

01;03

Нелинейные осцилляции и устойчивость заряженной капли, движущейся относительно диэлектрической среды

© В.А. Коромыслов, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 февраля 2004 г.)

В нелинейных расчетах второго порядка малости по амплитуде начальной деформации капли показано, что при наличии потока идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, обтекающей заряженную идеально проводящую каплю, имеет место взаимодействие мод как в первом, так и во втором порядке малости. И линейное и нелинейное взаимодействия мод осцилляций приводят к возбуждению мод, отсутствующих в спектре, определяющем начальную деформацию капли. Следствием относительного движения капли и среды является расширение спектра мод, возбуждающихся во втором порядке малости. Наличие обтекающей каплю потока и взаимодействие мод приводят к снижению критических для реализации неустойчивости капли величин собственного заряда, скорости и плотности внешней среды.

1. В разнообразных задачах технической физики и технологии приходится сталкиваться с заряженными каплями, движущимися относительно среды [1,2]. В частности, движущаяся относительно среды заряженная капля представляет интерес в связи с исследованием физического механизма инициирования разряда молнии [3,4]. Так, согласно существующим качественным представлениям, зарождение разряда линейной молнии связано с зажиганием коронного разряда в окрестности крупной капли или обводненной градины (с реализацией неустойчивости заряженной поверхности капли воды). Однако такие представления не находят подтверждения в натурных измерениях в грозовых облаках: максимальные величины измеряемых собственных зарядов капель и внутриоблачных электрических полей [5] много меньше необходимых для реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному и индуцированному зарядам [6]. По всей видимости, при построении физической модели инициирования разряда молнии упускается некий важный фактор, например аэродинамическое давление в окрестности падающей капли, которое может привести к снижению критических условий реализации неустойчивости ее заряженной поверхности [7–9].

Исследованию закономерностей дробления свободно падающих капель в атмосфере посвящено весьма значительное число работ (см., например, обзор [2]), которые носят в основном экспериментальный характер. Строгое аналитическое решение задачи об осцилляциях и устойчивости заряженной капли, движущейся относительно среды, найдено только в линейном приближении по величине деформации ее сферической формы [7–9].

Аналитические исследования нелинейных осцилляций и устойчивости заряженных капель во внешней диэлектрической среде выполнены пока лишь для капли, неподвижной относительно среды [10–12]. Нелинейный анализ устойчивости поверхности заряженной капли, движущейся относительно среды, до сих пор не пред-

принимался. В этой связи и проведено настоящее рассмотрение.

2. Пусть идеальная несжимаемая диэлектрическая среда с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_* , занимающая бесконечный объем, движется с постоянной скоростью \mathbf{U}_0 относительно неподвижной капли радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ , а полный заряд капли — Q . Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропорциональное одной из мод капиллярных осцилляций системы и станем исследовать нелинейные осцилляции капли при $t > 0$.

Для упрощения нижеследующих расчетов будем пользоваться безразмерными переменными, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$. Тогда в сферической системе координат с началом в центре масс капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, будет иметь вид

$$r = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Движение жидкости в капле и среде будем полагать потенциальными, т.е. примем, что поля скоростей волнового движения жидкости в капле $\mathbf{V} = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$ и в среде $\mathbf{U} = \nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$ определяются функциями потенциалов скоростей в капле $\psi(\mathbf{r}, t)$ и в среде $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций границы раздела сред состоит из системы уравнений Лапласа для потенциалов скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

и граничных условий к ним в центре капли

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (2)$$

на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \nabla\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

на границе раздела сред кинематического

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \quad (4)$$

равенства нормальных компонент скоростей жидкости в капле и в среде

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \quad (5)$$

динамического

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + P_{\text{in}} + P_E - P_\sigma \\ = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (\nabla\varphi)^2 + P_{\text{ex}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_E = \frac{\varepsilon_* (\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \text{div } \mathbf{n}$$

постоянства электрического потенциала на поверхности капли

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t). \quad (7)$$

В выписанных соотношениях P_{in} и P_{ex} — давления в капле и среде соответственно, P_E — давление электрического поля собственного заряда капли на границу раздела сред, P_σ — лапласовское давление, \mathbf{n} — единичный вектор положительной нормали к поверхности капли, $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль поверхности капли электростатический потенциал; $\rho_2/\rho_1 \equiv \rho$.

Кроме перечисленных выше граничных условий следует учесть также условия неизменности собственного электрического заряда капли

$$-\frac{\varepsilon_*}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi) dS = Q; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases} \quad (8)$$

и неизменности объема капли

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin \theta d\theta d\vartheta = \frac{4}{3} \pi; \quad V_1 = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t); \\ 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (9)$$

Условие неподвижности центра масс системы, как показано в [12], при достаточно больших линейных масштабах внешней среды выполняется автоматически, поэтому расчет амплитуды трансляционной (первой) моды, как и более высоких мод, следует производить на основе системы граничных гидродинамических условий на границе раздела.

