

## Простые соотношения для определения возможной асимметрии солнечного вращения

© Ю.В. Вандакуров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 3 марта 2004 г.)

Рассматривается задача определения скорости вращения атмосферы при условии, что в одном полушарии (например, северном) известна скорость вращения на широтах 0, 30, 45 и 60°. Мы проводим расчеты с учетом трех симметричных и двух несимметричных относительно экватора вращательных мод и обсуждаем доводы в пользу того, что в случае солнечной конвективной зоны наименьшая мода несимметричного вращения среды не возбуждается. Как оказывается, практический интерес представляет решение с минимальной величиной асимметрии вращения относительно экватора. В этом случае характер убывания некоторой средней скорости солнечного вращения при увеличении широты, а также параметры одной высокоширотной подповерхностной быстро вращающейся струи находятся в согласии с наблюдениями, однако в теории присутствуют и дополнительные пикообразные вариации скорости вращения. Мы предполагаем, что сглаживание последних вариаций осуществляется благодаря возбуждению крутильных волн, которые присутствуют в солнечной конвективной зоне.

### Введение

В настоящее время одной из нерешенных является проблема самопроизвольного формирования наблюдаемого на Солнце сложного дифференциального вращения конвективной зоны с более быстрым вращением приэкваториальных слоев. Проведенные недавние исследования возможного влияния пространственного распределения турбулентной вязкости на обсуждаемый процесс формирования вращения среды, проведенные в [1,2], оказались в общем нерезультативными. В одной модели Эллиотта и др. [1] типичный характер неоднородного вращения становился даже ближе к наблюдаемому на Солнце как раз в случае уменьшения турбулентной вязкости среды.

Нами проводились исследования самоустанавливающегося дифференциального вращения звездной конвективной зоны в предположении, что реализуется состояние с минимальной величиной общей диссипации [3]. В этом случае формирование вращения с более быстрым вращением приэкваториальных слоев действительно имеет место, однако появляются также не подтверждающиеся наблюдениями пространственные вариации скорости вращения.

В настоящей работе в разделе 1 мы рассматриваем простое решение, позволяющее связать общие характеристики вращения среды со значениями скоростей вращения на некоторых (назовем их главными) широтах. Эти широты определяются из условия довольно точного совпадения разностей частот вращения между какими-то симметричными относительно экватора вращательными модами, соответствующими соседним широтам. Здесь речь идет о широтах 0, 30, 45, 60 и 90°. Как раз на таких широтах (за исключением, конечно, полюса) имеются данные гелиосейсмических наблюдений, в результате

упрощается процесс нахождения решения всей системы уравнений. В разделе 1 мы проводим эти расчеты и выводим простые соотношения для амплитуд всех вращательных мод, включая и несимметричные относительно экватора моды. Вообще говоря, учет асимметрии вращения оказывается необходимым при нахождении решения обсуждаемых уравнений.

Выясняется, однако, что упомянутое решение обычно характеризуется чрезмерно большой асимметрией вращения относительно экватора, которую можно снизить путем соответствующей корректировки величин скорости вращения на главных широтах. При этом обычно уменьшается и диссипация. В последующем мы рассматриваем только модели с наименьшей величиной асимметрии вращения.

Обсуждаемая проблема представляется важной в связи с недавно обнаруженными расхождениями в гелиосейсмических данных работы [4]. Поскольку анализ данных различных наблюдений проводился в предположении симметрии солнечного вращения относительно экватора, отсутствие такой симметрии могло бы быть причиной упомянутых разногласий. В разделах 1 и 2 мы определяем величину вероятной асимметрии вращения, пользуясь цитированными данными [4]. В этих разделах мы обсуждаем также проблему возможного медленного вращения солнечных околополюсных зон.

Заметим, что некоторые неисследованные процессы вносят существенную неопределенность в обсуждаемую процедуру сопоставления теоретических и наблюдательных данных. Здесь прежде всего мы имеем в виду возможный отток энергии на возбуждение крутильных волн, присутствие которых на Солнце подтверждается многими наблюдательными данными (см. обзор проблемы в работе [5]). Этот вопрос обсуждается в разделах 2 и 3.

