13 января 2004 г.)

Проведен анализ движения фронта кристаллизации и роста пленки на поверхности пластины при ламинарном и турбулентном режимах течения. Выявлены критерии перехода от матовой неоднородной структуры к прозрачной однородной структуре льда. Пказано, что толщина пленки должна быть больше критического значения равновесной толщины $h_{b.c}$, чтобы она могла устойчиво сохраняться на поверхности пластины. При этом образуется прозрачная однородная структура льда. В противном случае пленка на поверхности пластины неустойчива и со временем исчезает. Это приводит к образованию матовой неоднородной структуры льда. Наиболее важным приложением полученных результатов является обледенение самолетов.

Введение

Как известно, если предмет поместить в поток переохлажденного водного аэрозоля, то на его поверхности образуется пленка жидкости, характер кристаллизации которой зависит от свойств потока аэрозоля. Так, при обледенении самолетов в переохлажденных облаках наблюдаются два основных вида структур ледяных покрытий: прозрачная однородная и матовая неоднородная [1].

Теория образования слоистой структуры льда, растущего в потоке переохлажденного аэрозоля, была впервые развита в [1] применительно к проблеме обледенения самолетов в переохлажденных облаках. Суть теории [1] заключается в том, что на поверхности предмета, помещенного в поток переохлажденного водного аэрозоля, образуется пленка. Под действием касательного напряжения, создаваемого воздушным потоком, пленка приходит в движение. При реальных значениях скорости воздушного потока и толщины пленки движение пленки может быть как ламинарным, так и турбулентным. Это в свою очередь приводит к двум механизмам теплопередачи при кристаллизации пленки: молекулярному и турбулентному. При молекулярном механизме пленка оказывается неустойчивой, она исчезает, капли кристаллизуются, не сливаясь воедино, и образуют матовую неоднородную структуру льда. При турбулентном механизме кристаллизация идет под установившейся толщиной пленки и образуется прозрачная однородная структура льда [2].

В [3–5] механизм, предложенный в [1], рассматривался в предположении, что температура фронта кристаллизации T' постоянна и равна температуре $T_0 = 273\,\mathrm{K}$ стабильной кристаллизации. Это позволило дать аналитическое решение задачи роста льда под пленкой.

Наиболее важным приложением полученных в статье результатов является обледенение самолетов. В [6] изложенная в работе теория была развита на случай сферической поверхности и применена для объяснения слоистой структуры градины.

1. Коэффициент турбулентной температуропроводности

Прежде чем перейти к расчету скорости роста льда, предварительно найдем выражение для коэффициента турбулентной температуропроводности k_t. Согласно [7,8],

$$k_t = b\,\frac{v^2 z^2}{\nu}, \quad v = \sqrt{\tau_0/\rho}, \tag{1}$$

где $b = 0.02$ — безразмерная константа, определяемая из эксперимента; z — расстояние от пластины до произвольного уровня внутри пленки, m; v — динамическая скорость, m/s; ν — коэффициент молекулярной вязкости воды, m^2/s; τ_0 — напряжение трения на поверхности пластины, H/m^2; ρ — плотность воды, kg/m^3.

С учетом (1) найдем среднее значение коэффициента турбулентной температуропроводности k_t по всей толщине пленки $h = z'' - z'$

$$\bar{k}_t = \frac{1}{z'' - z'} \int\limits_{z'}^{z''} k_t dz = \frac{b}{2\nu}\,v^2 h^2, \tag{2}$$

где z' — расстояние от пластины до фронта кристаллизации, m; z'' — расстояние от пластины до поверхности пленки, m; $h = z'' - z'$ — толщина пленки, m.

Между динамической скоростью v и характерной скоростью движения пленки u_∞ существует следующая связь [9,10]:

$$v = \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,u_\infty, \tag{3}$$

где c_f — коэффициент лобового сопротивления; u_∞ — характерная скорость движения пленки на большом расстоянии от границы раздела лед–вода, m/s.

Согласно экспериментальным данным, для пластины [10]

$$\frac{c_f}{2} = 0.0294\,\mathrm{Re}^{-0.2}, \tag{4}$$

$\mathrm{Re} = (u_\infty X)/\nu$ — число Рейнольдса; X — характерный размер пластины, m.

