01;04

Влияние сжимаемости на устойчивость идеально проводящей плазменной струи плоской и цилиндрической конфигурации

И.А. Жвания, В.Г. Кирцхалия, А.А. Рухадзе

Сухумский физико-технический институт,
384914 Сухуми
e-mail: sipt@myoffice.ge
Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
119991 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 10 марта 2004 г.)

Рассматривается влияние сжимаемости на устойчивость плазменной струи при различной конфигурации ее поверхности, являющейся поверхностью тангенциального разрыва. Показано, что сжимаемость может играть как дестабилизирующую, так и стабилизирующую роль в зависимости от соотношения магнитогидродинамических параметров струи и среды, в которой она движется. Показано также, что в определенных условиях влияние сжимаемости зависит от длины волны возмущения.

1. Дисперсионное уравнение, описывающее собственные колебания идеально проводящей плазменной струи в магнитогидродинамическом приближении, имеет вид [1–3]

$$\frac{N_2(\xi)}{\nu N_1(\xi)} = -G(\delta, \xi), \tag{1}$$

где

$$N_1(\xi) = b_1^2 - \xi^2, \tag{2}$$

$$N_2(\xi) = b_2^2 - (a - \xi)^2. \tag{3}$$

Вид функции $G(\delta, \xi)$ зависит от конфигурации поверхности струи, являющейся поверхностью тангенциального разрыва

$$G(\delta, \xi) = \begin{cases} \frac{m_2}{m_1} \operatorname{th}(m_1\delta) & \text{для плоской струи,} \\ \frac{m_2 I_0(m_1\delta) K_1(m_2\delta)}{m_1 I_1(m_1\delta) K_0(m_2\delta)} & \text{для цилиндрической струи.} \end{cases} \tag{4}$$

Здесь введены обозначения

$$m_1^2 = \frac{(b_1^2 - \xi^2)(\mu_1^2 - \xi^2)}{\mu_1^2 b_1^2 - (\mu_1^2 + b_1^2)\xi^2} = 1 + \varepsilon_1(\xi), \tag{5}$$

$$m_2^2 = \frac{\left[b_2^2 - (a - \xi)^2\right]\left[\mu_2^2 - (a - \xi)^2\right]}{\mu_2^2 b_2^2 - (\mu_2^2 + b_2^2)(a - \xi)^2} = 1 + \varepsilon_2(\xi), \tag{6}$$

$$\varepsilon_1(\xi) = \frac{\xi^4}{\mu_1^2 b_1^2 - (\mu_1^2 + b_1^2)\xi^2}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_2(\xi) = \frac{(a - \xi)^4}{\mu_2^2 b_2^2 - (\mu_2^2 + b_2^2)(a - \xi)^2}, \tag{8}$$

причем I_0, I_1, K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя, а

$$\xi = \frac{V - U_p}{C}, \quad a = \frac{V}{C}, \quad b_1 = \frac{V_{A1}}{C}, \quad b_2 = \frac{V_{A2}}{C},$$

$$\nu = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \mu_1 = \frac{C_1}{C}, \quad \mu_2 = \frac{C_2}{C}, \quad \delta = \frac{kd}{2} = \frac{\pi d}{\lambda},$$

где V — скорость струи относительно неподвижной плазменной среды; $V_{Ai} = H_i/\sqrt{4\pi\rho_i}$ — скорость Альвена; ρ_i — плотность; C_i — скорость звука; C — постоянная, имеющая размерность скорости; d — толщина или диаметр струи; $U_p = \omega/k$ — фазовая скорость; λ — длина волны возмущения, которое задается в виде плоской волны.

Уравнение (1) получено в предположении, что векторы $\mathbf{V}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_i$ направлены вдоль оси Z, являющейся осью симметрии цилиндрической струи. Плоская струя симметрична относительно плоскости $X = 0$ и рассматривается полупространство $X \geq 0$. Следовательно, возмущения задаются следующими формулами:

$$f_i(x, z, t) = f_i(x) \exp\left[i(kz - \omega t)\right] \quad \text{для плоской струи,} \tag{9}$$

$$f_i(r, z, t) = f_i(r) \exp\left[i(kz - \omega t)\right] \quad \text{для цилиндрической струи,} \tag{10}$$

$i = 1$ относится к внутренней области струи, а $i = 2$ — к внешней. Предполагается также, что волны, излучаемые струей во внешнюю область, являются поверхностными, чему соответствует $m_2^2 > 0$.