Начальные условия сформулируем, определяя в начальный момент времени осесимметричную деформацию сферической формы капли и полагая равной нулю начальную скорость движения границы раздела сред

$$\xi(\theta, t = 0) = \xi_0 \cdot P_0(\cos \theta) + \varepsilon \cdot P_k(\cos \theta) \quad (k \geq 2); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t = 0)}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Здесь ε — амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\cos \theta)$ — полином Лежандра k -го порядка; ξ_0 — константа, определяемая условием (9) и имеющая во втором порядке малости вид

$$\xi_0(\theta, t = 0) = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3). \quad (12)$$

3. При решении задачи (1)–(12) в квадратичном по амплитуде осцилляций приближении использовался метод многих масштабов. Для этого искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представлялись в виде рядов по степеням малого параметра ε и рядов по полиномам Лежандра подобно тому, как это было сделано в [10,11], и считались зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов $T_m = \varepsilon^m t$

$$\xi(\theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots);$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots);$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \varphi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots);$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots). \quad (13)$$

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя разложения (13) в краевую задачу (1)–(9) и приравнявая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

4. В нулевом порядке малости задача (1)–(9) имеет вид

$$\Delta\Phi^{(0)} = 0; \quad \Delta\varphi^{(0)} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(0)} \rightarrow 0; \quad \nabla\varphi^{(0)} \rightarrow \mathbf{U}_0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} = 0;$$

$$P_{\text{in}} + \frac{\varepsilon_*}{8\pi} \left(\frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right)^2 - 2 = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 + P_{\text{ex}};$$

$$\Phi^{(0)} = \Phi_S^{(0)}; \quad -\frac{\varepsilon_*}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \sin \theta d\theta d\vartheta = Q. \quad (14)$$

Решения (14), описывающие равновесное состояние системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(\theta) &\equiv U \left(r + \frac{1}{2r^2} \right) \cos \theta; \\ \Phi_S^{(0)} &\equiv \frac{Q}{\varepsilon_*}; \quad \Phi^{(0)} \equiv \frac{Q}{\varepsilon_* r}. \end{aligned} \quad (15)$$

5. В силу линейности уравнений (1)–(3) им должны удовлетворять каждая из функций $\varphi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ в разложениях (13), поэтому представим последние для $m \geq 1$ в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n P_n(\cos \theta); \\ \varphi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\cos \theta); \\ \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (16)$$

В аналогичном виде будем искать и последовательные поправки $\xi^{(m)}$ к выражению, определяющему форму поверхности капли,

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\cos \theta). \quad (17)$$

В первом порядке малости по ε для определения неизвестных коэффициентов $G_n^{(1)}$, $E_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $M_n^{(1)}$ в решениях (16), (17) (при $m = 1$) система граничных и начальных условий (4)–(11) с учетом (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} r = 1: \quad & \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}; \\ & \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta}; \\ & - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{\varepsilon_*}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \left(\frac{d\Phi^{(1)}}{dr} + \xi^{(1)} \frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} \right) + (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} \\ & = \rho \left\{ - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial T_0} + \xi^{(1)} \left(\frac{d\varphi^{(0)}}{d\theta} \right)^2 - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right\}; \\ & \Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)}; \\ & \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{dr} + \left(\frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(1)} \right] \sin \theta d\theta = 0; \\ t = 0: \quad & \xi^{(1)} = P_k(\cos \theta); \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad \int_0^\pi \xi^{(1)} \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа. Подставляя разложения (16), (17) (при $m = 1$), а также решения нулевого порядка малости (15) в систему (18), можно получить бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений, определяющих неизвестные коэффициенты $G_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $E_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$

$$\begin{aligned} M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \\ n \geq 2; \quad & A_n M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\ & + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ & + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + D_n M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \\ & E_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0}; \\ G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= - \frac{1}{n+1} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \\ & + \frac{2}{3} U \left[\frac{n}{(2n-1)} M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1) - \frac{n}{(2n+3)} M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1) \right]; \\ & A_n = \frac{9}{4} U^2 \rho \chi(n) \frac{n^2(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}; \\ B_n &= \frac{3}{2} U \rho n \chi(n); \quad C_n = \frac{3}{2} Y \rho \chi(n) \frac{n(2n+1)}{2n+3}; \\ D_n^{(1)} &= \frac{9}{4} U^2 \rho \chi(n) \frac{n^2(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}; \\ \omega_n^2 &= \chi(n) \left(n(n-1)(n+2-W) \right. \\ & \left. - \frac{9}{2} U^2 \rho \frac{n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right); \\ W &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_*}; \quad \chi(n) = \left(1 + \rho \frac{n}{n+1} \right)^{-1}; \\ F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{Q}{\varepsilon_*} M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots); \quad \Phi_S^{(1)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (19) позволяет определить зависимость коэффициентов разложений только от временного масштаба T_0 . Их зависимости от других временных масштабов определяются в следующих порядках малости.

