

01;03

О влиянии движения газа внутри заряженного пузырька в жидкости на параметры его осцилляций

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 23 марта 2004 г.)

В линейном приближении по амплитуде осцилляций поверхности заряженного пузырька в идеальной несжимаемой жидкости исследовано влияние конечности скорости выравнивания давления газа в пузырьке на его объемные и поверхностные осцилляции. Показано, что форма пузырька определяется суперпозицией сферических гармоник с амплитудами, сильно зависящими от амплитуд и частот гармоник, а также от физических свойств газа в пузырьке и окружающей его жидкости.

1. Исследование осцилляций и устойчивости заряженных парогазовых пузырьков в диэлектрической жидкости во внешних электрических полях представляет интерес в связи с многочисленными техническими технологическими приложениями (см., например, [1]). В этой связи такой пузырек неоднократно становился предметом внимания экспериментаторов [1–3] и теоретиков [4–14]. Теоретические исследования осцилляций пузырьков в диэлектрической жидкости, образовавшихся при электрическом [4] или лазерном [5] пробое, незаряженных пузырьков во внешних электрических [5–8] и магнитных [9] полях, заряженных пузырьков [10,11] в основном выполнялись для радиально осциллирующих сферических пузырьков. В [12] исследован распад вытянутого вдоль внешнего электрического поля сфероидального заряженного пузырька. Но до сих пор плохо исследованы поверхностные осцилляции формы пузырька, хотя именно они определяют закономерности реализации релей-тейлоровской неустойчивости стенки схлопывающегося пузырька и формирования кумулятивной струйки жидкости, вызывающей кавитационную эрозию [2,3,13], служат основанием для постановки вопроса о трансляционной неустойчивости осциллирующего пузырька [14,15], определяют закономерности распада заряженного пузырька [12,16]. В [16] проведено исследование как радиальных, так и поверхностных осцилляций заряженного пузырька в диэлектрической жидкости в приближении бесконечно большой скорости звука в газе, заполняющем пузырек (в приближении бесконечно большой скорости выравнивания давления газа при осцилляциях пузырька). Следует отметить, что такое приближение используется в подавляющем количестве работ, посвященных исследованию осцилляций пузырька; из перечисленных выше публикаций только в [9] принималась во внимание конечность скорости выравнивания давления газа в пузырьке. В то же время существует ряд ситуаций, в которых конечность скорости звука в газе может оказать заметное влияние на закономерности осцилляций пузырька. Исследованию объемных и поверхностных осцилляций заряженного пузырька при учете движения газа в нем и посвящено настоящее рассмотрение.

2. Пусть в идеальной несжимаемой безграничной жидкости плотности $\rho^{(e)}$, диэлектрической проницаемости ε_d , поддерживаемой при постоянном давлении $P_\infty^{(e)}$, в отсутствие поля сил тяжести образовался сферический пузырек равновесного радиуса r_0 , имеющий нескомпенсированный поверхностный заряд Q , содержащий в себе идеальный газ, давление которого P_{0g} при изменении объема изменяется по адиабатическому закону с показателем адиабаты γ . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела жидкость–газ обозначим σ .

Под действием суммарного давления на границу раздела пузырек способен совершать осцилляции в окрестности своих равновесных состояний

$$P(r) = \frac{\sigma}{r_0} \left\{ \frac{r_0}{\sigma} P_{0g} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3\gamma} + \frac{W}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - \frac{2r_0}{r} - P_\infty^{(e)} \right\};$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_d r_0^3 \sigma};$$

r — текущий радиус пузырька.

Если $P(r) > 0$, то пузырек расширяется, если $P(r) < 0$, то сжимается, при $P(r) = 0$ находится в равновесии. Из рис. 1, на котором приведена зависимость $P(r)$ в безразмерных переменных, в которых $r_0 = \sigma = \rho^{(e)} = 1$, видно, что уравнение $P(r) = 0$ может иметь различное количество корней: один, два или ни одного [11]. В частности, один корень имеет место при условии, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = -P_\infty^{(e)} \leq 0$, т.е. в условиях, когда давление окружающей жидкости положительно $P_\infty^{(e)} \geq 0$. Два корня имеют место, когда $\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = -P_\infty^{(e)} > 0$, а минимальное значение суммарного давления отрицательно $P_{\min} \equiv \min P(r) < 0$ и мало по величине. Точнее говоря, уравнение $P(r) = 0$ имеет два корня, когда давление окружающей жидкости немного меньше нуля $P_\infty^{(e)} < 0$ и справедливы соотношения $P(r_{\min}) < 0$ и $\partial_r P(r_{\min}) = 0$ (знак ∂_r означает производную по переменной r). Это состояние физически соответствует жидкости, находящейся в состоянии неразвитой кавитации. Ни одного корня в уравнении

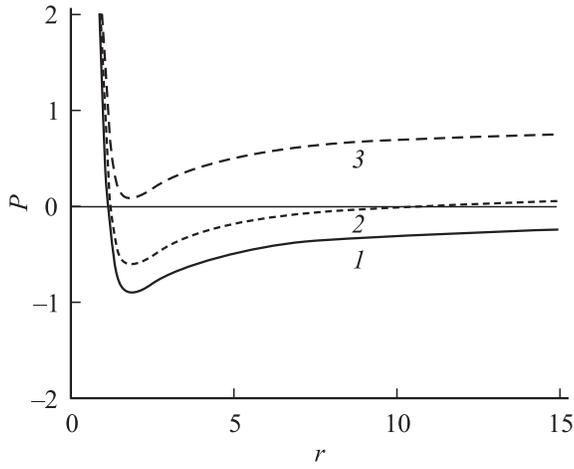


Рис. 1. Зависимость суммарного безразмерного давления на стенке пузырька P от безразмерного радиуса пузырька R при $P_{0g} = 2$, $W = 2$, $\gamma = 4/3$ и от различных значений $P_{\infty}^{(e)}$: 1 — 0,1, 2 — 0,2, 3 — 0,9.

$P(r) = 0$ не будет в условиях, когда $P_{\min} > 0$ (когда $P(r_{\min}) > 0$ и $\partial_r P(r_{\min}) = 0$). Физически это состояние отвечает жидкости в условиях развитой кавитации.

Рассмотрим поверхностные колебания пузырька, находящегося в одном из равновесных состояний, отвечающих условию $P(r_0) = 0$. Потенциал электрического поля в окрестности пузырька обозначим ϕ . Поля скоростей течения газа и жидкости обозначим $\mathbf{U}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{U}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ соответственно. Давление газа в пузырьке примем равным $P_0^{(i)}$, его плотность обозначим $\rho_0^{(i)}$, а скорость звука в газе — c_0 . Газ в пузырьке и окружающую жидкость будем считать баротропными с уравнениями состояния

$$\rho^{(i)} \equiv \rho^{(i)}(P^{(i)}) = \rho_0^{(i)} \left(\frac{P^{(i)}}{P_0^{(i)}} \right)^{1/\gamma}; \quad (1)$$

$$\rho^{(e)} = \text{const}, \quad (2)$$

где $\rho^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ и $P^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ — соответственно поля распределения плотности и давления газа в пузырьке.

