01;05

Термоэлектрические явления на границе раздела кристаллитов

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: latyshev@comail.ru, yushkanov@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 24 февраля 2004 г.)

Получены аналитические выражения для скачка температуры и разности потенциалов электрического поля при прохождении электрического поля через границу раздела кристаллитов. Считаются заданными величина потока электронов (тока) и величина потока тепла, индуцированная первым потоком. Используются кинетическое уравнение в τ-приближении для электронов и уравнение Максвелла для электрического поля. Исследована зависимость коэффициентов скачка температуры и разности потенциалов как функций химического потенциала.

Введение

Термоэлектрические явления на границе раздела между различными металлами являются объектом пристального внимания в течение длительного времени [1,2]. Это связано прежде всего с тем, что такие классические термоэлектрические явления, как эффекты Пельтье и Томсона, находят широкое применение в приложениях. Кроме того, они вызывают большой чисто научный интерес. Отметим, что эти классические термоэлектрические явления имеют место только при контакте различных металлов.

Однако наряду с классическими термоэлектрическими явлениями возможны и другие термоэлектрические явления, которые могут иметь место даже при контакте двух идентичных образцов металла. К таким явлениям относятся скачок температуры и разности потенциалов, возникающие на границе раздела металлов при протекании через границу раздела тока и потока тепла. Эти явления возникают как при контакте различных металлов, так и при контакте идентичных металлов. Последний случай соответствует границе кристаллитов в поликристаллическом образце металла. В данной работе будет рассмотрен именно этот случай.

Для металлов, большинство из которых имеет поликристаллическую структуру, существенное значение имеет оценка величины скачка температуры и разности потенциалов при прохождении тока через границу раздела кристаллитов.

Будем считать, что направление тока перпендикулярно границе раздела, а заданными будем считать величины электрического тока и соответствующего потока тепла. Возьмем для описания поведения электронов кинетическое уравнение в τ-приближении и уравнение Максвелла для описания поведения электрического поля. Модифицируя и применяя развитый в [3,4] метод, находим точное решение данной системы уравнений, а также величины скачка температуры и разности потенциалов как линейные функции величины электрического тока и потока тепла. Коэффициентами при последних величинах являются функции, зависящие от химического потенциала.

Предположим, что поверхность Ферми для рассматриваемого металла является сферической, а граница раздела перпендикулярна направлению электрического поля. Будем считать величину электрического поля достаточно малой для того, чтобы было применимо линейное приближение [1,2].

Направим ось x перпендикулярно поверхности, начало координат возьмем на границе раздела кристаллитов. Пусть в металле имеется поток тепла вдоль оси x. Тогда на расстояниях, существенно превышающих λ — длину свободного пробега электронов, потоку тепла отвечает постоянный градиент температуры $G_T = dT/dx$ (возможной анизотрпией металла пренебрегаем). Будем считать, что граниент температуры достаточно мал — относительный перепад на длине λ много меньше единицы.

Слой порядка λ, примыкающий к границе раздела, будем называть слоем Кнудсена, как это принято в кинетике. Вне слоя Кнудсена профиль температуры имеет вид $T = T_{0+} + G_T x$, при $x > 0$ $T = T_{0-} + G_T x$, при $x < 0$. Скачком температуры будем называть величину $\Delta T = T_{0-} - T_{0+}$. При этом ввиду линейности задачи $\Delta T = C_T \lambda G_T$, где C_T — коэффициент, не зависящий от G_T, назовем коэффициентом скачка температуры. Иногда удобнее иметь дело с безразмерной величиной — относительным скачком температуры $\varepsilon_T = \Delta T/T_s$, где T_s — температура поверхности. Тогда $\varepsilon_T = C_T \lambda g_T$, где $g_T = G_T/T_s$ — относительный градиент температуры.

Аналогично при наличии перпендикулярного к поверхности электрического поля профиль потенциала U в металле будет иметь вид $U = U_{0+} - E_0 x$ при $x > 0$, $U = U_{0-} - E_0 x$ при $x < 0$. Здесь E_0 — напряженность поля вдали от поверхности раздела. Вблизи поверхности раздела поле перестает быть постоянным и профиль потенциала становится нелинейным. Скачком потенциала будем называть величину $\Delta U = U_{0-} - U_{0+}$. И в данном случае ввиду линейности задачи мы можем записать $\Delta U = C_U \lambda G_T$, где C_U — коэффициент скачка потенциала.