С учетом (3) и (4) выражение для динамической скорости в случае пластины примет вид [9]

$$v = 0.17\,\frac{u_\infty}{\mathrm{Re}^{0.1}}. \tag{5}$$

Чтобы найти связь между скоростью течения пленки u_∞ и скоростью воздушного потока, предположим, согласно Прандтлю [11], что турбулентное трение на поверхности пластины τ_0 в отсутствие срыва капель с поверхности пленки равно трению на поверхности пленки F

$$\tau_0 = 0.0294\,\mathrm{Re}^{-0.2}\rho u_\infty^2 = F = 0.0294\,\mathrm{Re}_a^{-0.2}\rho_a V^2, \tag{6}$$

где $\mathrm{Re}_a = VX/\nu_a$ — число Рейнольдса для воздушного потока; ν_a — кинематический коэффициент вязкости воздуха, m^2/s; ρ_a — плотность воздуха, kg/m^3; V — скорость воздушного потока, m/s.

Из (6)

$$\frac{u_\infty}{\mathrm{Re}^{0.1}} = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho}}\,\frac{V}{\mathrm{Re}^{0.1}}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (5), получим

$$v = 5.2\cdot 10^{-3}\,\frac{V}{\mathrm{Re}_a^{0.1}}. \tag{8}$$

Подставив выражение для v из (8) в (2), для среднего коэффициента турбулентной температуропроводности получим

$$\bar{k}_t = B\,\mathrm{Re}^{-0.2}V^2h^2, \tag{9}$$

где $B = 0.15\,(\mathrm{m}^2/s)^{-1}$ — постоянная величина.

Получив выражение (9) для коэффициента турбулентной температуропроводности, перейдем к расчету скорости роста льда под пленкой.

2. Рост льда под пленкой при турбулентном течении

Толщина пленки на поверхности пластины будет определяться разностью скоростей продвижения фронта кристаллизации dz'/dt и поверхности пленки dz''/dt. Для решения задачи необходимо составить два граничных условия: для фронта кристаллизации и поверхности пленки. Для случая ламинарного режима движения пленки уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации z' имеет вид

$$\rho\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]\frac{dz'}{dt} = \lambda_i\,\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=z'} - \lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=z'}, \tag{10}$$

где L_c — удельная теплота кристаллизации воды, J/kg; c — удельная теплоемкость воды, J/kg $\cdot$ K; λ_i, λ — теплопроводности льда, воды, J/m $\cdot$ s $\cdot$ K; $T_0 = 273$ K — температура фронта кристаллизации; T_∞ — температура окружающей среды, K; t — время, s.

Уравнение (10) — известное условие Стефана [12].

Пренебрегая оттоком тепла через кристалл, уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации запишем в виде

$$\rho\left[L_i - c(T_0 - T_\infty)\right]\frac{dz'}{dt} + \lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=z'} = 0. \tag{11}$$

Аналогично запишем уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации для случая турбулентного режима движения пленки

$$\rho\left[L_i - c(T_0 - T_\infty)\right]\frac{dz'}{dt} + c\rho k_t\,\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=z'} = 0. \tag{12}$$

Для поверхности пленки z'' запишем квазистационарное условие, когда поток тепла к поверхности пленки равен оттоку тепла,

$$-\lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=z''} = \alpha(T_s - T_\infty) + L\beta(\rho_s - \rho_\infty), \tag{13}$$

где α — коэффициент теплообмена между поверхностью пленки и окружающим воздухом, J/m$^2\cdot$K; β — коэффициент массообмена между поверхностью пленки и окружающим воздухом, m/s; L — удельная теплота испарения воды, J/kg; ρ_s, ρ_∞ — плотности водяного пара у поверхности пленки, в окружающей среде, kg/m^3.

Первое слагаемое в правой части (13) есть количество тепла, отводящееся с поверхности пленки за счет конвективного теплообмена; второе слагаемое — количество тепла, идущее на испарение с поверхности пленки. При турбулентном режиме движения пленки коэффициент λ в (13) нужно заменить на $\lambda_t = c\rho k_t$. При квазистационарном условии (13) температура поверхности пленки остается постоянной $T_s = T_1$.