2. В несжимаемом случае, когда $C_i = \infty$ $(i = 1, 2)$, $\varepsilon_i(\xi) = 0$, уравнение (1) переходит в квадратное уравнение относительно ξ. Требуя неотрицательность его дискриминанта, условие устойчивости струи запишется в виде [3,4]

$$a^2 \leq \frac{\left[\nu G(\delta) + 1\right]\left[\nu G(\delta) b_1^2 + b_2^2\right]}{\nu G(\delta)}. \tag{11}$$

Знак равенства в (11) соответствует критическому значению скорости a_{cr}^2, при превышении которой для заданной длины волны возмущения развивается неустойчивость. Функция $G(\delta)$ определяется из (4) при $m_1 = m_2 = 1$ и ее график приведен на рис. 1. Видно, что для плоской струи она монотонно растет от 0 до 1, а для цилиндрической монотонно убывает от ∞ до 1. Следовательно, конфигурация струи существенно влияет на ее устойчивость лишь при длинноволновых возмущениях, когда $\delta < 1$.

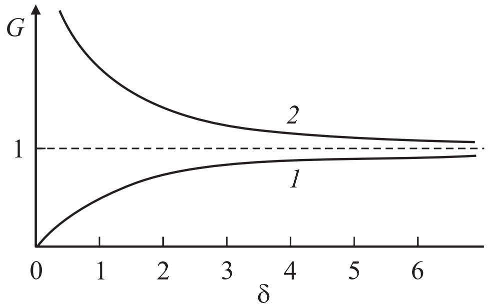

Рис. 1. График функции $G(\delta)$: *1* — плоская струя, *2* — цилиндрическая струя.

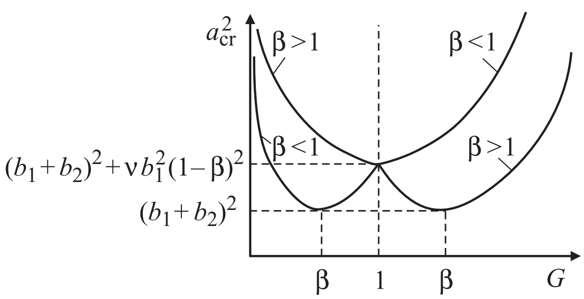

Рис. 2. Зависимость $a^2_{\rm cr}$ от $G(\delta)$ для несжимаемой плазменной струи. $G(\delta) < 1$ — плоская струя, $G(\delta) > 1$ — цилиндрическая струя.

В работе [4] приведен анализ выражения (11) с целью определения минимального значения $a_{\rm cr}$, ниже которой струя устойчива при любых δ. На рис. 2 показан результат этого анализа, из которого следует, что влияние конфигурации струи в данном случае определяется параметром

$$\beta = \frac{b_2}{\nu b_1} = \left(\frac{\rho_2 H_2^2}{\rho_1 H_1^2}\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Видно, что в области $G(\delta) \le 1$, соответствующей плоской струе, наблюдается следующая закономерность: если $\beta > 1$, то с увеличением $G(\delta)$ от 0 до 1 (с увеличением δ от 0 до ∞) $a^2_{\rm cr}$ монотонно убывает от ∞ до минимального значения в точке $G(\delta) = 1$

$$a^2_{\rm cr}\Big|_{G(\delta)=1} = (b_1 + b_2)^2 + \nu b_1^2 (1-\beta)^2. \qquad (13)$$

При $\beta < 1$ $a^2_{\rm cr}$ является немонотонной функцией $G(\delta)$ и его минимальное значение, достигаемое в точке экстремума $G(\delta) = \beta$, равно

$$a^2_{\rm cr}\Big|_{\min} = (b_1 + b_2)^2. \qquad (14)$$

Область $G(\delta) \ge 1$ соответствует цилиндрической струе, и здесь мы имеем обратную картину. Таким образом, при $\beta > 1$ плоская струя более устойчива, чем цилиндрическая, а при $\beta < 1$ — наоборот.