В общем случае процессы переноса тепла в металле сопровождаются возникновением электрического поля.

Поэтому наряду с задачей о распределении температуры вблизи поверхности металла возникает и задача о поведении электрического поля в слое Кнудсена, генерируемого тепловыми процессами.

Целью данной работы являются вычисленные на основе аналитического решения кинетического уравнения для электронов скачка температуры в металле, нахождение разности потенциалов электрического поля вблизи поверхности и построение профиля электрического поля.

В работе рассматривается общий случай произвольной степени вырождения электронного газа. Поэтому полученные результаты справедливы в широком диапазоне температур и для широкого класса материалов, включая полуметаллы.

Кинетическое уравнение и постановка задачи

В кинетике металлов часто используется кинетическое уравнение для электронов в τ-приближении [1,2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\tau}\,(f_F^0 - f). \qquad (1)$$

Здесь f — функция распределения электронов, e_0 — заряд электрона, $\mathbf{p}$ — импульс электрона, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{v}$ — скорость электронов, τ — время релаксации электронов, f_F^0 — фермиевской функции распределения. При конечной температуре в уравнении (1) в качестве равновесной функции распределения электронов вместо f_F^0, соответствующей нулевой температуре, должна стоять фермиевская функция распределения f_F^* с некоторой эффективной температурой T_* и эффективным химическим потенциалом μ_*. При этом уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{v}{\lambda}\,(f_F^* - f). \qquad (2)$$

Здесь f_F^* — функция распределения Ферми (фермиан), $f_F^* = f_F(\mu_*, T_*)$,

$$f_F(\mu_*, T_*) = \left[\exp\left(\frac{mv^2}{2kT_*} - \frac{\mu_*}{kT_*}\right) + 1\right]^{-1},$$

k — постоянная Больцмана, m — эффективная масса электрона. Детали уравнения (2) обсуждаются в [3].

Для большинства металлов в переносе тепла доминирует вклад электронной подсистемы [5]. Будем рассматривать именно этот случай и пренебрежем вкладом фононов в перенос тепла. Будем считать, что массовая скорость электронного газа много меньше скорости электронов, а возникающие характерные перепады температуры на длине λ малы по сравнению с температурой электронного газа. В этих предположениях возможна линеаризация задачи.

Введем обозначения:

$$\mathbf{c} = \sqrt{\beta_s}\,\mathbf{v}, \quad \beta_s = \frac{m}{2kT_s}, \quad \alpha = \frac{\mu_s}{kT_s}, \quad \varepsilon_* = \frac{mv^2}{2kT_*} - \frac{\mu_*}{kT_*}.$$

Введем безразмерное время $t_* = \sqrt{T_s/\beta_s}\,t/\lambda$ и координату $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}/\lambda$. При этом $g_{T_*} = \lambda g_T$. Проведем линеаризацию уравнения (2). Применяя законы сохранения числа частиц и энергии, получаем [3] следующее уравнение (звездочки у переменных и градиента в дальнейшем будем опускать):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{c}{2\pi}\int k(c, c')\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}')\,d\Omega(\alpha). \qquad (3)$$

Здесь функция φ связана с функцией распределения f соотношениями $f = f_F^s + g\varphi$, $f_F^s = f_F(\mu_s, T_s)$,

$$k(c, c') = 1 + \frac{g_1^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\left(c^2 - \frac{g_3(\alpha)}{g_1(\alpha)}\right)\left(c'^2 - \frac{g_3(\alpha)}{g_1(\alpha)}\right),$$

$$g(c) = g(c, \alpha) = \frac{\exp(c^2 - \alpha)}{[1 + \exp(c^2 - \alpha)]^2},$$

$$d\Omega(\alpha) = \frac{g(c', \alpha)c'}{g_1(\alpha)}\,d^3c',$$

$$g_3(\alpha) = 2\int_0^\infty g(c, \alpha)c^5 dc = 4\int_0^\infty c\ln\bigl[1 + \exp(\alpha - c^2)\bigr]cd,$$

$$g_1(\alpha) = 2\int_0^\infty g(c, \alpha)c^3 dc = \ln\bigl(1 + \exp(\alpha)\bigr),$$