Примем, что в пленке устанавливается стационарное распределение температуры. Тогда

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT}{dz}\bigg|_{z=z'} = \frac{dT}{dz}\bigg|_{z=z''} = -\frac{T_0 - T_1}{z'' - z'}. \tag{14}$$

Запишем уравнение баланса массы на поверхности пленки

$$\frac{dz''}{dt} = \frac{qEV}{k_f\rho}, \tag{15}$$

где q — водность потока, kg/m^3; E — коэффициент захвата капель поверхностью пленки, в расчетах коэффициент захвата считается постоянным; k_f — коэффициент формы, для пластины $k_f = 1$.

В формуле (15) скорость воздушного потока направлена вдоль поверхности пластины. Коэффициент захвата определяет долю капель, захватываемых пластиной.

С учетом (9), (12), (14) и (15) запишем выражение для скорости движения фронта кристаллизации при турбулентном режиме движения пленки

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{ut - z'}{\tau}, \tag{16}$$

где

$$u = \frac{dz''}{dt}; \quad \tau = \frac{L_c c\rho(T_0 - T_\infty)}{cB\,\mathrm{Re}_a^{-0.2} V^2 \Delta T}; \quad \Delta T = T_0 - T_1, \tag{17}$$

$u = dz''/dt$ — скорость роста пленки за счет притока капель; при данных значениях скорости и водности потока имеет постоянное значение.

Уравнение (16) запишем в переменных $h = ut - z'$:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h}{\tau} = u. \tag{18}$$

Установившуюся толщину пленки h_e найдем из условия $dh/dt = 0$

$$h_e = ut = \frac{qE\left[L_c - c\rho(T_0 - T_\infty)\right]}{c\rho B \Delta T\,\mathrm{Re}_a^{-0.2} V}. \tag{19}$$

Решение (18) имеет вид

$$h = h_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + h_e\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \tag{20}$$

h_0 — начальная толщина пленки, m.

Из (18) и (19) получим

$$\frac{dh}{dt} = u\left[1 - \frac{h}{h_e}\right]. \tag{21}$$

Из (21) следует, что если $h < h_e$, то $dh/dt > 0$ и пленка растет; если же $h > h_e$, то $dt/dt < 0$ и пленка уменьшается, т.е. состояние h_e является устойчивым. То же самое видно из решения (20). Независимо от того $h_0 > h_e$ или $h_0 < h_e$, с течением времени толщина пленки стремится к h_e.

Введем обозначение $w = dz'/dt$. Решение уравнения (16) имеет вид

$$w = w_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \tag{22}$$

w_0 — начальная скорость кристаллизации, m/s.

Из (22) видно, что с течением времени скорость движения фронта кристаллизации стремится к скорости движения поверхности пленки. При этом толщина пленки остается постоянной.

Таким образом, при турбулентном режиме движения пленки, который реализуется при числе Рейнольдса, большем критического значения $\mathrm{Re} \geq 1500$ [1,2], рост льда происходит под установившейся толщиной пленки, что приводит к образованию прозрачной однородной структуры льда.

3. Рост льда под пленкой при ламинарном течении

Рассмотрим ламинарное движение пленки. С учетом (10), (14) и (15) для скорости движения фронта кристаллизации получим выражение

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{k_0}{ut - z'}, \tag{23}$$

где

$$k_0 = \frac{\lambda \Delta T}{\rho\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]}. \tag{24}$$

Запишем уравнение (23) в переменных $h = ut - z'$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{k_0}{h} = u. \tag{25}$$

Из условия $dh/dt = 0$ найдем равновесную толщину пленки

$$h_b = \frac{k_0}{u} = \frac{\lambda \Delta T}{qEV\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) получим

$$\frac{dh}{dt} = u\left[1 - \frac{h_b}{h}\right]. \tag{27}$$

Из (27) видно, что если $h < h_b$, то $dh/dt < 0$ и толщина пленки уменьшается; если же $h > h_b$, то толщина пленки увеличивается, т.е. состояние h_b является неустойчивым, ибо малейшее отклонение h от h_b уводит h от равновесного значения.