## 1. Определение мод вращения

В случае дифференциально вращающейся среды большой интерес представляет задача определения амплитуд тех отдельных мод, которые формируют общее вращение среды. Если скорость имеет одну азимутальную составляющую, полную скорость вращения можно представить в виде ряда по этим составляющим векторных сферических гармоник, имеющим нулевой верхний индекс. Последние гармоники могут быть выражены через производные по полярному углу от сферических функций с помощью соотношений, приведенных в [6, § 7.3, уравнение (26) и § 5.13]. Считая, что присутствуют лишь пять мод с наименьшими нижними индексами, получим для угловой скорости  $\Omega$

$$\begin{aligned} \Omega = & \Omega_0 \{ u_1 + u_3(7/8)^{1/2}(5 \cos^2 \vartheta - 1) \\ & + u_5 [(55)^{1/2}/8](21 \cos^4 \vartheta - 14 \cos^2 \vartheta + 1) \\ & + 5^{1/2} \cos \vartheta [u_2 + u_4(3/8)^{1/2}(7 \cos^2 \vartheta - 3)] \}, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\Omega_0 = \text{const}$ ;  $\vartheta = \pi/2 - \gamma$  — полярный угол;  $\gamma$  — широта;  $u_j = u_j(r)$  — зависящие от радиуса численные коэффициенты, которые при четном (нечетном)  $j$  определяют несимметричное (симметричное) относительно экватора вращение среды.

Заметим еще, что в случае близкого к твердотельному вращения среды  $u_1$  порядка единицы, а другие коэффициенты  $u_j$  являются малыми величинами. При четных значениях  $j$  величины  $u_j$  определяют несимметричное относительно экватора вращение среды.

Поскольку общее уравнение (1) содержит пять неизвестных коэффициентов  $u_j(r)$ , мы будем принимать, что на какой-то фиксированной глубине конвективной зоны заданы пять условий на величину  $\Omega/\Omega_0$ , а именно эта величина принимается известной на широтах 0, 30, 45, 60 и 90° северного полушария и равной соответственно  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  и  $v_p$ . Наша задача состоит в нахождении упомянутых коэффициентов, тогда скорость вращения можно будет определить при любых значениях угла  $\vartheta$ . Здесь в число известных мы включили коэффициент  $v_p$ , хотя вопрос о возможности его определения, как будет видно из нижеследующего, еще нуждается в дополнительном изучении.

Из уравнения (1) вытекает, что на цитированных (главных) широтах будут выполняться соотношения

$$u_1 - 0.935414u_3 + 0.927025u_5 = v_1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_1 + 1.118034u_2 + 0.233854u_3 \\ - 0.855817u_4 - 1.100842u_5 = v_2, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 + 1.581139u_2 + 1.403121u_3 \\ + 0.484123u_4 - 0.695269u_5 = v_3, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 + 1.936492u_2 + 2.572389u_3 \\ + 2.668172u_4 + 2.143744u_5 = v_4, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 + 2.236068u_2 + 3.741157u_3 \\ + 5.477226u_4 + 7.416198u_5 = v_p. \quad (6) \end{aligned}$$

Вычитая теперь из каждого уравнения следующее за ним, получим

$$\begin{aligned} -1.118034u_2 - 1.169268u_3 + 0.855817u_4 \\ + 2.027867u_5 = v_1 - v_2, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0.463105u_2 - 1.169267u_3 - 1.339939u_4 \\ - 0.405573u_5 = v_2 - v_3, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0.355353u_2 - 1.169268u_3 - 2.184049u_4 \\ - 2.839013u_5 = v_3 - v_4, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0.299576u_2 - 1.169268u_3 - 2.809054u_4 \\ - 5.272454u_5 = v_4 - v_p. \quad (10) \end{aligned}$$