$$g_5(\alpha) = 2\int_0^\infty g(c, \alpha)c^7 dc = 12\int_0^\infty c^3\ln\bigl[1 + \exp(\alpha - c^2)\bigr]dc,$$

$$\Delta(\alpha) = g_1(\alpha)g_5(\alpha) - g_3^2(\alpha), \qquad \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{e_0\lambda}{kT_s}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Предположим, что электроны отражаются от границы раздела чисто диффузно. Система уравнений, описывающих задачу, состоит из уравнения (3) и уравнения для электрического поля. Запишем их в безразмерном виде

$$\mu\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu, c) - \mu e(x)$$
$$= \frac{1}{g_1(\alpha)}\int_{-1}^{1}\int_0^\infty k(c, c')\varphi(x, \mu', c')g(c')c'^3 d\mu' dc', \qquad (4)$$

$$e'(x) = a_0^2\int_{-1}^{1}\int_0^\infty \varphi(x, \mu, c)g(c)c^2 d\mu\, dc,$$

$$a_0^2 = \frac{e_0^2 m^2\lambda^2}{\pi^2\varepsilon_0\hbar^3\sqrt{\beta_s}}, \qquad \mu = \frac{c_x}{c}, \qquad (5)$$

ε_0 — электрическая постоянная.

Граничные условия и условия в объеме металла при $x > 0$ имеют вид

$$\varphi(+0,\mu,c) \equiv \varphi_0(\mu,c) = A_0, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\varphi(x,\mu,c) = \varphi_{\rm as}^{+}(x,\mu,c) + o(1), \quad x \to +\infty,$$

$$e(\infty) = e_{\rm as}.$$

Соответственно при $x < 0$ имеем

$$\varphi(-0,\mu,c) = -A_0, \quad -1 < \mu < 0,$$

$$\varphi(x,\mu,c) = \varphi_{\rm as}^{-}(x,\mu,c) + o(1), \quad x \to -\infty,$$

$$e(-\infty) = e_{\rm as}.$$

Здесь

$$\varphi_{\rm as}^{+}(x,\mu,c) = e_{\rm as}\mu + \left[\varepsilon_T^{+} + g_T(x-\mu)\right]\left(c^2 - \frac{g_2(\alpha)}{s(\alpha)}\right),$$

$$\varepsilon_T^{+} = \frac{T_{0+} - T_s}{T_s},$$

$$\varphi_{\rm as}^{-}(x,\mu,c) = e_{\rm as}\mu + \left[-\varepsilon_T^{+} + g_T(x-\mu)\right]\left(c^2 - \frac{g_2(\alpha)}{s(\alpha)}\right),$$

$$g_2(\alpha) = 2\int\limits_0^\infty g(c,\alpha)c^2dc = \frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \ln\left[1+\exp(\alpha-c^2)\right]dc,$$

$$g_0(\alpha) = 2\int\limits_0^\infty g(c,\alpha)c^2dc = \int\limits_0^\infty \frac{\exp(\alpha-c^2)}{1+\exp(\alpha-c^2)}\,dc.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ввиду симметрии задачи $(T_{0+} - T_s)/T_s = -(T_{0-} - T_s)/T_s$.

Баланс потоков электронов на поверхности

Пусть N_0 — поток электронов, падающий на границу раздела из левого полупространства,

$$N_0 = \int\limits_{c_x>0} \varphi(0,\mu,c)g(c)(\mu c)d^3c,$$

N_1 — поток электронов, проходящих через границу слева направо через границу раздела,

$$N_1 = \int\limits_{c_x>0} A_0\,g(c)(\mu c)d^3c = \frac{\pi}{2}\,g_1(\alpha)\,A_0,$$

N_2 — поток электронов, падающий на границу раздела из правовго полупространства,

$$N_2 = \int\limits_{c_x<0} \varphi(0,\mu,c)g(c)(\mu c)d^3c.$$

Составим уравнение баланса числовых потоков

$$N_1 = pN_0 - (1-p)N_2,$$

где p — вероятность рассеяния электронов вперед, $Q_0 = Q_2$.