Решение уравнения (25) имеет вид

$$h - h_0 + h_b \ln\left|\frac{h - h_0}{h_0 - h_b}\right| = ut. \tag{28}$$

Непосредственно из (28), подставив $h = 0$, найдем время t_0, по истечении которого пленка с $h_0 < h_b$ исчезнет,

$$t_0 = \frac{h_b \ln\left[\frac{h_b}{h_b - h_0}\right] - u}{u}. \tag{29}$$

Итак, если $h_0 < h_b$, то пленка за время t_0 исчезает и капли кристаллизуются, не сливаясь воедино, при этом образуется матовая неоднородная структура льда. Если же $h_0 > h_b$ и имеет место вязкий режим движения пленки (молекулярный механизм теплопередачи), то с увеличением толщины пленки движение переходит в турбулентный режим (турбулентный режим теплопередачи).

4. Критическая толщина пленки

Найдем критическое значение толщины пленки, при которой происходит переход от вязкого режима движения пленки к турбулентному. Из формул (9) и (26) получим

$$h_e h_b = k_0 \tau = \frac{\lambda}{\lambda_t} h^2. \tag{30}$$

Отсюда найдем критическую толщину пленки h_c, которая соответствует условию $\lambda_t = \lambda$,

$$h_c = \sqrt{k_0\tau} = \sqrt{h_e h_b} = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho B}\,\frac{\mathrm{Re}_a^{-0.1}}{V}}, \qquad (31)$$

т.е. критическая толщина пленки h_c есть такая толщина пленки, при которой коэффициент турбулентной теплопроводности равен коэффициенту молекулярной теплопроводности. Хотя оба механизма теплопередачи в пленке существуют одновременно [7], будем считать, как это делается во многих задачах гидродинамики [10], что при $h < h_c$ основным является молекулярный механизм теплопередачи, а при $h > h_c$ — турбулентный.

Как видно из (31), критическая толщина пленки величина не постоянная, а обратно пропорциональна скорости воздушного потока. Подставив выражение (31) для h_c в уравнения (18) и (19), получим

$$\left[\frac{dh}{dt}\right]_c = u - \sqrt{k_0/\tau} = u\left[1 - \sqrt{h_b/h_e}\right]. \qquad (32)$$

Из (31) и (32) следует, что возможны три различные ситуации: 1) $h_b < h_c < h_e$, при этом $(dh/dt)_c > 0$; 2) $h_b = h_c = h_e$, при этом $(dh/dt)_c = 0$; 3) $h_b > h_c > h_e$, при этом $(dh/dt)_e < 0$. В первом случае при $h_b < h < h_e$ режим движения пленки ламинарный и толщина пленки растет до значения h_e, при котором происходит переход от ламинарного режима движения пленки в турбулентный. Далее толщина пленки продолжает увеличиваться до значения h_e. Во втором случае толщина пленки постоянна. Режим движения пленки турбулентный. В третьем случае независимо от режима движения пленки толщина пленки уменьшается.

Итак, имеется некоторое критическое значение равновесной толщины пленки $h_{b.c}$, соответствующее равновесному состоянию $h_b = h_c = h_e$, которое можно определить только экспериментально. Эксперименты показывают [1,2], что для воды $h_{b.c} = 1.3 \cdot 10^{-3}$ m.

Таким образом, если $h < h_{b.c}$, то имеет место молекулярный механизм теплопроводности, пленка исчезает и капли кристаллизуются, не сливаясь воедино и образуя матовую неоднородную структуру льда. Если же $h > h_{b.c}$, то имеет место турбулентный механизм теплопроводности, толщина пленки, уменьшаясь, стремится к $h_{b.c}$ и кристаллизация происходит под постоянной толщиной пленки, при этом образуется прозрачная однородная структура льда.

