01;03;04

Модельная задача дифракции волн на периодической неоднородной границе раздела солнечной плазмы

© А.А. Александрова, Ю.Н. Александров

Харьковский военный университет,
61043 Харьков, Украина
Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
61726 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 22 апреля 2004 г.)

На основании интегральных уравнений солнечной магнитогидродинамики рассмотрена в линейном приближении задача дифракции альфвеновских и магнитозвуковых волн на плоской промодулированной бегущей синусоидальной волной границе раздела двух сред. Проведен анализ полученных результатов.

Волны всегда присутствуют на Солнце, поскольку оно чрезвычайно динамично. Это связано с непрерывным движением отдельных структурных элементов Солнца, пространственные и временны́е масштабы которых изменяются в широком диапазоне значений. Так, в плазме, образующей солнечную атмосферу, обычно имеют место четыре моды волнового движения, вызванные различными восстанавливающими силами. Магнитное натяжение и силы Кориолиса приводят к появлению альфвеновских и инерционных волн. Магнитное давление, давление плазмы и сила тяжести могут действовать отдельно друг от друга и вызывать соответственно альфвеновские волны сжатия, звуковые волны и внутренние гравитационные волны. Однако при совместном действии эти три силы образуют только две магнитоакустико-гравитационные моды (МАГ волны). При отсутствии силы тяжести эти две моды становятся магнитозвуковыми волнами (ускоренными или замедленными), а при отсутствии магнитного поля — акустико-гравитационными волнами (тяжелый звук).

Согласно Присту [1], альфвеновские волны существуют в верхней хромосфере и короне Солнца, ускоренные МАГ волны обнаруживаются при наблюдении бегущей волны полутени солнечного пятна, а корональная волна Моретона, появляющаяся после солнечной вспышки, есть ничто иное как ускоренная магнитозвуковая волна. Кроме того, мелкомасштабные волновые движения вне солнечных пятен представляют собой стоячие звуковые волны, а магнитогидродинамические волны как таковые присутствуют в солнечном ветре. При этом полагают, что звуковые волны нагревают нижнюю хромосферу, а магнитные волны или магнитная диссипация могут нагреть верхнюю хромосферу и корону, т. е. рассмотренные волновые движения и солнечная плазма, их порождающая, неразрывно связаны друг с другом.

Основы теории перечисленных волновых возмущений в однородных средах, когда длина волны намного меньше характерного масштаба вариации среды, изучены достаточно хорошо в литературе [2]. Поскольку дифференциальные уравнения в частных производных для возмущающих величин в этом случае сводятся к хорошо изученным алгебраическим уравнениям, то предположение об однородности среды значительно облегчает их математическое рассмотрение. Неоднородный же характер среды изменяет структуру возмущения, при этом сложность заключается еще и в том, что наряду с дискретным спектром может иметь место и непрерывный спектр мод.

В частности, основными факторами, вызывающими неоднородность Солнца, являются сила тяжести и магнитное поле. Сила тяжести вызывает увеличение давления в направлении к центру Солнца, а магнитное поле и связанная с ним сила Лоренца часто создает рост давления плазмы в направлении, нормальном к магнитному полю, и вдали от областей концентрации магнитного потока. Все это, а также и некоторые другие факторы приводит к появлению границ раздела неоднородных сред (неоднородностей), наиболее характерные из которых магнитные силовые трубки, плоскопараллельные границы и т. д. На этих границах возникают сильные разрывы как производных физических величин, описывающих возмущения поля солнечной плазмы, так и самих этих величин. Скачки этих величин на поверхности разрыва определяются из интегральных законов сохранения или интегральных уравнений баланса. При этом в физике волнового процесса могут появляться новые эффекты, связанные с усилением амплитуды волны, с изменением характера распространения, т. е. волновой характер возмущения в одной области может переходить в нераспространяющийся в другой области, с появлением поверхностных мод, затухающих с удалением от границы раздела, и т. д.

Проблемой длинноволновых возмущений в неоднородной солнечной атмосфере начали заниматься не так давно, но проблема весьма важна и заслуживает большого внимания в будущем. Поэтому в данной работе рассмотрим одну из простейших модельных задач о рассеянии пакета волн солнечной плазмы границей раздела двух плазменных сред, представляющей собой плоскость, промодулированную бегущей синусоидальной волной. Эта граница раздела может порождаться пространственно неоднородными периодическими магнитными полями либо же пространственно периодическими потоками заряженных частиц.

В качестве математического аппарата выбран метод интегральных уравнений, к настоящему времени уже успешно примененный в электродинамике [3] и линейной магнитной гидродинамике [4]. Интегральные уравнения, лежащие в основе метода, более естественным образом включают в себя граничные и начальные условия, а также обладают по сравнению с дифференциальными уравнениями значительно большей физической наглядностью, что позволяет существенно упростить построение алгоритма решения краевой задачи.

Рассмотрим постановку краевой задачи, приводящую к интегральным уравнениям для линейного возмущения поля в солнечной магнитной гидродинамике.

Предположим, что некоторая неоднородность (геометрически однородная область), характеризуемая невозмущенным магнитным полем $\mathbf{B}_2$, альфвеновской и звуковой скоростями V_{A2}, V_{S2} и плотностью ρ_2, имеет объем $V(t)$ с границей, в общем случае зависящей от времени. Пусть рассматриваемая неоднородность помещена в неограниченную среду, характеризуемую соответственно параметрами $\mathbf{B}_1$, V_{A1}, V_{S1}, ρ_1, до возмущения ее падающим полем, заданным вектором состояния $\mathbf{\Psi}_0(\mathbf{r},t) = \{\mathbf{u}_0(\mathbf{r},t)\mathbf{b}_0(\mathbf{r},t), \rho_0(\mathbf{r},t), p_0(\mathbf{r},t)\}$. Здесь вектор магнитогидродинамического (МГД) состояния $\mathbf{\Psi}(\mathbf{r},t) = \{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\mathbf{b}(\mathbf{r},t), \rho(\mathbf{r},t), p(\mathbf{r},t)\}$ представляет собой совокупность следующих возмущений: отклонения скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, магнитного поля $\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$, плотности $\rho(\mathbf{r},t)$ и давления $p(\mathbf{r},t)$ от их равновесных значений, характеризующих МГД состояние солнечной плазмы.