Повторяя аналогичную процедуру вычитания и пренебрегая малыми поправками, обусловленными отличием в седьмом знаке вторых коэффициентов, мы исключаем коэффициент  $u_3$

$$\begin{aligned} -0.654929u_2 + 2.195756u_4 + 2.433440u_5 \\ = v_1 - 2v_2 + v_3, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0.107752u_2 + 0.844110u_4 + 2.433440u_5 \\ = v_2 - 2v_3 + v_4, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0.055777u_2 + 0.625005u_4 + 2.433441u_5 \\ = v_3 - 2v_4 + v_p. \quad (13) \end{aligned}$$

Отсюда находим, вычитая последующее уравнение из предыдущего,

$$-0.5472u_2 + 1.3516u_4 = v_1 - 3(v_2 - v_3) - v_4, \quad (14)$$

$$-0.0520u_2 + 0.2191u_4 = v_2 - 3(v_3 - v_4) - v_p. \quad (15)$$

Таким образом, при известных значениях  $u_j$  на рассматриваемых нами широтах коэффициенты  $u_2$  и  $u_4$ , характеризующие асимметрию вращения, являются решениями системы уравнений (14) и (15). Другие коэффициенты  $u_j$  определяются уравнениями (2), (7) и (11). Условие симметрии вращения относительно экватора удовлетворяется, если правые части уравнений (14), (15) равны нулю, тогда нулю равны также коэффициенты  $u_2$  и  $u_4$ .

В случае солнечного вращения значения коэффициентов  $v_j$  с индексами от 1 до 4 можно определить из гелиосейсмических данных, однако величина  $v_p$ , характеризующая скорость вращения на полюсе, остается неизвестной (эта величина может отличаться от нуля при асимметричном относительно экватора вращении среды). Если даже принять, что коэффициент  $v_p$  является известным, то при нахождении решения системы

уравнений (14), (15) возникают серьезные трудности из-за сравнительно малой величины численных коэффициентов при  $u_2$ . Из-за этого решение обычно имеет чрезмерно большую низкоширотную асимметрию, которая практически отсутствует в гелиосейсмических данных. Полагая, что

$$u_2 = 0, \quad (16)$$

из уравнений (14), (15) получим

$$u_4 = [v_1 - 3(v_2 - v_3) - v_4]/1.3516, \quad (17)$$

$$v_p = v_2 - 3(v_3 - v_4) - 0.2191u_4. \quad (18)$$

Если значения  $v_p$  будут одними и теми же на разных глубинах конвективной зоны, мы получим однозначное решение. Другая возможность удовлетворения рассматриваемых уравнений связана с формированием (например, из-за истечения вещества) сравнительно малых, но конечных по размерам околополюсных зон невращающейся среды. В этом случае уравнение (15) нужно будет исключить из рассмотрения.

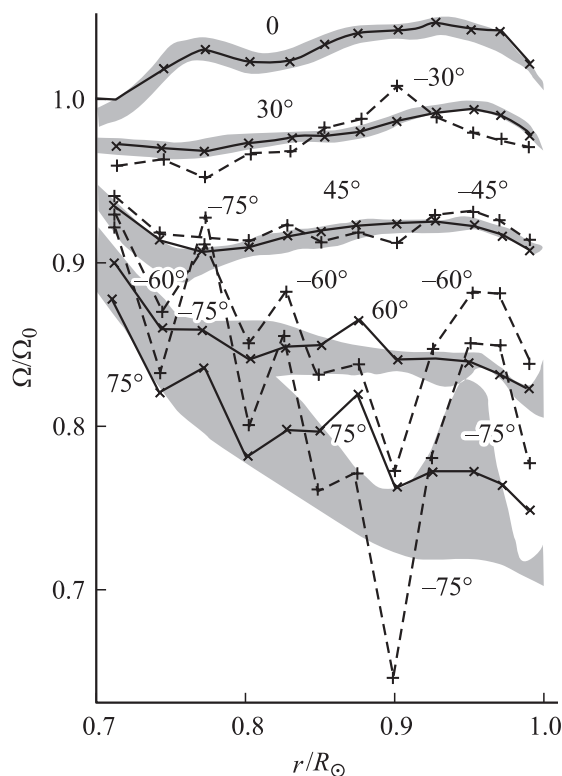
Многие гелиосейсмические данные [7,8] свидетельствуют о резком уменьшении скорости солнечного вращения на высоких широтах, что говорит в пользу последней гипотезы. В любом случае вопрос о величине  $v_p$  можно сначала оставить в стороне и при помощи уравнений (2), (7), (11), (16) и (17) провести изучение вращения основной части солнечной конвективной зоны. Эта проблема обсуждается в следующем разделе.