Несложно видеть, что при $U = 0$, т.е. в случае неподвижной среды, линейное взаимодействие мод, определяемое (19), исчезает. Система связанных дифференциальных уравнений (19) распадается на совокупность несвязанных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, определяющих гармонические осцилляции отдельных мод (как это и было получено ранее [10,11] для ситуации осцилляций

заряженной капли несжимаемой жидкости, покоящейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды). Таким образом, причиной появления линейного по малому параметру взаимодействия мод является наличие движения внешней среды. При этом согласно (19) n -я мода взаимодействует с четырьмя ближайшими: с $(n-2)$ -, $(n-1)$ -, $(n+1)$ -, $(n+2)$ -й. Ранее взаимодействие мод в линейном приближении по малому параметру было обнаружено в случае плоской границы раздела несмешивающихся между собой идеальных несжимаемых сред, одна из которых поступательно движется параллельно границе раздела [13], т.е. в ситуации, когда граница раздела способна претерпевать неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. В [7–9] было показано, что в случае обтекания капли потоком идеальной жидкости поверхность капли вовлекается в колебательное движение, характерное для этой неустойчивости.

Отметим также еще один эффект взаимодействия капли с обтекающим ее потоком идеальной жидкости, обнаруживаемый в линейном приближении: согласно [14,15], капля сплющивается вдоль потока в сфероид с эксцентриситетом, зависящим от скорости потока и величины заряда капли. Возможные осцилляции капли будут происходить в окрестности равновесной сферoidalной формы. Однако степень сфероидальности при разумных скоростях (пока течение обтекающей каплю среды можно считать ламинарным), как правило, весьма мала. Согласно [14,15], амплитуда обсуждаемой сферoidalной деформации $M_2^{(1)} = (3\rho_2 R U^2 / 16\sigma)$ и, например, при расчетах обтекания капли с $R = 100 \mu\text{m}$ потоком воздуха, когда $\rho_2 \approx 0.001 \text{ g/cm}^3$, при любых разумных скоростях потока (пока $\text{Re} = (R \cdot U / \nu) \leq 20$, где ν — кинематическая вязкость среды) ею можно пренебрегать при расчетах второго порядка малости.

Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по ε приближении, величины $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ можно положить не зависящими от временного масштаба T_1 , т.е. представить в виде $M_n^{(1)}(T_0, T_1) \approx M_n^{(1)}(T_0) + O(T_1)$. При этом для возмущения поверхности получается оценка

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\theta, t) + \varepsilon \cdot O(\varepsilon t). \quad (20)$$

Это разложение равномерно пригодно при $t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Для значений $t \geq O(\varepsilon^{-1})$ данное разложение становится непригодным. Таким образом, выражение (20) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$, в этом случае ошибка составляет величину $\sim \varepsilon^2$. Однако при исследовании тенденций движения поверхности использовать (20) можно и на временных интервалах $t \leq O(\varepsilon^{-1})$ при выполнении условия сравнимости решения первого порядка с величиной начальной деформации.

6. Для определения поправок второго порядка малости, т.е. для отыскания функций $G_n^{(2)}$, $E_n^{(2)}$, $F_n^{(2)}$, $M_n^{(2)}$ из системы граничных условий (4)–(12), сохраняя в (13) слагаемые второго порядка малости по ε , получим уравнения

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta};$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r^2} \\ & - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} + \xi^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi^{(0)}}{\partial r^3} \\ & - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} + 2\xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta}; \\ & - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\varepsilon_*}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ & + 2\xi^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2\xi^{(1)} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \\ & + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial r^3} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 \right) + [(2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)} \\ & - 2\xi^{(1)}(1 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)}] = \rho \left\{ - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \right. \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 \\ & - \frac{(\xi^{(1)})^2}{2} \left[3 \left(\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^3 \varphi^{(0)}}{\partial r^2 \partial \theta} \right] - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \theta} \\ & \left. + \xi^{(1)} \left[2 \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r \partial \theta} \right] \right\}; \\ & \Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} + \xi^{(1)} \frac{d\Phi^{(1)}}{dr} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} = \Phi_S^{(2)}; \\ & \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. + \xi^{(2)} \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{dr} \Big] \sin \theta d\theta = 0; \\ & t = 0: \quad \xi_0^{(2)} = - \frac{1}{(2k+1)}; \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = 0; \\ & \int_0^\pi \left[\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2 \right] \sin \theta d\theta = 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Подставляя разложения (16), (17) (при $m = 2$), а также решения (15) и (19) в (21), выпишем систему неоднородных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $G_n^{(2)}$, $E_n^{(2)}$, $F_n^{(2)}$, $M_n^{(2)}$. Исключая из получившихся уравнений слагаемые, пропорциональные $(\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1, \dots) / \partial T_1)$, которые приводят к появлению секулярных членов в решениях,