Форму пузырька будем считать осесимметричной как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение осциллирующей границы раздела сред в любой момент времени t запишется в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - r_0 - R(t) - \xi(\vartheta, t) = 0. \quad (3)$$

Начальную деформацию формы поверхности пузырька $[R(t) + \xi(\vartheta, t)]_{t=0}$ примем такой, чтобы были выполнены соотношения

$$t = 0: \quad R = \varepsilon h_0 P_0(\mu); \quad \xi = \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu);$$

$$\mu = \cos(\vartheta), \quad (4)$$

где ε — амплитуда начального возмущения ($\varepsilon \ll R$); $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m ; Ω — множество

индексов изначально возбужденных мод поверхностных осцилляций; h_m — безразмерные константы, имеющие один порядок малости и учитывающие парциальный вклад m моды в формирование начальной формы поверхности пузырька, такие что $h_0 + \sum_{m \in \Omega} h_m = O(1)$.

Математическая формулировка задачи о расчете осцилляций пузырька в жидкости кроме соотношения (1)–(4) будет содержать уравнения Эйлера для газа и неразрывности для газа и жидкости

$$\partial_t \mathbf{U}^{(i)} + (\mathbf{U}^{(i)} \cdot \nabla) \mathbf{U}^{(i)} = -\frac{1}{\rho^{(i)}} \nabla P^{(i)};$$

$$\partial_t \mathbf{U}^{(e)} + (\mathbf{U}^{(e)} \cdot \nabla) \mathbf{U}^{(e)} = -\frac{1}{\rho^{(e)}} \nabla P^{(e)};$$

$$\frac{d\rho^{(i)}}{dt} + \rho^{(i)} \nabla \cdot \mathbf{U}^{(i)} = 0; \quad \frac{d\rho^{(e)}}{dt} + \rho^{(e)} \nabla \cdot \mathbf{U}^{(e)} = 0,$$

начальные условия для полей скоростей течения

$$t = 0: \quad \mathbf{U}^{(i)} = 0; \quad \mathbf{U}^{(e)} = 0,$$

уравнение Лапласа для потенциала электростатического поля

$$\Delta \phi = 0,$$

условий ограниченности

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U}^{(i)} \rightarrow 0; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \mathbf{U}^{(e)} \rightarrow 0; \quad \nabla \phi \rightarrow 0,$$

кинематическое и динамическое граничные условия

$$r = r_0 + R(t) + \xi(\vartheta, t): \quad \frac{dF}{dt} = 0;$$

$$P^{(i)} + P_q = P^{(e)} + P_\sigma,$$

условие неизменности величины полного заряда

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = r_0 + R(t) + \xi(\vartheta, t); 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

условие постоянства электрического потенциала вдоль поверхности пузырька

$$r = r_0 + R(t) + \xi(\vartheta, t): \quad \phi = \phi_S(t).$$

В выписанных выражениях P_q , P_σ — соответственно давления электрического поля и капиллярное; \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности пузырька; ϕ_S — электрический потенциал поверхности пузырька; знак ∂_t означает частную производную по переменной t .

3. В нижеследующем течении газа и жидкости будем считать потенциальным с потенциалами скоростей $\psi^{(i)}$ и $\psi^{(e)}$ соответственно. Подставляя $\mathbf{U}^{(e)} = \nabla \psi^{(e)}$ в уравнение Эйлера и уравнение неразрывности для внешней среды, а также в начальное условие и учитывая

уравнение состояния жидкости (2), получим распределение давления в жидкости и уравнение Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi^{(e)}$

$$P^{(e)} = P_\infty^{(e)} - \rho^{(e)} \left(\partial_t \psi^{(e)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi^{(e)})^2 \right); \quad \Delta \psi^{(e)} = 0.$$

Подставляя $\mathbf{U}^{(i)} = \nabla \psi^{(i)}$ в уравнение Эйлера для течения газа в пузырьке и интегрируя по объему пузырька, получим интеграл Коши

$$\partial_t \psi^{(i)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi^{(i)})^2 + \Pi^{(i)} = 0, \quad (5)$$

где $\Pi^{(i)}$ — функция, удовлетворяющая соотношению

$$d\Pi^{(i)} = \frac{1}{\rho^{(i)}} dP^{(i)}. \quad (6)$$

Подставляя выражение $\mathbf{U}^{(i)} = \nabla \psi^{(i)}$ в уравнение неразрывности для течения газа, учитывая (6) и соотношение $c^2 = dP^{(i)}/d\rho^{(i)}$, где c — скорость звука в газе, получим уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{d\Pi^{(i)}}{dt} + \Delta \psi^{(i)} = 0. \quad (7)$$

Выражая из (5) величину $\Pi^{(i)}$ и подставляя ее в (7), получим нелинейное уравнение для отыскания потенциала поля скоростей течения газа

$$\Delta \psi^{(i)} - \frac{1}{c^2} \partial_{t,t} \psi^{(i)} - \frac{2}{c^2} (\nabla \psi^{(i)}) (\nabla \partial_t \psi^{(i)}) - \frac{1}{2c^2} (\nabla \psi^{(i)}) (\nabla (\nabla \psi^{(i)})^2) = 0 \quad (8)$$

с начальным условием

$$t = 0: \quad \psi^{(i)} = 0. \quad (9)$$

Отметим, что нелинейное волновое уравнение (8) содержит частные производные второго порядка от потенциала газа по времени и поэтому одного начального условия (9) оказывается недостаточным для отыскания решения. Поэтому уравнение (8) дополним физически очевидным начальным условием

$$\partial_t \psi^{(i)} = 0. \quad (10)$$

Интегрируя (6) по объему пузырька с учетом уравнения состояния газа (1), найдем выражение для $\Pi^{(i)}$

$$\Pi^{(i)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P^{(i)}}{\rho^{(i)}} - \frac{P_0^{(i)}}{\rho_0^{(i)}} \right). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (5), учитывая (1), а также то обстоятельство, что $c_0^2 = \gamma P_0^{(i)}/\rho_0^{(i)}$, найдем распределение давления газа в пузырьке и скорость звука в нем

$$P^{(i)} = P_0^{(i)} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \left(\partial_t \psi^{(i)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi^{(i)})^2 \right) \right)^{\gamma/(\gamma-1)};$$

$$c^2 = c_0^2 - (\gamma - 1) \left(\partial_t \psi^{(i)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi^{(i)})^2 \right).$$

Решения выписанной нелинейной системы уравнений будем искать путем линеаризации в виде в разложений по малому параметру ε

$$R(t) = \varepsilon R^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2); \quad \xi(\vartheta, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\phi(r, \vartheta, t) = \varepsilon \phi(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi^{(i)}(r, \vartheta, t) = \varepsilon \psi^{(i)(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi^{(e)}(r, \vartheta, t) = \varepsilon \psi^{(e)(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2). \quad (12)$$

4. Подставляя разложения (12) в сформулированную задачу, выделим задачу нулевого порядка малости по ε

$$\Delta \phi^{(0)} = 0; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \phi^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad P^{(i)} + P_q = P^{(e)} + P_\sigma;$$

$$\int_{-1}^1 r_0^2 \partial_r \phi^{(0)} d(\cos \vartheta) = -2Q; \quad \phi^{(0)} = \phi_S^{(0)}(t.)$$

Решая эту систему, найдем

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{r_0}; \quad P_0^{(i)} + \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_d r_0^4} = \frac{2\sigma}{r_0} + P_\infty^{(e)}. \quad (13)$$

Соотношения (13) определяют значение равновесного радиуса пузырька r_0 .