Как видно из (18), (25) и (32), устойчивому состоянию $(dh/dt)_c = 0$ соответствует некоторое критическое значение скорости движения поверхности пленки u_c

$$u_c = \left[\frac{qEV}{\rho}\right]_c = \frac{k_0}{h_{b.c}} = \frac{\lambda\Delta T}{\rho h_{b.c}\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]}. \qquad (33)$$

Если в (33) пренебречь членом $c(T_0 - T_\infty)$ по сравнению с L_c, что для воды вполне допустимо, получим, что переход от одной структуры льда к другой определяется также обобщенным параметром Маклина [13]

$$M = \frac{qEV}{\Delta T} = \frac{\lambda}{L h_{b.c}}. \qquad (34)$$

Таким образом, и параметр Маклина, и равновесная критическая толщина пленки характеризуют переход от одной структуры льда к другой. Формула же (34) устанавливает связь между параметрами M и $h_{b.c}$.

Формула (33) позволяет так же найти значение критической водности q_K потока, определяющей переход от одной структуры льда к другой,

$$q_K = \frac{\lambda\Delta T}{h_{b.c}EV\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]}. \qquad (35)$$

Назовем ее критической водностью Качурина. Например, при значениях $E = 1$, $\Delta T = 1^\circ$C, $V = 10^2$ m/s критическая водность Качурина будет $q_K \cong 3 \cdot 10^{-4}$ kg/m^3.

С учетом (11) и (14) уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации записывается в виде

$$\rho\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]\frac{dz'}{dt} = \alpha(T_s - T_\infty) + L\beta(\rho_s - \rho_\infty). \qquad (36)$$

Рассмотрим частный случай, когда пленка на поверхности пластины отсутствует и все капли кристаллизуются, не сливаясь воедино. В этом случае $dz'/dt = dz''/dt$. Подставив (15) в (30), получим

$$qEV\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right] = \alpha(T_s - T_\infty) + L\beta(\rho_s - \rho_\infty). \qquad (37)$$

Отсюда найдем критическую водность q'_c

$$q'_c = \frac{\alpha(T_s - T_\infty) + L\beta(\rho_s - \rho_\infty)}{EV\left[L_c - c(T_0 - T_\infty)\right]}, \qquad (38)$$

определяющую условие, при котором все капли, оседающие на поверхность пластины, кристаллизуются. Если $q > q'_c$, то на поверхности пластины образуется пленка. Условие $q > q'_c$ не является достаточным для того, чтобы образовывалась прозрачная однородная структура льда, так как при $h < h_b$ пленка на поверхности пластины будет неустойчивой и со временем исчезнет. Для образования прозрачной однородной структуры льда необходимо, чтобы толщина пленки была больше равновесной.

5. Полуэмпирическая теория образования слоистой структуры льда

Из феноменологической теории образования слоистой структуры льда, развитой в [1,2], следует, что слоистая структура льда определяется параметром h_b — равновесной толщиной пленки. Измерения плотности ледяных наслоений ρ_i на препятствиях, обтекаемых потоком водного аэрозоля, при различных значениях h_b хорошо аппроксимируются формулой [14,15]

$$\rho_i = \rho_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{0.32}{h_b}\right)\right), \tag{39}$$

где ρ_0 — плотность прозрачного однородного льда, kg/m^3.

Из (39) видно, что при малых h_b образуется прозрачная однородная структура льда, при больших h_b — матовая неоднородная структура льда. То же самое следует из формулы (27). Действительно, при малых h_b имеется большая вероятность, что $h_0 > h_b$ и толщина пленки, согласно (27), будет расти, а кристаллизация будет идти под пленкой. При этом образуется прозрачная однородная структура льда (мокрый рост). При больших h_b ($h_b \to \infty$) имеется большая вероятность, что $h_0 < h_b$. Толщина пленки, согласно (27), уменьшается, пленка исчезает и кристаллизация идет в отсутствие пленки. При этом образуется неоднородная структура льда. Из этой статистической интерпретации выражение в скобках в (39)

$$P = 1 - \exp(-0.32/h_b) \tag{40}$$

можно интерпретировать как эмпирическую функцию распределения вероятности образования прозрачной однородной структуры льда. Действительно, при $h_b = 0$ $P = 1$, т.е. с вероятностью $P = 1$ следует ожидать образования прозрачной однородной структуры льда. При $h_b \to \infty$ $P = 0$, т.е. вероятность образования прозрачной однородной структуры льда равна нулю или вероятность образования матовой неоднородной структуры льда $Q = 1 - P$ равна единице. Из приведенной интерпретации следует, что можно ввести критическое значение равновесной толщины пленки $h_{b.c}$, при котором с 90%-ной вероятностью $P = 0.9$ следует ожидать образования прозрачной однородной структуры льда. Из (40)

$$h_{b.c} = \frac{0.32}{\ln 10} \approx 1.3 \cdot 10^{-3}\,(\mathrm{m}). \tag{41}$$