получим, что амплитуды разложения $M_m^{(1)}$ не зависят от временного масштаба T_1 . Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что $M_m^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_m^{(1)}(T_0) + O(T_2)$. На основе вышесказанного система дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов $G_n^{(2)}, E_n^{(2)}, F_n^{(2)}, M_n^{(2)}$ сведется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 M_0^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(M_0^{(1)}(T_0) \right)^2; \\
 A_n M_{n-2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} &+ \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\
 + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} &+ D_n M_{n+2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = \chi(n) f_n(T_0); \quad n \geq 1; \\
 E_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{1}{n} \left(\frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \right. \\
 - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[(m-1) K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) \Big); \\
 G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{3n}{2(2n-1)} U M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\
 - \frac{3n}{2(2n+3)} U M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) - \frac{1}{n+1} \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \\
 - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \left[\frac{m+2}{n+1} K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{(n+1)(m+1)} \right] \right. \\
 \times \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) + \frac{3}{2} U M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \\
 \times \left[- \frac{m(m-1)^2}{(n+1)(2m+1)} K_{m-1,l,n} + \frac{(m+1)^2(m+2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m+1,l,n} \right. \\
 \left. \left. - \frac{(m+1)\alpha_{m+1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} + \frac{(m-1)\alpha_{m-1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} \right] \right\}; \\
 F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{Q}{\varepsilon_*} \left\{ M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\
 + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left(m K_{m,l,n} M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \right) \Big); \\
 \Phi_S^{(2)} &\equiv 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_n(T_0) &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left\{ K_{m,l,n} \left(2n[l(l+1)-1] \right. \right. \right. \\
 + W \frac{n}{2} [l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3] \\
 + U^2 \rho \frac{n(9m^2+9m-7)}{(2m-1)(2m+3)} \Big) + \alpha_{m,l,n} W \frac{n}{2} \\
 + U^2 \rho \frac{9n(n-1)}{4(2n-1)(2m+1)} [m(m-1)^2 K_{m-1,l,n-1} \\
 - (m+1)^2(m+2) K_{m+1,l,n-1} - (m-1)\alpha_{m-1,l,n-1} \\
 + (m+1)\alpha_{m+1,l,n-1}] + U^2 \rho \frac{9n(n+1)}{4(2n+3)(2m+1)} \\
 \times [(m+1)^2(m+2) K_{m+1,l,n+1} - m(m-1)^2 K_{m-1,l,n+1} \\
 - (m+1)\alpha_{m+1,l,n+1} + (m-1)\alpha_{m-1,l,n+1}] \\
 - U^2 \rho \frac{9n}{8(2m+1)} \left[\frac{m(m-1)}{2m+1} K_{m-2,l,n} \right. \\
 \left. + \frac{(m+1)(m+2)}{2m+3} K_{m+2,l,n} \right] \Big\} + U^2 \rho \frac{9nm(m+1)}{4(2m+1)} \\
 \times \left(\frac{M_{m-1}^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0)}{2m-1} - \frac{M_{m+1}^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \\
 \times [(m-1)(m+2) K_{m+1,l,n} - m(m+5) K_{m-1,l,n}] \\
 + \frac{9}{8} U^2 \rho n [(m+1)(l+1) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n}] \\
 \times \left(\frac{m M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} - \frac{m M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \left(\frac{l M_{l-1}^{(1)}(T_0)}{2l-1} - \frac{l M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{2l+3} \right) \\
 + \frac{3}{4} U \rho n [(m+1)(l+1) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n}] \left[\frac{m}{l+1} \left(\frac{M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right. \right. \\
 \times \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} - \frac{M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \Big) + \frac{l}{m+1} \\
 \times \left(\frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{2l+3} - \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_{l-1}^{(1)}(T_0)}{2l-1} \right) \Big] \\
 + \left[(m-n-1) K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} - \frac{\rho n}{n+1} \left((m-n+1) K_{m,l,n} \right. \right. \\
 - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m+1} \Big) \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) + \left[\left(m-1 - \frac{n}{2} \right) K_{m,l,n} \right. \\
 - \frac{n+2l}{2ml} \alpha_{m,l,n} + \frac{\rho n}{2(n+1)} \left((n-2m-3) K_{m,l,n} \right. \\
 \left. \left. + \frac{(n+2l+3)\alpha_{m,l,n}}{(m+1)(l+1)} \right) \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{3}{2} U \rho n \\
 \times \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) \left(\frac{m(4+5n+3m+mn+m^2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m-1,l,n} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(m+2)(2+n+m-mn+m^2)}{(n+1)(2m+1)} K_{m+1,l,n} \\
& + \frac{(n-1)(m+2)}{2n-1} K_{m,l,n-1} - \frac{(n+1)(m+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} \\
& + \frac{(m-1)\alpha_{m-1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} - \frac{(n-1)\alpha_{m,l,n-1}}{(m+1)(2n-1)} + \frac{(n+1)\alpha_{m,l,n+1}}{(m+1)(2n+3)} \\
& - \frac{(n+1)\alpha_{m+1,l,n}}{(n+1)(2m+1)} \Big) + U\rho \frac{3n}{2(n+1)(2m+1)} \\
& \times [(m+1)^2(m+2)K_{m+1,l,n} - m(m-1)^2K_{m-1,l,n} \\
& - (m+1)\alpha_{m+1,l,n} + (m-1)\alpha_{m-1,l,n}] M_m^{(1)}(T_0) \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \\
& + \frac{3}{2} nU\rho m(m+1)K_{m,l,n} \left(\frac{\partial M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_l^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right. \\
& \left. - \frac{\partial M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{M_l^{(1)}(T_0)}{2m-1} \right) \Big\}; \\
& K_{mln} \equiv [C_{m0l0}^{n0}]^2; \\
& \alpha_{mln} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} \cdot C_{m-1l0}^{n0}; \quad (22)
\end{aligned}$$