5. Выделяя слагаемые, содержащие малый параметр в первой степени, получим задачу первого порядка малости, которая будет иметь вид

$$\Delta \phi^{(1)} = 0; \quad \Delta \psi^{(e)(1)} = 0; \quad \Delta \psi^{(i)(1)} - \frac{1}{c_0^2} \partial_{t,t} \psi^{(i)(1)} = 0;$$

$$t = 0: \quad \psi^{(i)(1)} = 0; \quad \partial_t \psi^{(i)(1)} = 0;$$

$$R^{(1)} = h_0 P_0(\mu); \quad \xi^{(1)} = \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu);$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi^{(i)(1)} \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \psi^{(e)(1)} \rightarrow 0; \quad \nabla \phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$r = r_0: \quad \phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t);$$

$$\partial_r \psi^{(i)(1)} = \partial_r \psi^{(e)(1)} = \partial_r R^{(1)} + \partial_r \xi^{(1)};$$

$$-\rho_0^{(i)} \partial_t \psi^{(i)(1)} + \frac{1}{4\pi \varepsilon_d} \partial_r \phi^{(0)} \left(\partial_r \phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \partial_{rr} \phi^{(0)} \right)$$

$$= -\rho^{(e)} \partial_t \psi^{(e)(1)} - \frac{2\sigma}{r_0^2} R^{(1)} - \frac{\sigma}{r_0^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)};$$

$$\int_{-1}^1 \left(r_0 \partial_r \phi^{(1)} + (R^{(1)} + \xi^{(1)}) \right)$$

$$\times \left(r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)} \right) d(\cos \vartheta) = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (14) линейна, поэтому для отыскания ее решения воспользуемся преобразованием Фурье F_+ по времени: от величин $\phi^{(1)}(r, \vartheta, t)$, $\psi^{(e)(1)}(r, \vartheta, t)$,

$\psi^{(i)(1)}(r, \vartheta, t)$, $R^{(1)}(t)$, $\xi^{(1)}(\vartheta, t)$ перейдем к их изображениям [17]

$$F_+(f) = \int_0^{+\infty} f e^{iSt} dt, \quad f = \phi^{(1)}, \quad f = \psi^{(e)(1)},$$

$$f = \psi^{(i)(1)}, \quad f = R^{(1)}, \quad f = \xi^{(1)},$$

после чего система (14) примет вид

$$\Delta F_+(\phi^{(1)}) = 0; \quad \Delta F_+(\psi^{(e)(1)}) = 0; \quad (15)$$

$$\Delta F_+(\psi^{(i)(1)}) + \frac{S^2}{c_0^2} F_+(\psi^{(i)(1)}) = 0; \quad (16)$$

$$r \rightarrow 0: \quad F_+(\psi^{(i)(1)}) \rightarrow 0; \quad (17)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad F_+(\psi^{(e)(1)}) \rightarrow 0; \quad \nabla F_+(\phi^{(1)}) \rightarrow 0; \quad (18)$$

$$r = r_0: \quad \partial_r F_+(\psi^{(i)(1)}) = \partial_r F_+(\psi^{(e)(1)}) = -iS F_+(R^{(1)}) - h_0 P_0(\mu) - iS F_+(\xi^{(1)}) - \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \rho_0^{(i)} iS F_+(\psi^{(i)(1)}) + \frac{1}{4\pi \varepsilon_d} \partial_r \phi^{(0)} (\partial_r F_+(\phi^{(1)})) \\ & + (F_+(R^{(1)}) + F_+(\xi^{(1)})) \partial_{rr} \phi^{(0)} \\ & = \rho^{(e)} iS F_+(\psi^{(e)(1)}) - \frac{2\sigma}{r_0^2} F_+(R^{(1)}) \\ & - \frac{\sigma}{r_0^2} (2 + \Delta_\Omega) F_+(\xi^{(1)}); \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (r_0 \partial_r F_+(\phi^{(1)}) + (F_+(R^{(1)}) + F_+(\xi^{(1)}))) \\ & \times (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)}) d(\cos \vartheta) = 0; \quad (21) \end{aligned}$$

$$F_+(\phi^{(1)}) + (F_+(R^{(1)}) + F_+(\xi^{(1)})) \partial_r \phi^{(0)} = F_+(\phi_s^{(1)}). \quad (22)$$

Для отыскания решения системы (15)–(22) образ Фурье отклонения поверхности от равновесной разложим по полиномам Лежандра

$$F_+(R^{(1)}) + F_+(\xi^{(1)}) = A_0^{(1)}(S) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)}(S) P_n(\mu).$$

Тогда решение уравнений (15), (16) с учетом условий ограниченности (17), (18) и условий (21), (22) можно записать в виде

$$F_+(\phi^{(1)}) = \frac{Q}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)}(S) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\mu);$$

$$F_+(\phi_s^{(1)}) = -\frac{Q}{r_0^2} A_0^{(1)}(S);$$

$$F_+(\psi^{(e)(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(e)(1)}(S) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\mu);$$

$$F_+(\psi^{(i)(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(i)(1)}(S) j_n\left(\frac{S}{c_0} r\right) P_n(\mu), \quad (23)$$

$C_n^{(i)(1)}$, $C_n^{(e)(1)}$ — константы; $j_n(Sr/c_0)$ — сферические функции Бесселя первого рода.

Подставляя выражения (23) в уравнения (19) и (20) и используя ортогональность полиномов Лежандра, получим

$$\begin{cases} C_0^{(i)(1)} \partial_{r_0} j_0\left(\frac{S}{c_0} r_0\right) = -C_0^{(e)(1)} \frac{1}{r_0^2} = iS A_0^{(1)} - h_0, \\ \rho_0^{(i)} iS C_0^{(i)(1)} j_0\left(\frac{S}{c_0} r_0\right) - \frac{\rho^{(e)}}{r_0} iS C_0^{(e)(1)} + \frac{2\sigma}{r_0^2} (1-W) A_0^{(1)} = 0; \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} C_n^{(i)(1)} \partial_{r_0} j_n\left(\frac{S}{c_0} r_0\right) = -C_n^{(e)(1)} + \frac{n+1}{r_0^{n+2}} = -iS A_n^{(1)} - h_n, \\ \rho_0^{(i)} iS C_n^{(i)(1)} j_n\left(\frac{S}{c_0} r_0\right) - \frac{\rho^{(e)}}{r_0^{n+1}} iS C_n^{(e)(1)} - \\ - \frac{\sigma}{r_0^2} (n-1)((n+2) - W) A_n^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Система уравнений (24) описывает радиальные колебания поверхности пузырька, а система (25) — поверхностные.