## 2. Распределение вращения в солнечной конвективной зоне

Будем рассматривать модель солнечной конвективной зоны, состоящей из 12 слоев, расположенных между относительными радиусами  $0.71 \leq r/R_\odot \leq 0.99$ . В случае северного полушария начальные значения угловых скоростей вращения на границах упомянутых слоев и на главных широтах (за исключением полюса) мы задаем в соответствии с данными, приведенными на рис. 1 работы [4]. Наша задача состоит в нахождении вращения на всех глубинах и в обоих полушариях конвективной зоны.

Как оказывается, даже небольшие погрешности в упомянутых начальных данных, находящиеся в пределах приведенных в [4] допустимых ошибок, могут приводить к чрезмерно большим вариациям в величине асимметрии вращения. В связи с этим нами проводилась некоторая корректировка цитированных начальных данных для северного полушария с целью получения теоретической модели с возможно меньшей асимметрией вращения относительно экватора. В каких-то отдельных случаях обсуждаемые скорректированные начальные данные даже несколько вышли за пределы приведенных в [4] допустимых ошибок.

Результаты расчетов представлены на рисунке, на котором крестики, соединенные сплошными линиями,



Сплошные линии с крестиками и штриховые с плюсами определяют теоретические значения угловой скорости вращения соответственно в северном и южном полушариях Солнца на широтах, приведенных возле этих линий. Изучается вся конвективная зона, разделенная на 12 слоев по глубине. Затенены те зоны, в которых находятся экспериментальные данные [8] с учетом расширения зон из-за различий в наблюдательных данных.

и плюсы со штриховыми линиями определяют угловую скорость вращения соответственно в северном и южном полушариях. Значения широт приведены возле упомянутых линий, причем включены и данные, относящиеся к широтам  $\pm 75^\circ$ . Нормировочная величина угловой скорости вращения равна экваториальной величине этой скорости в подножии конвективной зоны. Затенены те зоны, в которых находятся полученные в [4] гелиосейсмические данные с учетом факта значительного расширения зон на широтах  $\pm 60$  и  $\pm 75^\circ$  из-за существования отличающихся друг от друга результатов наблюдений.

Видно, что на высоких широтах появляются сильные вариации в величинах угловых скоростей для южного полушария, хотя какие-то усредненные зависимости теоретических угловых скоростей вращения от широты в какой-то мере имеют сходство с теми, которые вытекают из гелиосейсмических данных. Интерес представляет также тот факт, что расположение штриховых линий относительно сплошных кривых изменяется где-то между широтами  $\pm 30$  и  $\pm 45^\circ$ . Этот факт свидетельствует о возможном существовании линии совпадения штриховых и сплошных кривых, т.е. линии, на которой асимметрия вращения отсутствует. Кстати, упомянутые сплошные

и штриховые кривые пересекаются при  $r/R_{\odot} \sim 0.84$  и  $\sim 0.92$ . Если же речь идет об отсутствии асимметрии вращения по всей глубине конвективной зоны, то широта будет приблизительно равна  $\pm 41^{\circ}$ . Последняя величина близка к той (равной, согласно [5],  $\pm 42^{\circ}$ ), которая соответствует нулевой скорости наблюдаемых на Солнце крутильных волн.

Таким образом, гипотеза, что благодаря возбуждению крутильных волн происходит сглаживание некоторых приведенных на рисунке резких вариаций скорости вращения, представляется довольно правдоподобной. Здесь мы имеем в виду тот факт, что формирование какой-то пространственной неоднородности может сопровождаться ее смещением в другие слои, в результате чего в реальных условиях упомянутое формирование неоднородности не успевает происходить. Обсуждаемый эффект может быть причиной отсутствия в наблюдениях таких резких скачкообразных структур, как те, которые имеют место на рисунке при  $r/R_{\odot} \approx 0.77$  и  $\approx 0.90$ .