C_{m0l0}^{n0} и C_{m-1l0}^{n0} — коэффициенты Клебаш–Гордана.

Рассмотрение задачи в квадратичном по ε приближении позволяет определить зависимость коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1)$ только от временного масштаба T_0 . При этом можно записать, что $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_n^{(2)}(T_0) + O(T_1)$ и для возмущения поверхности получить следующую оценку:

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\theta, t) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\theta, t) + O(\varepsilon^3 t). \quad (23)$$

Выражение (23) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$ с ошибкой $\sim \varepsilon^3$. На временном интервале $O(1) \leq t \leq O(\varepsilon^{-1})$ величина погрешности становится сравнимой со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости), следовательно, в разложении (23) справедливым останется лишь первый член, соответствующий линейному приближению. Таким образом, приближенное решение линейной задачи (20) применимо (равномерно пригодно) на временном интервале $t \leq O(\varepsilon^{-1})$.

7. Численное решение системы дифференциальных уравнений (19) относительно $M_n^{(1)}(T_0)$ в пакете Mathematica (при ограничении количества вовлеченных в расчет мод первыми пятью $n = 2, 3, 4, 5, 6$), проиллюстрированное рис. 1, 2, показывает, что при малых в смысле устойчивости капли по отношению к собственному заряду величинах скорости внешней среды U заметный вклад в спектр капиллярных колебаний капли вносит только изначально возбужденная мода ($n = k$) и (при $k \neq 2$) основная мода, которая для капли в потоке возбуждается автоматически за счет взаимодействия с потоком