Из системы (24) с учетом соотношения $\partial_\chi j_n(\chi) = n j_n(\chi)/\chi - j_{n+1}(\chi)$ найдем выражения для $C_0^{(i)(1)}$, $C_0^{(e)(1)}$, $A_0^{(1)}$

$$A_0^{(1)}(S) = \frac{iS h_0}{D_0(S)} \left(\frac{\rho_0^{(i)} c_0}{\rho^{(e)} r_0 S} j_0(\chi) - j_1(\chi) \right); \quad (26)$$

$$C_0^{(i)(1)}(S) = -\frac{c_0 \alpha_0 h_0}{S D_0(S)}; \quad C_0^{(e)(1)}(S) = -\frac{r_0^2 \alpha_0 h_0}{D_0(S)} j_1 \chi;$$

$$D_0(S) = \frac{c_0 \rho_0^{(i)}}{r_0 \rho^{(e)}} S j_0(\chi) - (S^2 + \alpha_0) j_1(\chi);$$

$$\chi = \frac{S r_0}{c_0}, \quad \alpha_0 = \frac{2\sigma}{\rho^{(e)} r_0^3} (1-W). \quad (27)$$

Из системы (25) найдем $C_n^{(i)(1)}$, $C_n^{(e)(1)}$, $A_n^{(1)}$ для любого $n \geq 2$

$$A_n^{(1)}(S) = \frac{iS h_n}{D_n(S)} \left(\frac{c_0}{S r_0} \left(\frac{r_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} (n+1) + n \right) j_n(\chi) - j_{n+1}(\chi) \right); \quad (28)$$

$$C_n^{(i)(1)}(S) = \frac{c_0}{S D_n(S)} \omega_n^2 h_n;$$

$$C_n^{(e)(1)}(S) = -\frac{r_0^{n+2} \omega_n^2 h_n}{(n+1) D_n(S)} \left(\frac{n c_0}{S r_0} j_n(\chi) - j_{n+1}(\chi) \right);$$

$$D_n(S) = \frac{c_0}{r_0} \left(\frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} (n+1) S + n \left(S - \frac{\omega_n^2}{S} \right) \right) j_n(\chi)$$

$$- (S^2 - \omega_n^2) j_{n+1}(\chi);$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho^{(e)} r_0^3} (n-1)(n+1)((n+2) - W). \quad (29)$$

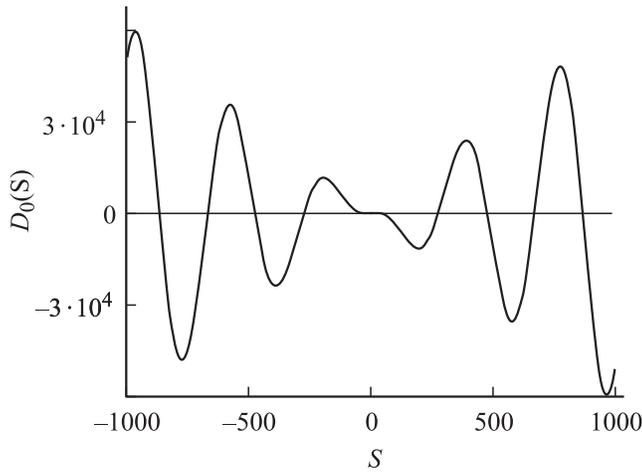


Рис. 2. Зависимость безразмерной функции $D_0(S)$ от безразмерной частоты S при $c_0 = 50$, $W = 1$, $P_{0g} = 1$, $P_{\infty}^{(e)} = 1$, $\gamma = 4/3$.

Из выражений (26)–(29) и рис. 2, где приведен график зависимости $D_n(S)$, видно, что они имеют бесконечное, но счетное число особых точек $S = \pm S_{n,k}$, $n \in (\{0\} \cup \Omega)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, удовлетворяющих условию $D_n(S) = 0$ и расположенных на действительной или мнимой осях. Индекс n нумерует моды поверхностных осцилляций, индекс k — моды радиальных колебаний капли, соответствующих различным корням уравнения $D_n(S) = 0$. В выражениях (26), (27) особые точки $S = \pm S_{n,k}$ являются простыми полюсами, за исключением точки $S = 0$, которая будет полюсом второго порядка. Кроме того, все образы Фурье при $S \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. В связи со сказанным формула обратного преобразования Фурье будет иметь вид [17]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{+\infty+i\tau} F_+(S) e^{-iSt} dS \quad (t > 0),$$

где τ — действительное положительное число, и может быть преобразована в интеграл по контуру, охватывающему всю комплексную плоскость ниже прямой $\text{Im } S = \tau$. К данному контурному интегралу можно применить теорему о вычетах, тогда формула обращения примет вид

$$f(t) = -i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Re } SF_+(S) e^{-iSt}. \quad (30)$$

Используя (30) и рекуррентные формулы для сферических функций Бесселя $\partial_\chi j_n(\chi) = nj_n(\chi)/\chi - j_{n+1}(\chi)$ и $\partial_\chi j_n(\chi) = j_{n-1}(\chi) - (n+1)j_n(\chi)/\chi$, из (26), (28) найдем

$$R^{(1)}(t) = h_0 A_0(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} h_0 A_0(S_{0,k}) \cos(S_{0,k}t); \quad (31)$$

$$\xi^{(1)}(t, \vartheta) = \sum_{n \in \Omega} \sum_{k=1}^{+\infty} h_n A_n(S_{n,k}) \cos(S_{n,k}t) P_n(\mu);$$

$$A_0(0) = 3 \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} \left(\frac{c_0}{r_0} \right)^2 \left[3 \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} \left(\frac{c_0}{r_0} \right)^2 - \alpha_0 \right]^{-1};$$

$$A_0(S) = 2 \frac{S}{\partial_S D_0(S)} \left(\frac{c_0}{S r_0} \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} j_0(\chi) - j_1(\chi) \right);$$

$$A_n(S) = 2 \frac{S}{\partial_S D_n(S)} \times \left(\frac{c_0}{S r_0} \left(\frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} (n+1) + n \right) j_n(\chi) - j_{n+1}(\chi) \right);$$

$$\partial_S D_0(S) = \left(\frac{c_0}{r_0} \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} - \frac{r_0}{c_0} (S^2 + \alpha_0) \right) j_0(\chi) - \left(\frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} S - 2 \frac{\alpha_0}{S} \right) j_1(\chi);$$

$$\partial_S D_n(S) = \left(\frac{c_0}{r_0} \left(\frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} (n+1)^2 + n(n+1) - n(n-1) \frac{\omega_n^2}{S^2} \right) - \frac{r_0}{c_0} (S^2 - \omega_n^2) \right) j_n(\chi) - \left(\frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} (n+1) S + 2 \frac{\omega_n^2}{S} \right) j_{n+1}(\chi), \quad (32)$$

$S_{0,k}$ — корень уравнения $D_0(S) = 0$, $S_{n,k}$ — корень уравнения $D_n(S) = 0$.