Особый интерес представляет вопрос о вращении околополюсных слоев, поскольку в этом случае важную роль играет параметр  $v_p$ , определяющийся формулой (18). Как вытекает из наших расчетов, значения  $v_p$  на разных глубинах отличаются друг от друга (они находятся в диапазоне от 0.72 до 0.87). Такое существенное различие в значениях  $v_p$  позволяет из двух обсуждавшихся в разделе 1 возможностей выбрать ту, которая связана с формированием околополюсов (например, вследствие истечения вещества) малых околополюсных зон невращающейся среды. Факт довольно сильно уменьшения скорости вращения на широтах выше  $70^{\circ}$  был обнаружен в работах [7,8].

Можно ожидать, что формирование обсуждаемого медленного вращения околополюсных зон будет способствовать снижению в этих слоях эффективности вышеупомянутого механизма сглаживания неоднородностей вращения благодаря возбуждению крутильных волн. В связи с этим интерес представляют гелиосейсмические данные работы [8] о присутствии на Солнце на широтах около  $75^{\circ}$  подповерхностной полярной струи, вращающейся быстрее окружающей среды. Максимум скорости вращения находится при  $r/R_{\odot} \approx 0.95$ . На приведенном нами рисунке подобное образование в случае южного полушария также присутствует, хотя зона высокой скорости вращения несколько более широкая (от  $r/R_{\odot} \approx 0.95$  до  $\approx 0.97$ ). Кроме того, подобная зона с повышенной скоростью вращения имеет место на рисунке также на широте  $-60^{\circ}$ , что не совпадает с данными [8]. В этом слое с более высокой плотностью среды возможно начинает проявляться вышеупомянутый эффект сглаживания неоднородностей благодаря возбуждению крутильных волн.

Заметим еще, что в случае рассматриваемой модели величина коэффициентов  $u_3$  в формуле (1) зависит от глубины и находится в пределах от  $-0.025$  до  $-0.055$ , тогда как коэффициенты  $u_4$  и  $u_5$  по абсолютной величине сравнимы или заметно меньше первой из двух

приведенных величин. Кроме того, на рисунке возможна одновременная замена на каких-то участках сплошных линий штриховыми и штриховых сплошными. Некоторые другие выводы рассматриваются в следующем разделе.

### 3. Обсуждение

Принято считать, что наблюдаемое сложное дифференциальное вращение Солнца формируется под действием турбулентных вязких сил, генерирующихся в конвективной зоне. Однако приведенные нами расчеты свидетельствуют о существовании простых соотношений (не связанных с вязкими силами), которые определяют распределение стационарного вращения атмосфер. Как оказывается, в рассматриваемом приближении симметричное относительно экваториальной плоскости вращение реализуется только при выполнении некоторых довольно жестких условий, обсуждавшихся в разделе 1. В случае солнечной конвективной зоны несимметричная относительно экватора компонента скорости вращения вероятно присутствует, причем для получения сравнительно близкого к наблюдаемому вращения необходимо проведение соответствующей процедуры минимизации асимметрии вращения. Тот факт, что обработка наблюдательных данных в предположении симметрии вращения относительно экватора иногда приводит к противоречащим друг другу результатам [4], также может свидетельствовать в пользу присутствия асимметрии солнечного вращения.

Полученная нами модель с минимальной величиной асимметрии вращения характеризуется довольно сильными пространственными вариациями скорости вращения, хотя при усреднении можно получить в какой-то мере близкое к наблюдаемому вращение среды. Важен также факт практического совпадения широт, на которых исчезают как асимметрия вращения, так и наблюдаемые на Солнце крутильные волны. В связи с этим гипотеза, что многие полученные в теоретических расчетах неоднородности скорости вращения сглаживаются благодаря возбуждению крутильных волн, представляется заслуживающей внимания.