С учетом последенго равенства имеем $N_1 = 2(p-1/2)N_2$. Следовательно,

$$A_0 = \frac{(4p-2)}{\pi g_1(\alpha)}\int\limits_{c_x<0} \varphi(0,\mu,c)g(c)\mu c d^3c$$

или

$$A_0 = \frac{8p-4}{g_1(\alpha)}\int\limits_{-1}^{0} \mu\,d\mu \int\limits_0^\infty \varphi(0,\mu,c)g(c)c^3dc.$$

Для случая изотропного рассеяния, когда $p = 0.5$, имеем $A_0 = 0$. Выражение для A_0 представим в виде

$$A_0 = \frac{8p-4}{g_1(\alpha)}\left[\int\limits_{-1}^{1} \mu\,d\mu \int\limits_0^\infty \varphi(0,\mu,c)g(c)c^3dc - A_0\int\limits_0^1 \mu\,d\mu \int\limits_0^\infty g(c)c^3dc\right].$$

Отсюда получаем

$$A_0 = \frac{8p-4}{g_1(\alpha)}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^\infty \varphi(0,\mu,c)\mu c^3 g(c)dc - (2p-1)A_0.$$

Интегральное слагаемое в этом равенстве есть полный поток числа электронов. Эта величина постоянна в силу закона сохранения числа электронов (заряда). Поэтому функцию $\varphi(0,\mu,c)$ заменим на $\varphi_{\rm as}(0,\mu,c)$ и, вычисляя

$$A_0 = \frac{4p-2}{pg_1(\alpha)} \times \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^\infty \left[e_{\rm es}\mu + (\varepsilon_T - g_T\mu)\left(c^2 - \frac{g_2(\alpha)}{g_0(\alpha)}\right)\right]g(c)\mu c^3 d\mu\,dc,$$

получаем

$$A_0 = \frac{4p-2}{3p}\left(e_{\rm as} + h_0(\alpha)g_T\right),$$

где

$$h_0(\alpha) = \frac{\Delta_0(\alpha)}{g_0(\alpha)g_1(\alpha)}, \quad \Delta_0(\alpha) = g_2(\alpha)g_1(\alpha) - g_3(\alpha)g_0(\alpha).$$

Аналитическое решение задачи

Кинетическое уравнение и структура граничных условий позволяют при решении задачи ограничиться рассмотрением полупространства $x > 0$ (случай $x < 0$ рассматривается аналогично). При этом, согласно структуре функции $\varphi_{\rm as}$, ищем функцию φ в виде

$$\varphi(x,\mu,c) = h_1(x,\mu) + \left(c^2 - \frac{g_2(\alpha)}{g_0(\alpha)}\right)h_2(x,\mu).$$

Получим следующие задачи: для функции $h_1(x,\mu)$

$$\mu\frac{\partial h_1}{\partial x}+h_1(x,\mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}h_1(x,\mu')d\mu'+\mu e(x),$$

$$h_1(0,\mu)=A_0,\quad 0<\mu<1,$$

$$h_1(x,\mu)=e_{\text{as}}\mu+o(1),\quad x\to+\infty,\quad -1<\mu<0;$$

для функции $h_2(x,\mu)$

$$\mu\frac{\partial h_2}{\partial x}+h_2(x,\mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}h_2(x,\mu')d\mu',$$

$$h_2(0,\mu)=0,\quad 0<\mu<1,$$

$$h_2(x,\mu)=\varepsilon_T^{+}+G_T(x-\mu)+o(1),$$

$$x\to+\infty,\quad -1<\mu<0.$$

Для электрического поля при этом получаем

$$e'(x)=a^2\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}h_1(x,\mu)d\mu,\ \ e(\infty)=e_{\text{as}},\ \ a=a_0\sqrt{g_0(\alpha)}.$$

Рассмотрим задачу о температурном скачке — задача для функции $h_2(x,\mu)$. Эта задача решена в [3]. Величина температурного скачка находится по формуле

$$\Delta T^{+}=T_{0+}-T_s=V_1G_T,\quad V_1=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\zeta(\tau)d\tau=0.71045,$$

$$\zeta(\tau)=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\pi\tau}+\frac{1}{\pi}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\right).$$