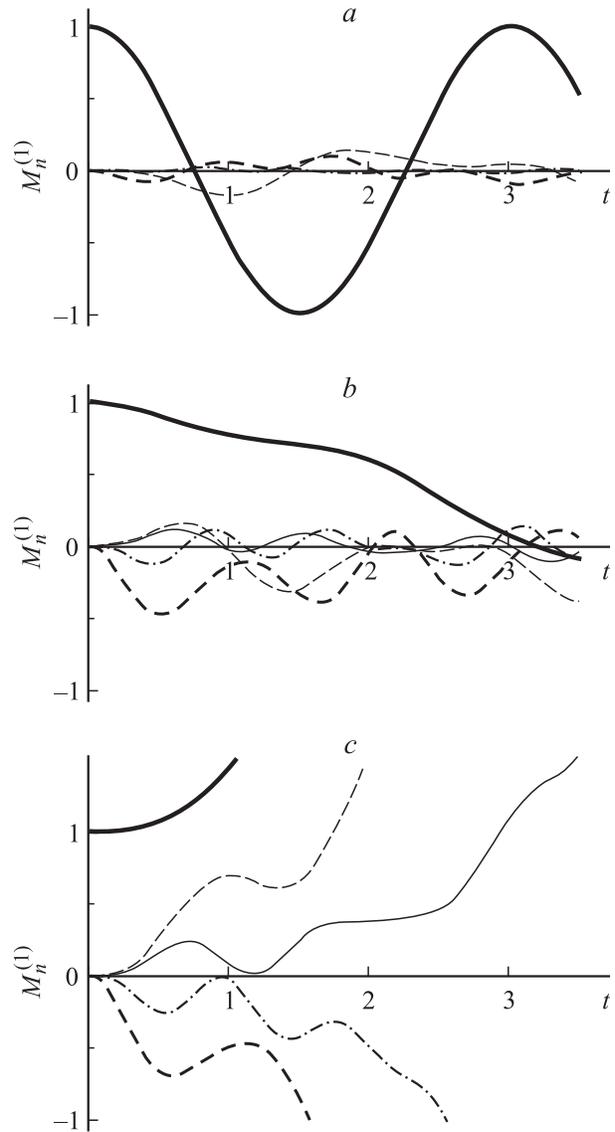


Рис. 1. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(1)}(t)$ мод, возбуждающихся в первом порядке малости, при начальной деформации капли, определяющейся основной модой ($k = 2$), когда $W = 1$, $\rho = 0.1$. Жирная сплошная линия — вторая мода, тонкая штриховая — третья мода, штриховая средней толщины — четвертая мода, штрихпунктир — пятая мода, тонкая сплошная линия — шестая мода: $U = 2$ (a), 4 (b), 4.5 (c).

(в результате перераспределения гидродинамического давления по поверхности капли [14,15]). Отметим, что критические для реализации неустойчивости капли значения скорости определяются условием $\omega_2^2 = 0$

$$\left(n(n-1)(n+2-W) - \frac{9}{2} U^2 \rho \frac{n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right) = 0 \quad \text{при } n = 2.$$

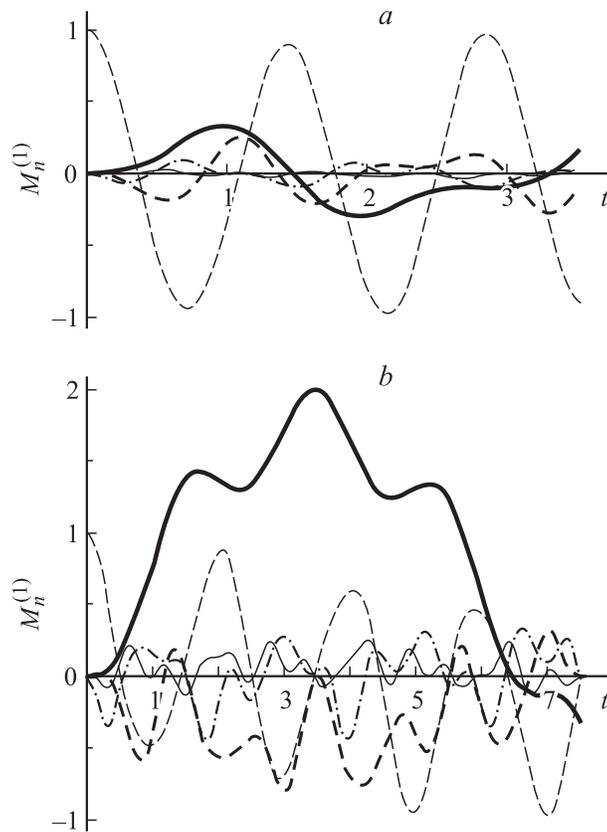


Рис. 2. Те же зависимости, что и на рис. 1, при начальной деформации, определяющейся третьей модой ($k = 3$): $U = 2$ (a), 4 (b).

Вклад остальных мод ($n \neq k$), определяющийся линейным межмодовым взаимодействием, согласно (19), мал. При этом поверхность капли совершает близкие к гармоническим колебания, соответствующие суперпозиции k -й (изначально возбужденной) моды и основной моды, в окрестности равновесной формы. Если скорость внешней среды близка к критической, при которой капля становится неустойчивой ($\omega_2^2 < 0$), вклад в формирование формы осциллирующей капли остальных мод, возбуждающихся за счет линейного взаимодействия, становится более заметным (как это видно из сравнения рис. 1, a, 2, a и 1, b, 2, b). При этом моды, более близкие по номеру (по n) к изначально возбужденной k -й, имеют большую величину амплитуды колебаний, которая с ростом n убывает.

Отметим, что в использованных безразмерных переменных скорость обезразмеривается на $\sqrt{(\sigma/(R \cdot \rho_1))}$, т.е. безразмерной скорости $U = 1$, соответствует размерная скорость $U = \sqrt{(\sigma/(R \cdot \rho_1))}$. Так, при $U = 1$ для капли воды с радиусом $R = 100 \mu\text{m}$, обдуваемой потоком воздуха, размерная скорость потока будет $\approx 84 \text{ cm/s}$. Число Рейнольдса $Re = (U \cdot R/\nu)$ для такой капли ≈ 5 , а течение воздуха в окрестности капли будет ламинарным.