Подставляя (31) и (32) в выражение (3), найдем уравнение образующей пузырька

$$r = r_0 + \varepsilon h_0 M_0(t) + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} h_n M_n(t) P_n(\mu),$$

$$M_0(t) = A_0(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} A_0(S_{0,k}) \cos(S_{0,k}t),$$

$$M_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_n(S_{n,k}) \cos(S_{n,k}t). \quad (33)$$

Из (33) видно, что поскольку в общем случае $A_0(S_{0,k}) \neq 1$; $A_n(S_{n,k}) \neq 1$, то конечность скорости звука в газе сказывается на амплитудах и радиальных и поверхностных мод осцилляций и влияет на форму осциллирующей капли.

Подставляя константы $C_0^{(i)(1)}$, $C_0^{(e)(1)}$, $C_n^{(i)(1)}$, $C_n^{(e)(1)}$, определенные выражениями (27) и (29), в выражения (23) и используя формулу обращения (30), найдем выражения для потенциалов полей скоростей в газе и жидкости

$$\begin{aligned} \psi^{(i)(1)}(r, \vartheta, t) = & \varepsilon C_0^{(i)}(0) h_0 t \\ & + \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} h_0 C_0^{(i)}(S_{0,k}) j_0 \left(\frac{S_{0,k}}{c_0} r \right) \sin(S_{0,k}t) \\ & + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} \sum_{k=1}^{+\infty} h_n C_n^{(i)}(S_{n,k}) j_n \left(\frac{S_{n,k}}{c_0} r \right) \sin(S_{n,k}t) P_n(\mu); \end{aligned}$$

$$\psi^{(e)(1)}(r, \vartheta, t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} h_0 \frac{C_0^{(e)}(S_{0,k})}{r} \sin(S_{0,k}t) + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} \sum_{k=1}^{+\infty} h_n \frac{C_n^{(e)}(S_{n,k})}{r^{n+1}} \sin(S_{n,k}t) P_n(\mu);$$

$$C_0^{(i)}(0) = 3 \frac{c_0^2}{r_0} \alpha_0 \left[3 \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} \left(\frac{c_0}{r_0} \right)^2 - \alpha_0 \right]^{-1};$$

$$C_0^{(i)}(S) = 2 \frac{c_0}{S \partial_S D_0(S)} \alpha_0;$$

$$C_n^{(i)}(S) = -2 \frac{c_0}{S \partial_S D_n(S)} \omega_n^2;$$

$$C_0^{(e)}(S) = 2 r_0^2 \alpha_0 \frac{j_1(\chi)}{\partial_S D_0(S)};$$

$$C_n^{(e)}(S) = 2 \frac{r_0^{n+2}}{(n+1)} \frac{\omega_n^2}{\partial_S D_n(S)} \left(\frac{n c_0}{S r_0} j_n(\chi) - j_{n+1}(\chi) \right). \quad (34)$$

6. Поскольку для пузырька в жидкости отношение $Sr_0/c_0 = \chi \ll 1$, то представляется интересным рассмотреть эту ситуацию отдельно. В этом случае для сферических функций Бесселя будут справедливы соотношения

$$j_0(\chi) = 1 - \frac{\chi^2}{6} + O(\chi^3); \quad j_1(\chi) = \frac{\chi}{3} + O(\chi^3);$$

$$j_n(\chi) = \frac{\chi^n}{(2n+1)!!} + O(\chi^{n+2}); \quad j_{n+1}(\chi) = O(\chi^{n+1}). \quad (35)$$

Подставляя (35) в выражения для $D_0(S)$ и $D_n(S)$, их нетрудно переписать в виде

$$D_0(S) = S (S_{0,1}^2 - S^2) \left(2 + \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} \right) \frac{r_0}{6c_0} + O(\chi^3);$$

$$D_n(S) = \frac{1}{(2n+1)!!} \left(\frac{S}{c_0} r_0 \right)^{n-1} \left(\frac{\rho_0^{(i)}}{\rho^{(e)}} (n+1) + n \right) \times (S^2 - S_{n,1}^2) + O(\chi^{n+1}). \quad (36)$$

Видно, что уравнения (36) имеют только по одному корню для квадрата частоты, соответствующему $k=1$,

$$S_{0,1}^2 = \frac{6\rho_0^{(i)}c_0^2 - 2\rho^{(e)}r_0^2\alpha_0}{(2\rho^{(e)} + \rho_0^{(i)})r_0^2}; \quad S_{n,1}^2 = \frac{n\rho^{(e)}\omega_n^2}{\rho_0^{(i)}(n+1) + \rho^{(e)}n}. \quad (37)$$

Отметим, что в (37) выражение для $S_{0,1}^2$ отличается от квадрата частоты радиальных колебаний пузырька, вычисленной без учета инерционных свойств газа в пузырьке, только знаменателем. В частности, если в знаменателе выражения для $S_{0,1}^2$ формально заменить $(2\rho^{(e)} + \rho_0^{(i)})$ на $2\rho^{(e)}$ и учесть, что $c_0^2 = \gamma P_0^{(i)}/\rho_0^{(i)}$, то получится известное выражение для квадрата частоты радиальных колебаний заряженного пузырька в условиях отсутствия движения газа в нем [10,18]

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma P_0^{(i)}}{\rho^{(e)}r_0^2} - \frac{2\sigma}{\rho^{(e)} \cdot r_0^3} (1 - W).$$

Видно также, что выражение для $S_{n,1}^2$ в точности совпадает с частотой капиллярных колебаний заряженной капли, находящейся во внешней среде [10,18].

Подставляя выражения (35), (36) в (26)–(29) и учитывая (23), (30) и (37), нетрудно найти выражения для формы поверхности пузырька и потенциалов полей скоростей газа и жидкости в рассматриваемой асимптотической ситуации

$$r = r_0 + \varepsilon h_0 \left(3 \frac{\rho_0^{(e)}}{\rho^{(e)}} \left(\frac{c_0}{r_0} \right)^2 - \alpha_0 \right)^{-1} \times \left(3 \frac{\rho_0^{(e)}}{\rho^{(e)}} \left(\frac{c_0}{r_0} \right)^2 - \alpha_0 \cos(S_{0,1}t) \right) + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} h_n \cos(S_{n,1}t) P_n(\mu);$$

$$\psi^{(i)(1)}(r, \vartheta, t) = \varepsilon \frac{6\rho^{(e)}\alpha_0 c_0^2 h_0}{(2\rho^{(e)} + \rho_0^{(i)})r_0 \cdot S_{0,1}^2} \times \left(t - \frac{\sin(S_{0,1}t)}{S_{0,1}} + \frac{S_{0,1}r^2}{6c_0^2} \sin(S_{0,1}t) \right) - \varepsilon \sum_{n \in \Omega} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n r_0 S_{n,1} h_n \sin(S_{n,1}t) P_n(\mu);$$

$$\psi^{(e)(1)} = -\varepsilon \frac{2r_0\alpha_0\rho^{(e)}h_0}{(2\rho^{(e)} + \rho_0^{(i)})S_{0,1}} \frac{r_0}{r} \sin(S_{0,1}t) + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} \frac{1}{n+1} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} r_0 S_{n,1} \sin(S_{n,1}t) P_n(\mu). \quad (38)$$

Если в выражениях (38) положить $h_0 = 0$, то они перейдут в хорошо известные выражения, описывающие поверхностные колебания заряженной капли во внешней среде [10,18]. При условии $h_0 \neq 0$ соотношения (38) приближенно описывают колебания пузырька на основной (самой низкой) частоте.