3. Рассмотрим теперь эту задачу с учетом малой сжимаемости, когда $\mu_i \gg 1$ и $\mu_i > b_i$. В этом случае $|\varepsilon_i(\xi)| \ll 1$, т.е. $m_i^2 > 0$ $(i = 1, 2)$, поэтому правая часть уравнения (1) является отрицательной величиной, из чего следует, что условие реальности его корней, необходимое для устойчивости струи, может выполняться лишь в том случае, если $N_1(\xi)$ и $N_2(\xi)$ имеют разные знаки. В условиях малой сжимаемости, когда $\mu_i > b_i$, из выражений (5) и (6) следует, что неравенство $m_i^2 > 0$ выполняется, если $N_i(\xi)$ и $D_i(\xi)$ имеют одинаковые знаки, где D_i — знаменатель m_i^2, причем при их положительности в среде распространяется поперечная волна альвеновского типа, а при отрицательности — продольная магнитозвуковая волна. Таким образом, струя устойчива, если внутри и вне струи распространяются магнитогидродинамические волны разной природы, причем волна первого типа генерируется на той стороне тангенциального разрыва, где альвеновская скорость больше, а второго — там, где меньше [5].

Будем считать $G(\delta, \xi)$ медленно меняющейся от ξ функцией и запишем уравнение (1) в виде

$$\left[\nu G(\delta, \xi^0) + 1\right]\xi^2 - 2a\xi + a^2 - \nu G(\delta, \xi^0) b_1^2 - b_2^2 = 0, \qquad (15)$$

где ξ^0 — корень уравнения (1) в несжимаемом случае, соответствующем критическому значению скорости струи, когда дискриминант уравнения равен нулю.

Разложив функцию $G(\delta, \xi^0)$ в ряд по малым параметрам $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_i(\xi^0)$ и ограничившись членами первого порядка малости, найдем

$$G(\delta, \xi^0) = G(\delta)(1 + \varepsilon), \qquad (16)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\varepsilon_2^0 - \varepsilon_1^0\left(1 - \frac{2\delta}{\operatorname{sh} 2\delta}\right)\right] & \text{для плоской струи,} \\ \varepsilon_2^0\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(\frac{K_1(\delta)}{K_0(\delta)} - \frac{K_0(\delta)}{K_1(\delta)}\right)\right] - \varepsilon_1^0\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(\frac{I_0(\delta)}{I_1(\delta)} - \frac{I_1(\delta)}{I_0(\delta)}\right)\right] & \\ & \text{для цилиндрической струи.} \end{cases} \qquad (17)$$

Можно показать, что все множители при ε_i^0 положительные величины, поэтому

$$\varepsilon \begin{cases} > 0, & \text{если} \quad \varepsilon_2^0 > 0, \quad \varepsilon_1^0 < 0, \\ < 0, & \text{если} \quad \varepsilon_2^0 < 0, \quad \varepsilon_1^0 > 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Сравнив (2) и (3) с (7) и (8), легко найдем, что при $\mu_i > b_i$ знаки ε_1^0 совпадают со знаками $N_i^0 = N_i(\xi^0)$.

Для критической скорости при малой сжимаемости из уравнения (15) будем иметь

$$a^2_{\rm cr} = \frac{\left[\nu G(\delta, \xi^0) + 1\right]\left[\nu G(\delta, \xi^0) b_1^2 + b_2^2\right]}{\nu G(\delta, \xi^0)}. \qquad (19)$$

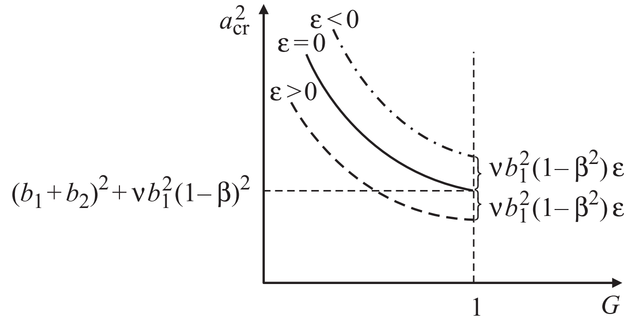

Рис. 3. Зависимость $a_{\rm cr}^2$ от $G(\delta)$ для плоской сжимаемой струи при $\beta > 1$.