Доводы в пользу медленного вращения околополюсных слоев рассматривались в разделах 1 и 2. Если такой эффект реализуется, то, по всей вероятности, здесь будет менее эффективным обсуждаемое сглаживание тех неоднородностей вращения, которые приведены на рисунке. Тогда будет возможным сравнение теории с наблюдениями. В случае обнаруженной в [8] быстро вращающейся подповерхностной струи на широте  $75^{\circ}$  теоретические характеристики довольно близки к наблюдаемым. Важно однако подчеркнуть, что теория предсказывает существование струи только в одном полушарии. Конечно, вопрос об эффективности упомянутого сглаживания еще нуждается в дальнейшем изучении.

Представляет интерес вопрос об изменении диссипации в процессе перехода к модели с минимальной величиной асимметрии вращения. Основное уравнение уже рассматривалось в работах [9,3]. Фактически речь идет об оценке величины  $d$ , равной разности между инерционной силой  $[\partial v_\phi / \partial t] / (\Omega_0)^2 / r$  и соответствующей безразмерной радиальной составляющей турбулентной вязкой силы. В наших обозначениях упомянутая величина  $d$  является мнимой. При удовлетворении условия равновесия и в отсутствие вязкой силы эта величина будет равна нулю.

Важно, что для регуляризации конвективного теплопереноса, т.е. для осуществления радиального перемещения конвективных элементов, в конвективной зоне должно присутствовать осесимметричное тороидальное магнитное поле, величина которого в случае подножия солнечной конвективной зоны составляет 110 kGs [10]. В других слоях магнитное поле изменяется пропорционально корню квадратному от равновесной плотности. Как оказывается, условие минимума  $d$  удовлетворяется, если намагниченной является лишь та нижняя часть солнечной конвективной зоны, в которой  $r/R_\odot < 0.81$ .

Наши расчеты показывают, что обычно очень большой является абсолютная величина  $d$  в случае модели с сильной асимметрией вращения относительно экваториальной плоскости. Например,  $d$  может меняться от  $-1000i$  до  $+1000i$  при небольшом изменении глубины конвективной зоны. В случае рассмотренной на рисунке минимизированной модели  $d = -4.4i$ , т.е. эта модель довольно близка к равновесной. Существует модель с нулевым значением  $d$ , но она характеризуется несколько более высокой асимметрией вращения относительно экватора. По-видимому, определение величины диссипации необходимо проводить с учетом того вклада в диссипацию, который вносится упомянутыми выше крутильными волнами.

## Список литературы

- [1] *Elliott J.R., Miesch M.S., Toomre J.* // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 533. P. 546–556.
- [2] *Brun A.S., Toomre J.* // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 570. P. 865–885.
- [3] *Вандакуров Ю.В.* // Письма в Астрон. журн. 2002. Т. 28. № 8. С. 633–640. *Vandakurov Yu.V.* // *Astronomy Lett.* 2002. Vol. 28. N 8. P. 560–567.
- [4] *Schou J., Howe R., Basu S., Christensen-Dalsgaard J., Corbard T., Hill F., Komm R., Larsen R.M., Rabello-Soares M.C., Thompson M.J.* // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 567. P. 1234–1249.
- [5] *Vorontsov S.V., Christensen-Dalsgaard J., Schou J., Strakhov V.N., Thompson M.J.* // *Science.* 2002. Vol. 296. P. 101–103.
- [6] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. *Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Khersonskii V.K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1988.
- [7] *Birch A.C., Kosovichev A.G.* // *Astrophys. J. Lett.* 1998. Vol. 503. P. 187–190.
- [8] *Schou J. et al.* // *Astrophys. J.* 1998. Vol. 505. P. 390–417.
- [9] *Вандакуров Ю.В.* // Астрон. журн. 1999. Т. 76. № 1. С. 29–44. *Vandakurov Yu.V.* *Astronomy Reports.* 1999. Vol. 43. N 1. P. 24–37.
- [10] *Вандакуров Ю.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 23–27 (*Vandakurov Yu.V.* // *Technical Phys.* 2003. Vol. 48. N 3. P. 298–302).