7. Для удобства численного анализа полученного решения перейдем к безразмерным переменным, принимая $\rho^{(e)} = \sigma = r_0 = 1$. Тогда все физические величины задачи будут выражаться в своих характерных масштабах. Так, масштабами длины, плотности, времени, частоты, скорости и давления будут соответственно величины

$$r_0, \quad \rho^{(e)}, \quad \sqrt{\frac{\rho^{(e)}r_0^3}{\sigma}}, \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\rho^{(e)}r_0^3}}, \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\rho^{(e)}r_0}}, \quad \frac{\sigma}{r_0}.$$

По данным экспериментов, радиус пузырька в жидкости меняется в пределах от $r_0 = 10^{-1}$ до 10^{-7} см. Поверхностные натяжения и плотности многих жидкостей мало отличаются от $\sigma = 50$ дине/см и $\rho^{(e)} = 1$ г/см³. При таких значениях физических величин характерный масштаб времени будет изменяться в диапазоне $5 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-12}$ с, масштаб частоты — $2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^{11}$ с⁻¹, масштаб скорости —

$2 \cdot 10^1 - 2 \cdot 10^4$ cm/s, масштаб давления — $5 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^8$ dyne/cm².

Свободными параметрами задачи являются $P_{0g}, P_{\infty}^{(e)}, W, c_0, \gamma, \varepsilon, \Omega, h_n$, где $n \in (\Omega \cup \{0\})$. Равновесное давление газа в пузырьке определяется выражением $P_0^{(i)} = P_{0g} \cdot r_0^{-3\gamma}$, плотность газа в пузырьке $\rho_0^{(i)} = \gamma P_0^{(i)} / c_0^2$.

В ходе проведенного численного анализа полученного выше решения, описывающего осцилляции заряженного пузырька в жидкости, было выяснено, что уравнения $D_n(S) = 0$, где $n \in (\Omega \cup \{0\})$, имеют бесконечно много решений $S = \pm S_{n,k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, которые определяют частоту (инкремент) осцилляций поверхности пузырька.

Так, когда пузырек в жидкости имеет одно равновесное состояние (уравнение (13) имеет одно решение), все решения уравнения $D_0(S) = 0$, определяющего радиальные осцилляции пузырька, являются вещественными и определяют частоты радиальных колебаний пузырька, которые существенно зависят от скорости звука c_0 (рис. 3), давления в жидкости $P_{\infty}^{(e)}$, давления газа в пузырьке P_{0g} и параметра W . Увеличение P_{0g} и W приводит к уменьшению частот, а увеличение $P_{\infty}^{(e)}$ и c_0 — к их увеличению. Отметим, что зависимости $S_{0,k} = S_{0,k}(c_0)$, где $S_{0,k}$ — частота k гармоники радиальных колебаний, имеют вид кривых насыщения. Так, при $P_{\infty}^{(e)} = 1, P_{0g} = 0.9, W = 1, \gamma = 4/3$ низшая гармоника радиальных колебаний ($k = 1$) перестает зависеть от c_0 уже при $c_0 \geq 10$ и представляет собою прямую линию, а сумма амплитуд отклонения радиуса пузырька от равновесного значения $A_0(0) + A_0(S_{0,1})$ становится равной единице, что соответствует пределу несжимаемого газа. Такой вид зависимости $S_{0,k} = S_{0,k}(c_0)$, объясняется тем, что при увеличении c_0 плотность газа в пузырьке $\rho_0^{(i)} = \gamma P_0^{(i)} / c_0^2$ уменьшается. Отметим так же, что при любых физически допустимых значениях параметров задачи амплитуды отклонения радиуса пузырька от равновесного $A_0(S)$ ведут себя так, что сумма $A_0(0) + A_0(S_{0,1})$ мало отличается от единицы, а амплитуды более высоких гармоник радиальных колебаний всегда остаются по крайней мере на порядок меньше единицы и при этом сильно зависят от скорости звука c_0 , уменьшаясь при увеличении последней (рис. 3, b).

Уравнения $D_n(S) = 0$, определяющие поверхностные осцилляции пузырька, в указанной области физических параметров имеют не только вещественные решения, но и мнимые. Вещественные решения определяют частоты поверхностных осцилляций, которые, так же как и радиальные, зависят от скорости звука c_0 , давления в жидкости $P_{\infty}^{(e)}$, давления газа в пузырьке P_{0g} и параметра W . При увеличении скорости звука c_0 частоты поверхностных колебаний увеличиваются и стремятся к своему предельному значению, которое отвечает пределу несжимаемого газа. При этом, как и в случае радиальных колебаний, первой достигает своего предельного значения низшая гармоника ($k = 1$)