С обеих сторон от границы раздела кристаллитов величина скачка температуры совпадает $\Delta T^{-}=T_{0-}-T_s=-\Delta T^{+}$. Поэтому полный скачок температуры на границе раздела кристаллитов удваивается. Отсюда имеем

$$\Delta T=\Delta T^{-}-\Delta T^{+}=-2V_1G_T. \tag{7}$$

Согласно [3,4], функция $h_1(x,\mu)$, $e(x)$ ищутся в виде разложений

$$h_1(x,\mu)=e_{\text{as}}\mu+A_1\exp(-ax)+\int\limits_0^1\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)F(\eta,\mu)n(\eta)d\eta, \tag{8}$$

$$e(x)=e_{\text{as}}-aA_1\exp(-ax)-\frac{a^2}{2}\int\limits_0^1\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)n(\eta)\,d\eta. \tag{9}$$

Здесь A_1 — неизвестная постоянная, $n(\eta)$ — неизвестная функция,

$$F(\eta,\mu)=\frac{a^2}{2}\eta+\frac{1-a^2\eta^2}{\eta}\left[\frac{\eta}{2}P\frac{1}{\eta-\mu}+\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)\right],$$

символ Px^{-1} означает главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака,

$$\lambda(z)=1+\frac{z}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

$\lambda(z)$ — дисперсионная функция Кейза [6].

Подстановкой разложений (8), (9) в соответствующие граничные условия приводит к уравнениям

$$A_0=e_{\text{as}}\mu+A_1+A_2+\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-a^2\eta^2)\frac{n(\eta)d\eta}{\eta-\mu}+(1-a^2\mu^2)\frac{\lambda(\mu)}{\mu}=0,$$

$$0<\mu<1,\quad A_2=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^1\eta n(\eta)d\eta \tag{10}$$

и

$$e_{\text{as}}-e(0)-aA_1-\frac{a^2}{2}\int\limits_0^1 n(\eta)d\eta=0. \tag{11}$$

Из решения уравнения (10) находим

$$A_1=A_0-A_2-e_{\text{as}}V_1,$$

$$(1-a^2\eta^2)n(\eta)=\frac{e_{\text{as}}}{\pi i}\left[\frac{1}{X^{+}(\eta)}-\frac{1}{X^{-}(\eta)}\right]=-\frac{2e_{\text{as}}}{\pi}\,\frac{\sin\zeta(\eta)}{X(\eta)},$$

$$aA_1=-e(0)+\frac{a}{2}e_{\text{as}}\left[\frac{\cos\zeta(1/a)}{X(1/a)}-\frac{1}{X(-1/a)}\right],$$

$$A_2=-e_{\text{as}}\left[V_1+\frac{\cos\zeta(1/a)}{2X(1/a)}+\frac{1}{2X(-1/a)}\right], \tag{12}$$

где

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp V(z),\quad V(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\zeta(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

Подставляя найденные значения A_0, A_1, A_2 в (12), находим значение электрического поля на границе раздела кристаллитов

$$e(0)=-\frac{a(4p-2)}{3p}\left(e_{\text{as}}+h_0(\alpha)g_T\right)-\frac{ae_{\text{as}}}{X(-1/a)}. \tag{13}$$

Скачок потенциала и температуры, ток и поток тепла

Величину скачка потенциала найдем согласно его определению по формуле

$$\Delta U=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e(x)-e_{\text{as}}\right]dx=2\int\limits_0^{\infty}\left[e(x)-e_{\text{as}}\right]dx$$

$$=-2A_1-a^2\int\limits_0^1\eta\,n(\eta)d\eta=-2(A_1+A_2)$$

или, согласно (12)

$$\Delta U = -2(A_0 - V_1 e_{as}) = -e_{as}\left(\frac{8p-4}{3p} - 2V_1\right) - \frac{8p-4}{3p}\, h_0(\alpha)\, g_T. \quad (14)$$

Плотность тока j через функцию распределения вычисляется по формуле

$$j = 2e_0\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 \int v_x\, \varphi(x, \mathbf{v}, t)\, d^3v$$

или, переходя к безразмерным переменным и заменяя φ на φ_{as}, имеем ($e_0 < 0$)

$$j = -\frac{1}{\delta_j}\left[g_1(\alpha)e_{as} + h_0(\alpha)g_1(\alpha)g_T\right],$$

$$\delta_j = -\frac{24\pi^2\hbar^3 T_s^2 k^2}{e_o m^5} > 0. \quad (15)$$

При этом величина

$$\sigma = -\frac{e_0\lambda}{kT_s\delta_j}\, g_1(\alpha) > 0$$

равна электрической проводимости металла.