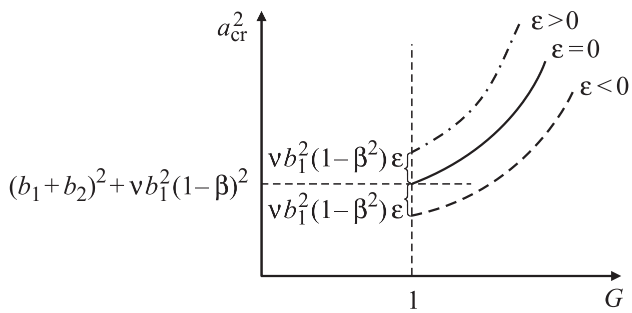

Рис. 4. Зависимость $a_{\rm cr}^2$ от $G(\delta)$ для цилиндрической струи при $\beta < 1$.

Так как (19) формально совпадает с (11), его анализ даст аналогичный результат, с той лишь разницей, что точка экстремума, определяемая формулой

$$G(\delta) = \frac{\beta}{1+\varepsilon}, \tag{20}$$

будет несколько сдвинута вправо или влево в зависимости от знака ε. Изменится также величина $a_{\rm cr}^2$ в точке $G(\delta) = 1$ и будет равна

$$a_{\rm cr}^2\Big|_{G(\delta)=1} = (b_1^2 + b_2^2) + \nu b_1^2(1-\beta)^2 + \nu b_1^2(1-\beta^2)\varepsilon. \tag{21}$$

Рассмотрим разность квадратов критических скоростей $\Delta a_{\rm cr}^2$, определяемых формулами (19) и (11),

$$\Delta a_{\rm cr}^2 = \frac{\nu b_1^2\left[G^2(\delta) - \beta^2\right]}{G(\delta)}\,\varepsilon. \tag{22}$$

Ясно, что влияние сжимаемости на устойчивость течения плазменной струи будет определяться знаком этой разности: если $\Delta a_{\rm cr}^2 > 0$, то сжимаемость стабилизирует струю, а если $\Delta a_{\rm cr}^2 < 0$ — дестабилизирует. Проведем анализ выражения (22) с учетом результатов работ [4,5].

Так как с точки зрения устойчивости для плоской струи наиболее оптимальным является случай $\beta > 1$, а $G(\delta) \le 1$, то разность в квадратных скобках — отрицательная величина. С другой стороны, неравенство $\beta = (\rho_2 H_2^2/\rho_1 H_1^2)^{1/2} > 1$ может выполняться как за счет скачка магнитного поля ($H_2 > H_1$; $\rho_2 \le \rho_1$), так и за счет скачка плотности ($H_2 \le H_1$; $\rho_2 > \rho_1$). В первом случае $V_{A2} > V_{A1}$ и, как было указано выше, $N_2^0 > 0$ ($\varepsilon_2^0 > 0$) и $N_1^0 < 0$ ($\varepsilon_1^0 < 0$). Тогда, как следует из (18), $\varepsilon > 0$ и $\Delta a_{\rm cr}^2 < 0$, т.е. сжимаемость дестабилизирует течение, причем при устойчивом течении внутри генерируется магнитозвуковая волна, а вне — волна альвеновского типа. В другом случае $V_{A2} < V_{A1}$; следовательно, $N_2^0 < 0$ ($\varepsilon_2^0 < 0$), $N_1^0 > 0$ ($\varepsilon_1^0 > 0$), $\varepsilon < 0$ и $\Delta a_{\rm cr}^2 > 0$, т.е. сжимаемость стабилизирует течение, причем вне струи генерируется магнитозвуковая волна, а внутри — волна альвеновского типа.