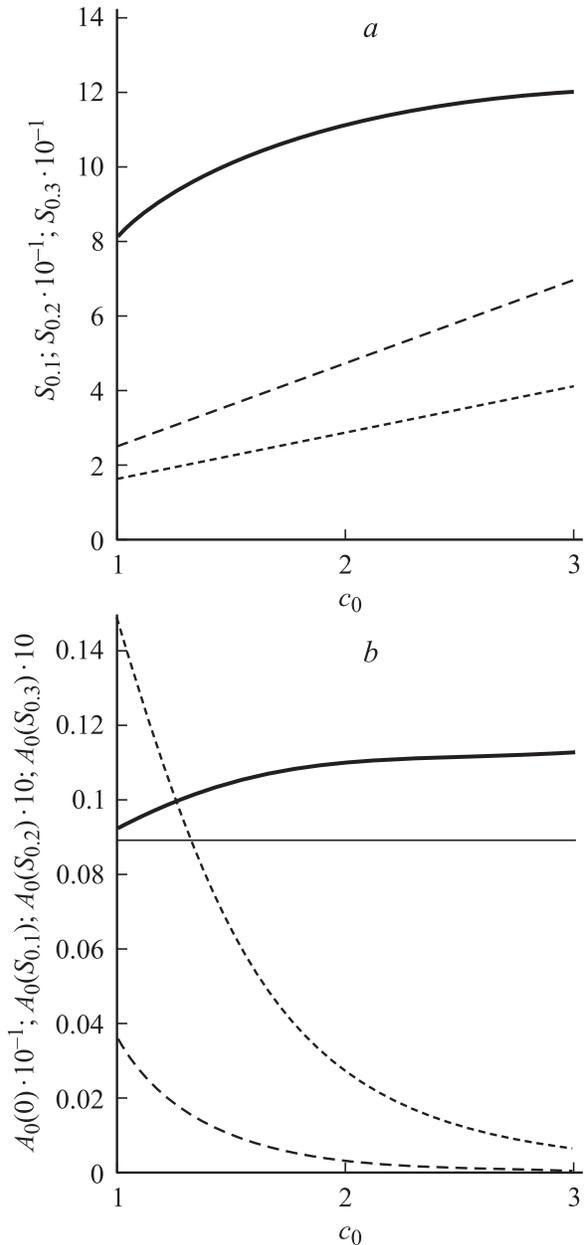


Рис. 3. Зависимость безразмерных частот радиальных осцилляций стенки пузырька $S_{0,k}$ (a) и амплитуд мод $A_0(S_{0,k})$ (b) от безразмерной скорости звука c_0 , при $P_{0g} = 0.05, P_{\infty}^{(e)} = 0.05, W = 0.05, \gamma = 4/3$. Тонкая линия — $A_0(0)$, толстая — $A_0(S_{0,1})$, точечная — $A_0(S_{0,2})$, пунктир — $A_0(S_{0,3})$.

колебаний. Например, для $n = 2, P_{\infty}^{(e)} = 1, P_{0g} = 0.4, W = 1, \gamma = 4/3$ низшая гармоника $S_{2,1}$ поверхностных колебаний перестает зависеть от c_0 уже при $c_0 \geq 10$, а амплитуда отклонения поверхности пузырька от сферической для этой гармоники $A_2(S_{2,1})$ асимптотически приближается к единице. Гармоники с более высокими номерами $S_{2,k} (k \geq 2)$ продолжают расти с увеличением c_0 , тогда как амплитуды отклонения поверхности пузырька от сферической $A_2(S_{2,k})$ для этих гармоник быстро стремятся к нулю.

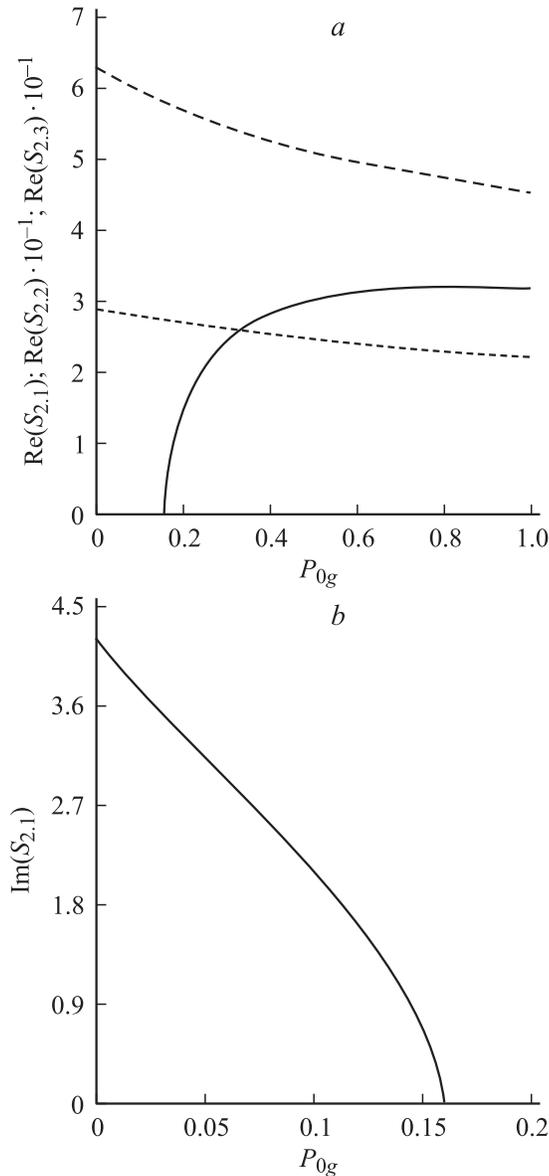


Рис. 4. Зависимость безразмерной вещественной $\text{Re}(S_{2,k})$ (a) и мнимой $\text{Im}(S_{2,k})$ (b) частей решения уравнения $D_2(S) = 0$, определяющих частоты и инкременты поверхностных осциллирующих пузырька, от безразмерного давления газа P_{0g} при $W = 1$, $P_\infty^{(e)} = 1$, $c_0 = 5$, $\gamma = 4/3$.

Зависимость частот поверхностных колебаний от параметров $P_\infty^{(e)}$, P_{0g} , W различна для низшей гармоники ($k = 1$) и гармоник с номерами $k \geq 2$. Так, частоты с номерами $k \geq 2$ (рис. 4) уменьшаются с увеличением P_{0g} , W и увеличиваются с ростом $P_\infty^{(e)}$. Наиболее же низкая частота поверхностных колебаний может обращаться в нуль и становиться чисто мнимой, определяя инкремент неустойчивости (это может иметь место при увеличении параметра W или $P_\infty^{(e)}$, а также при уменьшении P_{0g}). В этом случае дальнейшее увеличение W или $P_\infty^{(e)}$, равно как и уменьшение P_{0g} , приводит к росту величины инкремента неустойчивости поверхности пузырька (рис. 4).

Пузырек становится неустойчивым по отношению к малым искажениям формы при условии, что $\omega_n^2 \leq 0$. Это условие для второй ($n = 2$) наиболее неустойчивой моды поверхностных колебаний указывает на то, что неустойчивость возникает, когда электрическое давление превышает лапласовское, а давление газа в пузырьке сравнивается с давлением жидкости. Физически этот вывод ясен: если давление газа в пузырьке больше давления в жидкости, то искажение поверхности пузырька сглаживается высоким давлением газа. Если же давление в жидкости превосходит давление газа в пузырьке, то любое искажение формы пузырька будет усиливаться высоким давлением жидкости, что и приведет к потере устойчивости его формы. Критерий потери устойчивости формы пузырька можно получить исходя из условий $\omega_2^2 \leq 0$ и $P(r) = 0$, которые дают $W \geq 4\sqrt{P_{0g}/P_\infty^{(e)}}$.