Тепловой поток в металле вычислим через функцию f по формуле

$$Q = 2\int \frac{mv^2}{2}\, v_x f\, \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

откуда, переходя к безразмерным переменным и используя связь $f = f_F^s + \varphi g$, получаем

$$Q = \frac{1}{\delta_Q}\left[g_3(\alpha)e_{as} + g_3(\alpha)h_1(\alpha)g_T\right], \quad \delta_Q = \frac{\pi^2\hbar^3}{mk^3T_s^3}, \quad (16)$$

где

$$h_1(\alpha) = \frac{\Delta_1(\alpha)}{g_3(\alpha)g_0(\alpha)}, \quad \Delta_1(\alpha) = g_2(\alpha)g_3(\alpha) - g_0(\alpha)g_5(\alpha).$$

При этом величина

$$\chi = -\frac{\lambda}{T_s\delta_Q}\,\frac{D_1(\alpha)}{g_0(\alpha)} > 0$$

— теплопроводность металла.

Выразим скачок температуры и потенциала как функции силы тока и потока тепла. Из уравнений (15) и (16) находим

$$g_T = -\frac{1}{\Delta(\alpha)}\left[j\delta_i g_3(\alpha) + Q\delta_Q g_1(\alpha)\right],$$

$$e_{as} = \frac{1}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)}\left[j\delta_i\Delta_1(\alpha) + Q\delta_Q\Delta_0(\alpha)\right].$$

Теперь из уравнений (7) и (14) с помощью (17), (18) найдем величину скачка температуры (в размерном виде)

$$\Delta T = \frac{2V_1T_s}{\Delta(\alpha)}\left[j\delta_j g_3(\alpha) + Q\delta_Q g_1(\alpha)\right]$$

и величину скачка потенциала

$$\Delta U = j\delta_j\left[\frac{8p-4}{3pg_1(\alpha)} + 2V_1\,\frac{\Delta_1(\alpha)}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)}\right] + Q\delta_Q\,\frac{2V_1\Delta_0(\alpha)}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)}.$$

Перейдем к размерному скачку потенциала

$$\Delta U = 2\int_0^\infty \left(E(x) - E_{as}\right)dx,$$

где $x = \lambda x'$ — размерная координата, x' — безразмерная.

Учитывая, что

$$E(x) = \frac{kT_s}{e_0\lambda}\, e(x),$$

для размерного скачка потенциала имеем

$$\Delta U = \frac{kT_s\delta_j}{\lambda e_0}\left[\frac{8p-4}{3pg_1(\alpha)} + 2V_1\,\frac{\Delta_1(\alpha)}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)}\right]j + \frac{kT_s\delta_Q}{\lambda e_0}\,\frac{2V_1\Delta_0(\alpha)}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)}\, Q.$$

Введем безразмерные кинетические коэффициенты (рис. 1–4)

$$C_T^j(\alpha) = -2V_1\,\frac{g_1(\alpha)g_3(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad C_T^Q(\alpha) = -2V_1\,\frac{g_1(\alpha)\Delta_1(\alpha)}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)},$$

$$C_U^j(\alpha, p) = -\left[\frac{8p-4}{3p} + 2V_1\,\frac{g_1(\alpha)\Delta_1(\alpha)}{g_0(\alpha)\Delta(\alpha)}\right],$$

$$C_U^Q(\alpha) = -2V_1\,\frac{\Delta_0(\alpha)\Delta_1(\alpha)}{g_0^2(\alpha)\Delta(\alpha)}.$$

С помощью введенных электрической проводимости и теплопроводности металла скачок температуры и потенциала представим в размерном виде

$$\Delta T = \frac{e_0\lambda}{\sigma k}\, C_T^j(\alpha) j + \frac{\lambda}{\varkappa}\, C_T^Q(\alpha) Q,$$

$$\Delta U = \frac{1}{\sigma}\, C_U^j(\alpha, p) j - \frac{k}{e_0\varkappa}\, C_U^Q(\alpha) Q. \quad (17)$$

Таким образом, поток тепла Q вызывает как скачок температуры, так и скачок потенциала, а ток вызывает