Для цилиндрической струи оптимальным является условие $\beta < 1$, $G(\delta) \ge 1$, следовательно, разность в квадратных скобках в (22) — положительная величина, т.е. знак $\Delta a_{\rm cr}^2$ определяется знаком ε. Здесь аналогично будем иметь следующее: если $H_2 < H_1$ и $\rho_2 \ge \rho_1$, то $V_{A1} > V_{A2}$ и $\Delta a_{\rm cr}^2 < 0$, ибо $\varepsilon < 0$, что означает дестабилизацию, причем внутри струи генерируется волна альвеновского типа, а вне ее — магнитозвуковая. В другом случае, когда $H_2 \ge H_1$ и $\rho_2 < \rho_1$, имеем обратную картину. Результаты этого анализа схематически показаны на рис. 3 и 4.

Представляет интерес рассмотрение случая, когда струя течет в неоптимальных с точки зрения устойчивости условиях, т.е. когда для плоской струи $\beta < 1$, а для цилиндрической $\beta > 1$. Соответствующие результаты анализа выражения (22) представлены на рис. 5 и 6. Видно, что в этих условиях влияние сжимаемости на устойчивость струи зависит не только от соотношения

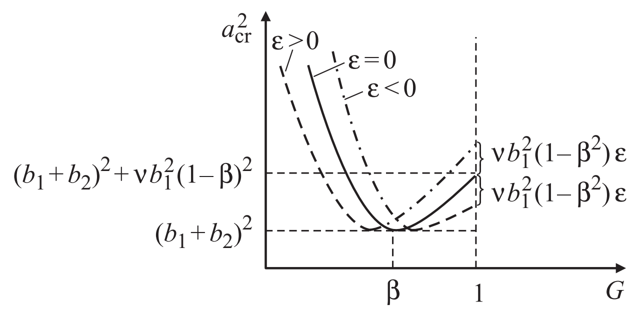

Рис. 5. Зависимость $a_{\rm cr}^2$ от $G(\delta)$ для плоской струи при $\beta < 1$.

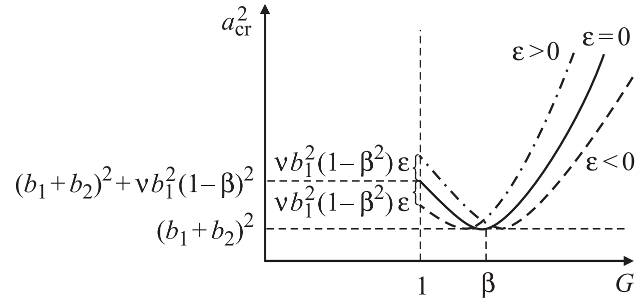

Рис. 6. Зависимость $a_{\rm cr}^2$ от $G(\delta)$ для цилиндрической струи при $\beta > 1$.

магнитогидродинамических параметров внутри и вне струи, но и от длины волны возмущения.

В заключение можно сделать общий вывод о том, что если рассматривать плазменную струю определенной конфигурации (плоскую или цилиндрическую), то сжимаемость может играть как дестабилизирующую, так и стабилизирующую роль в зависимости от условий, в которых течет струя, и от длины волны возмущения, тогда как она однозначно дестабилизирует тангенциальный разрыв в его классическом понимании. Кроме того, плазменная струя работает как генератор магнитогидродинамических волн, природа которых также определяется условиями ее течения.

Список литературы

[1] *Кирцхалия В.Г.* // Сообщения АН ГССР. 1983. Т. 117. № 2. С. 282–283.
[2] *Гвелесиани А.И., Джандиери Г.В., Кирцхалия В.Г.* // Сообщения АН ГССР. 1986. Т. 121. № 1. С. 61–63.
[3] *Parker E.N.* // Astrophys. J. 1964. Vol. 39. P. 690–709.
[4] *Kirtskhalia V.G., Zhvania I.A., Gvelesiani A.I.* // Bulletin of the Georgian Academy of Science. 2000. Vol. 161. N 31. P. 48–50.
[5] *Кирцхалия В.Г., Рухадзе А.А.* // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2003. № 11. С. 50–54.