В области физических параметров, где пузырек может иметь два равновесных состояния (уравнение (13) имеет два решения) частоты радиальных и поверхностных колебаний, которые определяются из решения уравнений $D_n(S) = 0$ ($n \in \Omega \cup \{0\}$) для равновесного состояния, отвечающего меньшему радиусу пузырька, ведут себя так же, как и в случае, когда пузырек имеет одно равновесное состояние. Если же пузырек находится в равновесном состоянии, отвечающем большему радиусу, то уравнение $D_0(S) = 0$ всегда имеет мнимое решение, которое обуславливает инкремент неустойчивости радиуса пузырька. Величина этого инкремента незначительно изменяется при изменении давления газа P_{0g} , параметра W и скорости звука c_0 и значительно увеличивается при уменьшении давления в жидкости $P_\infty^{(e)}$. При этом амплитуда $A_0(S_{0,1})$ отклонения радиуса пузырька от равновесного для этого инкремента всегда остается сравнимой с единицей и возрастает при уменьшении $P_\infty^{(e)}$. Вещественные решения уравнения $D_0(S) = 0$, соответствующие частотам радиальных колебаний, весьма значительно зависят от давления в жидкости $P_\infty^{(e)}$ и скорости звука c_0 , увеличиваясь с увеличением c_0 и уменьшением $P_\infty^{(e)}$, изменение давления газа P_{0g} и параметра W не приводят к их существенному изменению. Амплитуды отклонения радиуса пузырька от равновесного $A_0(S_{0,k})$, соответствующие гармоникам с $k \geq 2$, меньше единицы по меньшей мере на четыре порядка.

Отметим, что в данной области параметров уравнение $D_n(S) = 0$ ($n \geq 2$) имеет всегда вещественные решения, которые соответствуют частотам поверхностных колебаний пузырька. Они практически не зависят от давления газа в пузырьке P_{0g} и параметра W , а также значительно увеличиваются с уменьшением давления в жидкости $P_\infty^{(e)}$ и увеличением скорости звука c_0 , за исключением основной гармоники, которая не зависит от скорости звука. При этом амплитуда отклонения формы пузырька от сферической $A_2(S_{2,1})$, соответствующая основной гармонике, всегда остается сравнимой с единицей, тогда как амплитуды более высоких гармоник $A_2(S_{2,k})$ ($k \geq 2$) по меньшей мере на два порядка меньше единицы.

Заключение

Подводя итог вышесказанному, отметим, что для пузырька, находящегося в любом из равновесных состояний, учет конечности скорости выравнивания давления газа необходимо проводить только в тех случаях, когда скорость звука в пузырьке является малой величиной (когда плотность газа в пузырьке большая). Только в этом случае амплитуды высоких гармоник радиальных или поверхностных колебаний становятся значительными и могут существенно изменить форму пузырька. Максимальные значения амплитуд радиальных и поверхностных мод в выражении (33) с уменьшением

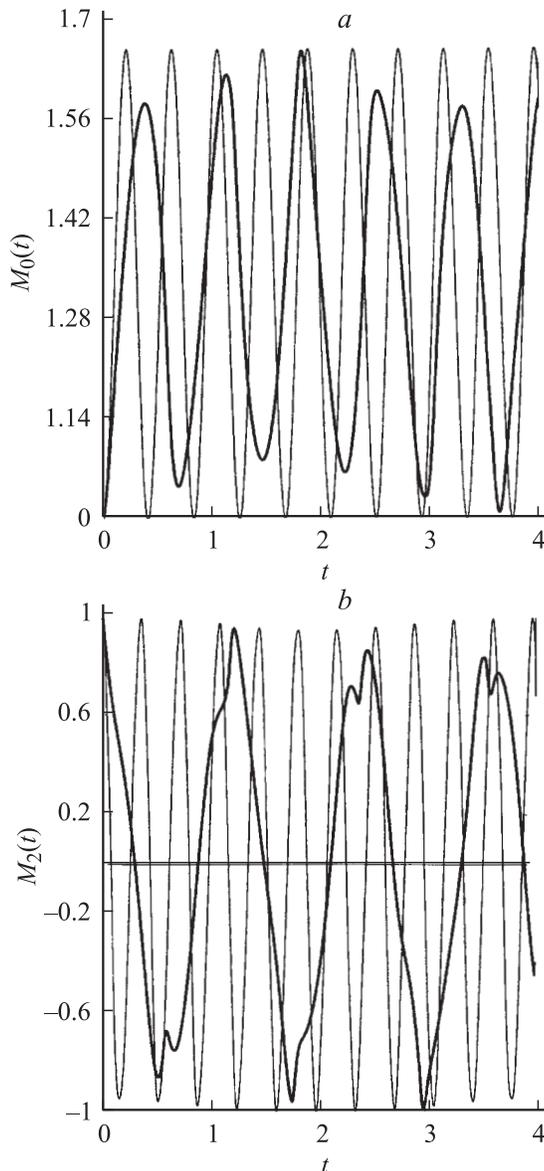


Рис. 5. Зависимость амплитудных коэффициентов радиальных $M_0(t)$ (a) и поверхностных $M_2(t)$ (b) мод осцилляций от времени t при $P_{0g} = 0.05$, $W = 0$, $P_{\infty}^{(e)} = 0.05$, $\gamma = 4/3$ и различных значениях безразмерной скорости звука: толстая линия — $c_0 = 1$, тонкая — $c_0 = 5$.

скорости звука снижаются (рис. 5). Это обстоятельство должно сказываться на форме поверхности осциллирующего пузырька. В случае же высокой скорости звука в пузырьке (при малой плотности газа) учет влияния высоких гармоник как радиальных, так и поверхностных осцилляций не нужен и можно пользоваться выражением (38), хорошо описывающим колебания пузырька на низшей частоте колебаний. Из сказанного очевидно, что выражением (33) следует пользоваться при анализе устойчивости схлопывающегося пузырька, давление газа в котором на финальной стадии схлопывания велико. Выражением (38) можно пользоваться при анализе движения пузырька, совершающего малые осцилляции в окрестности одного из равновесных состояний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760) и гранта Президента РФ (№ МК 2946.2004.01).

Список литературы

- [1] Жаров А.Н., Ширяева С.О. // ЭОМ. 1999. № 6. С. 9–22.
- [2] MacIntyre F. // J. Geophys. Res. 1972. Vol. 77. N 27. P. 5211–5228.
- [3] Khaleeg-ur-Raman M., Saunders C.P.R. // Atm. Res. 1991. Vol. 26. P. 329–338.
- [4] Aitken F., McCluskey F.M.J., Denat A. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 327. P. 373–392.
- [5] Glinsky M.E., Baily D.S., London A.R. et al. // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. N 1. P. 20–31.
- [6] Иевлев И.И., Исерс А.Б. // Изв. РАН. МЖГ. 1982. № 6. С. 101–105.
- [7] Завтрак С.Т., Коробко Е.В. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 177–179.
- [8] Пылаева И.В., Синкевич О.А., Смирнов П.В. // ТВТ. 1992. Т. 30. № 2. С. 367–371.
- [9] Васильев А.П. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 35–41.
- [10] Григорьев А.И., Жаров А.Н., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 205–209.
- [11] Григорьев А.И., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 4. С. 8–13.
- [12] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 37–42.
- [13] Диденкулов И.Н., Селивановский Д.А., Семенов В.Е., Соколов И.В. // Изв. Вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 2. С. 183–197.
- [14] Feng Z.C., Leal L.G. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 266. P. 209–242.
- [15] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
- [16] Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 12–20.
- [17] Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1953. Т. 1. 923 с.
- [18] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 9. С. 1–8.