На рис. 1, a–c и 2, a, b приведены рассчитанные по (19) при различных значениях скорости внешней среды U временные зависимости амплитуд мод, возбуждающихся в первом порядке малости за счет межмодового взаимодействия, когда начальная деформация определена виртуальным возбуждением основной ($k = 2$) моды (рис. 1) и третьей ($k = 3$) моды (рис. 2).

Согласно рис. 1, с ростом скорости растут и величины амплитуд колебаний мод, возбуждающихся за счет линейного взаимодействия. Причем из рис. 1, c видно, что при изначально неустойчивой второй моде за счет межмодового взаимодействия становятся неустойчивыми и несколько ближайших мод, связанных с ней, согласно (19), линейным взаимодействием, хотя при принятых в расчетах значениях U , W , ρ эти моды должны сохранять устойчивость в смысле линейной теории, так как для них $\omega_{n \neq 2}^2 > 0$. Следует отметить, что принятая в расчетах (рис. 1, c) величина скорости лишь немного превышает критическое значение, при котором капля становится неустойчивой (при $W = 1$, $\rho = 0.1$ критическое значение скорости для основной моды $U_{cr} = 4.4$). Интересно, что при дальнейшем росте скорости потока (при $U = 5$) величина инкремента неустойчивости третьей моды превышает инкремент основной и основную роль в реализации неустойчивости начинает играть третья мода [7].

Из проведенного анализа следует, что при прочих равных условиях и начальном возбуждении более высокой моды, чем основная, имеет место снижение критического для реализации неустойчивости основной моды значения скорости обдувающего потока. Так, расчеты показывают, что при начальном возбуждении третьей моды основная мода становится неустойчивой уже при $U = 4.05$. Иначе говоря, наличие межмодового взаимодействия приводит к снижению величин параметров U , W , ρ , при которых капля становится неустойчивой.

На рис. 2 приведены результаты расчета амплитудных коэффициентов мод, возбуждающихся за счет линейного взаимодействия, когда начальная деформация определена третьей модой. Из сравнения рис. 2, a, b с рис. 1, a, b видно, что амплитуда основной моды, определяющейся в описанной ситуации и действием гидродинамического давления, и взаимодействием с изначально возбужденной третьей модой, может быть сравнима с амплитудой изначально возбужденной моды (рис. 2, a) и даже превышать ее (рис. 2, b).

Численное решение систем дифференциальных уравнений (19) и (22) относительно $M_n^{(2)}(T_0)$ — амплитуд мод, возбуждающихся во втором порядке приближений за счет нелинейного взаимодействия (для мод от нулевой до шестой), показывает, что при малых величинах скорости внешней среды U аналогично тому, как это было в линейном приближении, наибольшую амплитуду имеют моды, которые возбуждались бы в отсутствие движения внешней среды [9–11], т.е. моды с номерами