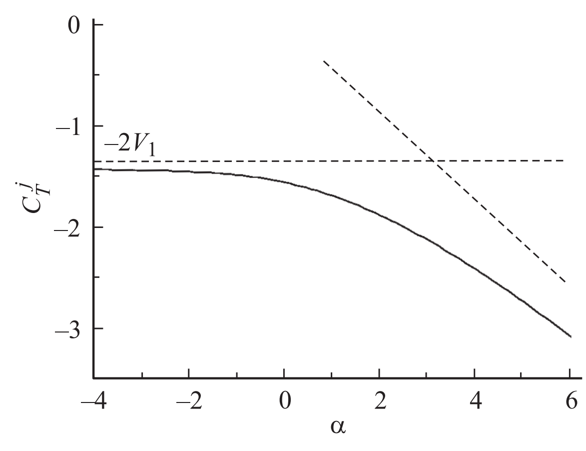

Рис. 1.

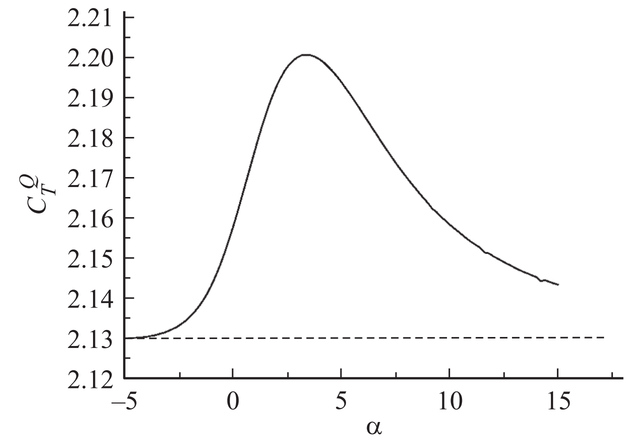

Рис. 2.

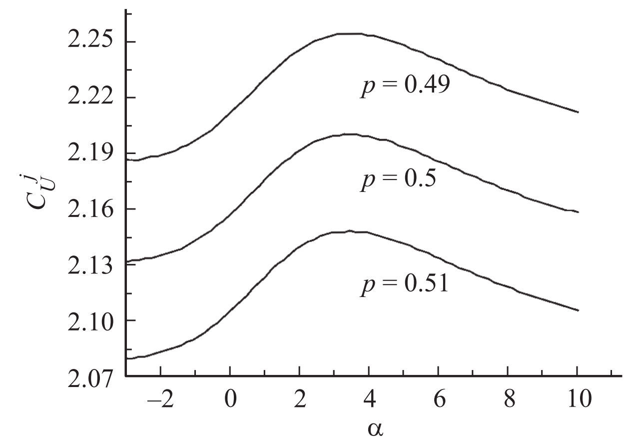

Рис. 3.

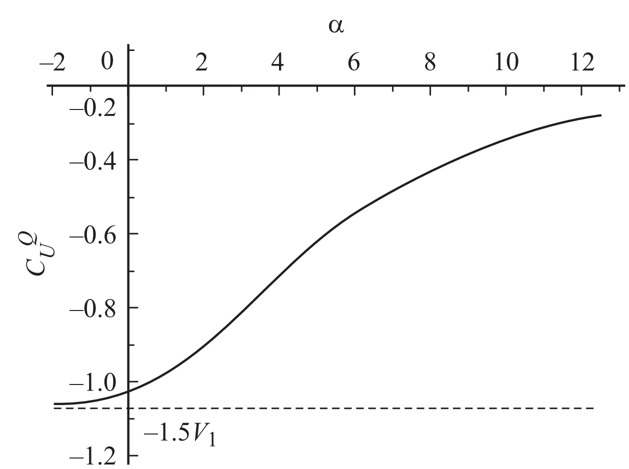

Рис. 4.

наряду со скачком потенциала и скачок температуры, т. е. имеют место перекрестные эффекты.

Из всех коэффициентов, выходящих в формулу (17), только коэффициент C_U^j зависит от вероятности рассеяния электронов вперед p.

Отметим, что величину $\rho_s = C_j^U/\sigma$ можно рассматривать как удельное (на единицу площади) электрическое сопротивление границы кристаллитов. Аналогично величину $\lambda C_Q^T/\varkappa$ можно рассматривать как удельное сопротивление границы кристаллитов. При этом величина ρ_s неограниченно возрастает по мере того, как вероятность рассеяния электронов вперед p стремится к нулю, так как в этом случае поверхность раздела становится непроницаемой для электронов.