Другими словами, $h_{b.c}$ означает, согласно формуле (27), что с вероятностью 90% можно ожидать $h_0 > h_{b.c}$. Это приведет к образованию прозрачной однородной структуры льда. При статистической интерпретации слоистая структура льда не зависит от движения пленки. Критерием, определяющим переход от одной структуры льда к другой, является равновесная толщина пленки h_b. Кроме того, согласно [7,10], нет четкой границы перехода от ламинарного движения пленки к турбулентному. В области критического значения числа Рейнольдса имеет место явление перемежаемости, когда ламинарный режим сменяется турбулентным, и наоборот. Количественно перемежаемость характеризуется параметром γ, определяющим долю времени, в течение которого наблюдается турбулентное движение. С этих позиций на критическую толщину пленки, определяющую переход от ламинарного движения к турбулентному, следует смотреть как на некоторую статистическую характеристику. При $h > h_b$ движение может быть как ламинарным, так и турбулентным. При ламинарном движении пленка будет расти ($h > h_c$) до некоторого значения, при котором происходит срыв капель с поверхности пленки. При турбулентном же движении толщина пленки будет стремиться к постоянному значению h_e, при этом может поглощаться как угодно большая водность.

Таким образом, только в рамках статистического подхода можно дать удовлетворительное объяснение роли критического значения равновесной толщины пленки $h_{b.c}$, а также (39). Феноменологический подход выявляет лишь роль параметра h_b, определить же значение $h_{b.c}$ в рамках этого подхода невозможно.

6. Заключение

Толщина пленки должна быть больше критического значения равновесной толщины $h_{b.c.}$, чтобы она могла устойчиво сохраняться на поверхности пластины. При этом образуется прозрачная однородная структура льда. В противном случае пленка на поверхности пластины неустойчива и со временем исчезает. Это приводит к образованию матовой неоднородной структуры льда.

Аналогично тому, как это было сделано выше для пластины и развито в [6] для образования слоистой структуры льда на поверхности сферы (рост градин), можно построить теорию образования слоистой структуры льда на поверхности цилиндра (обледенение проводов). Для этого нужно учесть соответствующее выражение для лобового сопротивления c_f [10], коэффициента формы (для цилиндра $k_f = 2$), а также чисел Нуссельта Nu и Шервуда Sh [7,10]. Механизм же образования слоистой структуры льда одинаков как для пластины, так и для сферы и цилиндра.

Таким образом, в настоящей работе теория Качурина [1] развита с учетом тепломассообмена на поверхности пленки, а также указаны пути последовательного применения ее к поверхностям различных форм.

Список литературы

[1] *Качурин Л.Г.* // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 6. С. 823–832.
[2] *Качурин Л.Г., Морачевский В.Г.* Кинетика фазовых переходов воды в атмосфере. Изд-во ЛГУ, 1965. С. 144.
[3] *Закинян Р.Г.* // Тр. СФ ВГИ. 1993. Вып. 1. С. 122–129.
[4] *Закинян Р.Г.* // Тр. СФ ВГИ. 1993. Вып. 1. С. 130–139.
[5] *Закинян Р.Г.* // Тр. СФ. ВГИ. 1993. Вып. 1. С. 140–148.
[6] *Закинян Р.Г.* // ИФЖ. 2003. Т. 76. № 2. С. 30–35.
[7] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
[8] *Хинце И.О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 607 с.
[9] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[10] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

[11] *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: ИЛ, 1951. 576 с.
[12] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
[13] *Maclin W.C.* // Quart. J. Roy. Met. Soc. 1968. Vol. 94. N 401. P. 73–77.
[14] *Качурин Л.Г., Гашин Л.И.* // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4. № 1. С. 93–96.
[15] *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 464 с.