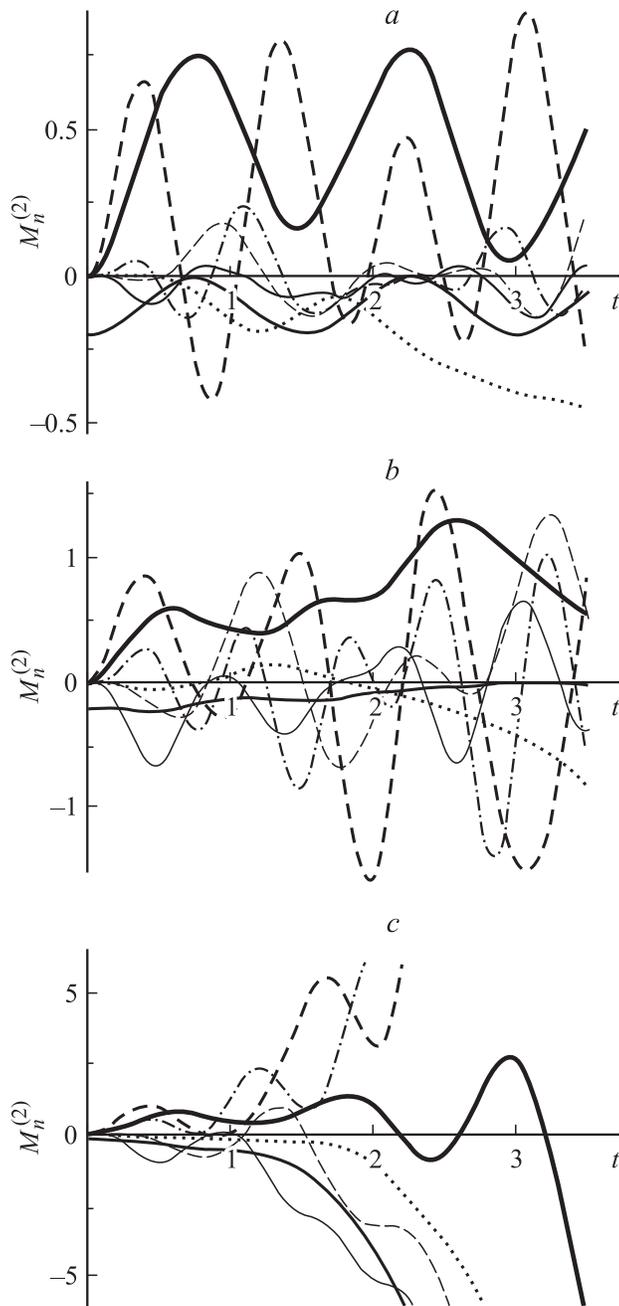


Рис. 3. Зависимости безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, при начальной деформации, определяющейся основной модой ($k = 2$), при $W = 1$, $\rho = 0.1$. Сплошная линия средней толщины — нулевая мода, тонкий короткий пунктир — первая мода. Остальные линии — то же, что и на рис. 2. $U = 2$ (a), 4 (b), 4.5 (c).

$n = 2j$, где $j = 0, 1, \dots, k$. Движение внешней среды приводит к возбуждению во втором порядке малости дополнительных мод, появление которых связано с наличием в спектре первого порядка малости мод, отличных

от изначально возбужденной, появившихся только за счет линейного взаимодействия. Амплитуды таких дополнительно возбужденных мод весьма малы и их вклад в формирование рельефа осциллирующей капли весьма незначителен.

На рис. 3, *a-c* приведены рассчитанные по (22) при различных значениях величины скорости внешней среды U временные зависимости амплитуд мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия, когда начальная деформация определена виртуальным возбуждением основной ($k = 2$) моды. При неподвижной внешней среде во втором порядке малости возбудились бы только нулевая мода, вторая и четвертая. Наличие же движения внешней среды привело к дополнительному возбуждению первой, третьей, пятой, шестой мод. Тем не менее видно, что амплитуды основной и четвертой мод максимальны.

Из рис. 3 видно также, что с ростом величины скорости растут и величины амплитуд колебаний изначально невозбужденных мод. Из рис. 1, *c* и 3, *c* видно, что вместе с линейной неустойчивостью мод становятся неустойчивыми и моды, возбуждающиеся во втором порядке малости. Причем сама неустойчивость мод более высоких, чем основная, имеет колебательный характер. Интересно, что при $n \geq 3$ амплитуды одинаковых мод в первом и втором приближении имеют противоположные знаки.

При численном анализе систем (19) и (22) мы ограничились лишь несколькими первыми модами (несколькими первыми уравнениями бесконечных систем уравнений), амплитуды которых наиболее существенно сказываются на формировании рельефа капли, полное же решение должно включать в себя весь бесконечный спектр мод, связанных взаимодействием согласно (19) и (22). Однако, амплитуды высоких мод весьма малы и быстро убывают по мере удаления номера моды от номера моды, возбужденной в начальный момент.

Заключение

Наличие идеальной несжимаемой диэлектрической среды, обтекающей заряженную идеально проводящую каплю, приводит к появлению взаимодействия мод как в первом, так и во втором порядках малости, следствием чего является возбуждение мод, отсутствующих в спектре мод, определяющих начальную деформацию капли. С увеличением скорости потока растут и амплитуды колебаний изначально невозмущенных мод. Наличие относительного движения капли и среды, а также взаимодействия мод приводит к снижению критических для реализации неустойчивости капли величин собственного заряда, скорости и плотности внешней среды.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 03-01-00760).

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Гонор А.Л., Ривкинд В.Я. // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 17. М.: ВИНТИ, 1982. С. 98–159.
- [3] Дячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [4] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [5] Облака и облачная атмосфера. Справочник / Под ред. И.П. Мазина, А.Х. Хргиана, И.М. Имянитова. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шукин С.И. // ЖПХ. 1999. Т. 72. Вып. 1. С. 117–120.
- [7] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.
- [8] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 26–34.
- [9] Коромыслов В.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 21–28.
- [10] Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 44–51.
- [11] Рыбакова М.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 24–31.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
- [13] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 3. С. 9–16.
- [14] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–47.
- [15] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Рыбакова М.В. // ЭОМ. 2002. № 6. С. 22–25.