Предельные случаи

Найдем асимптотику кинетических коэффициентов при $\alpha \to +\infty$ (вырожденная плазма) и при $\alpha \to -\infty$ (случай классической плазмы). Начнем со случая вырожденной плазмы. Воспользуемся формулой (58,1) из [7, с. 191]

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(x)dx}{\exp(x-\alpha)+1} = \int\limits_0^\alpha f(x)dx + \frac{\pi^2}{6} f'(\alpha) + \frac{7\pi^2}{360} f'''(\alpha) + \ldots, \quad \alpha \gg 1.$$

На основании этой формулы при $\alpha \to +\infty$ имеем

$$g_0(\alpha) = \alpha^{1/2} - \frac{\pi^2}{24}\alpha^{-3/2} + \ldots, \quad g_1(\alpha) = \alpha + \ldots,$$

$$g_2(\alpha) = \alpha^{3/2} + \frac{\pi^2}{8}\alpha^{-1/2} + \ldots, \quad g_3(\alpha) = \alpha^2 + \frac{\pi^2}{3} + \ldots,$$

$$g_4(\alpha) = \alpha^{5/2} + \frac{5\pi^2}{8}\alpha^{1/2} + \ldots, \quad g_5(\alpha) = \alpha^3 + \pi^2\alpha + \ldots.$$

Следовательно, при $\alpha \to +\infty$

$$\Delta_0(\alpha) = -\frac{\pi^2}{6}\alpha^{1/2} + \ldots, \quad \Delta_1(\alpha) = -\frac{\pi^2}{2}\alpha^{3/2} + \ldots,$$

$$\Delta(\alpha) = \frac{\pi^2}{3}\alpha^2 + \ldots.$$

Следовательно, асимптотика кинетических коэффициентов при $\alpha \to +\infty$ (вырожденная плазма) такова:

$$C_T^j(\alpha) = -\frac{6V_1}{\pi^2}\alpha + \ldots, \quad C_T^Q(\alpha) = 3V_1 + \ldots,$$

$$C_U^j(p,\alpha) = 3V_1 - \frac{8p-4}{3p} + \ldots, \quad C_Q^U(\alpha) = -\frac{V_1\pi^2}{\alpha} + \ldots.$$

Перейдем к случаю классического газа. В этом случае при $\alpha \to -\infty$ имеем

$$g_0(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\alpha, \quad g_1(\alpha) = \exp\alpha, \quad g_2(\alpha) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\exp\alpha,$$

$$g_3(\alpha) = 2\exp\alpha, \quad g_4(\alpha) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\exp\alpha, \quad g_5(\alpha) = 6\exp\alpha,$$

$$\Delta\alpha = 2\exp(2\alpha), \quad \Delta_0(\alpha) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\exp(2\alpha),$$

$$\Delta_1(\alpha) = -\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\exp(2\alpha).$$

На основании этих формул для кинетических коэффициентов при $\alpha \to -\infty$ (случай классической плазмы) имеем следующую асимптотику:

$$C_T^j(\alpha) = -2V_1 + \ldots, \quad C_T^Q(\alpha) = 3V_1 + \ldots,$$

$$C_U^j(p, \alpha) = 3V_1 - \frac{8p - 4}{3p} + \ldots,$$

$$C_U^Q(\alpha) = -\frac{3}{2} V_1 + \ldots.$$

На рис. 1–4 приведены графики зависимости коэффициентов C_T^j, C_T^Q, C_U^j, C_U^Q от величины α. Из рисунков видно, что коэффициенты C_T^Q и C_U^j достигают максимальных значений при $\alpha \approx 4$. Коэффициент C_U^j проявляет сильную зависимость от вероятности рассеяния электронов вперед p, что видно из рис. 3.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке (А.В. Латышева) (грант РФФИ № 03-01-00281).

Список литературы

[1] *Абрикосов А.А.* Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[3] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 37–45.
[4] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ФТТ. 2001. Т. 43. № 10. С. 1744–1750.
[5] *Жирифалько Л.* Статистическая физика твердого тела. М.: Мир, 1975. 384 с.
[6] *Кейз К, Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 584 с.