Опуская вывод (этот вопрос обсуждался в [5]), отметим, что интегральные уравнения солнечной магнитной гидродинамики с нелокальными граничными условиями в лабораторной системе координат в операторной форме имеют вид

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{r},t) = \mathbf{\Psi}_0(\mathbf{r},t) + \hat{G}_{\mathbf{r},t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{V(t')} d\mathbf{r}' \mathbf{\Psi}(\mathbf{r}',t') I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'). \quad (1)$$

Здесь дифференциальный оператор $\hat{G} = ||G_{ij}||_{i,j=1,2,3}$ представляет собой матрицу в специально выбранном базисе; функция Грина, зависящая от сдвига пространственных $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ и временны́х $t-t'$ переменных

$$I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \int_{-\infty+i\sigma_0}^{\infty+i\sigma_0} \exp\left[-iq(t-t')\right] dq \times \iiint_{\infty} \frac{\exp[i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{\delta(q,\mathbf{p})\Delta(q,\mathbf{p})\tau(q,\mathbf{p})}\, d\mathbf{p}, \quad (2)$$

записана в виде преобразования Фурье–Лапласа. Из интегрального представления видно, что интегрирование в каждом из интегралов (2) проводится в бесконечных пределах и для их вычисления необходимо задавать способ обхода особых точек, лежащих на пути интегрирования. Эти особые точки имеют место при тех значениях переменных интегрирования $\mathbf{p}, q$, для которых выполняются соотношения, являющиеся дисперсионными уравнениями для соответствующих видов реально существующих в солнечной плазме волн

$$\delta(q,\mathbf{p}) = q^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2 = 0,$$

$$\Delta(q,\mathbf{p}) = q^4 - q^2(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)\mathbf{p}^2 + V_{S1}^2 N^2 \sin^2\theta_g \mathbf{p}^2 + V_{A1}^2 V_{S1}^2 (\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2 \mathbf{p}^2 = 0,$$

$$\tau(q,\mathbf{p}) = q^2 \pm 2(\mathbf{p}\mathbf{\Omega})^2/p = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость, N — частота Брента. В частности, дисперсионное уравнение $\delta(q,\mathbf{p}) = 0$ связано с альфвеновскими волнами, $\Delta(q,\mathbf{p}) = 0$ — с МАГ волнами и $\tau(q,\mathbf{p}) = 0$ — с инерционными волнами.

Следует заметить, что при решении краевой задачи в дифференциальной постановке локальные граничные условия могут удовлетворяться либо волнами одной и той же моды, либо для их удовлетворения требуется привлечение нескольких мод. При интегральной постановке этот непростой вопрос решается автоматически, что обусловлено достаточно прозрачной физикой явления, непосредственно связанной с теоремой погашения. Согласно ей, механизм появления рассеянных волн во внутренней среде сводится к возникновению в ней под действием основной волны так называемых вторичных волн. Основная волна описывается вектором состояния $\mathbf{\Psi}_0$. Эта волна как бы индуцирует источники приводящих к излучению вторичных волн. Интерференция этих волн дает требуемые моды колебания. Математически вторичные волны описываются интегральными слагаемыми в (1) справа. Отсюда естественным образом следует алгоритм решения краевой задачи. На первом этапе путем решения интегрального уравнения находится внутреннее поле $\{\mathbf{r},t\} \in V(t)$, а на втором вычисляется внешнее поле $\{\mathbf{r},t\} \notin V(t)$ по найденному внутреннему.

Пусть оси OX и OY лежат на рассеивающей невозмущенной плоскости раздела двух сред, характеризующихся параметрами $\mathbf{B}_i$, V_{Ai}, V_{Si}, ρ_i $(i = 1, 2)$, а ось OZ направлена перпендикулярно этой плоскости внутрь среды $i = 2$. Пусть возмущение поверхности имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z \xi_0 \sin(-\eta y + \Theta t), \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)$ — вектор смещения границы раздела двух сред под действием некоторой сторонней силы.

Для краткости изложения идеи метода положим в уравнениях (1), что $\mathbf{\Omega} = 0$, $N = 0$, т.е. в наличии останутся только альфвеновские и магнитозвуковые волны, в которые вырождаются МАГ волны. Тогда интегральные уравнения относительно скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и магнитного поля $\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$, полностью эквивалентные соответствующим дифференциальным уравнениям магнитогидродинамики и граничным условиям на границе раздела сред будет иметь вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}_n(\mathbf{r},t)+(V_{S1}^2-V_{S2}^2)\hat{F}\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{\Pi}_\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$$
$$+\frac{\hat{F}}{B_1}\left[V_{A1}^2\mathbf{s}_1-\gamma V_{A2}^2\mathbf{s}_2,\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{\Pi}_\mathbf{b}(\mathbf{r},t)\right]$$
$$-V_{A1}^2\hat{F}\left[\mathbf{s}_1,\,\mathrm{rotrot}\left[\mathbf{s}_1-\gamma^{-1}\mathbf{s}_2,\,\mathbf{\Pi}_\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right]\right];$$
$$\gamma=B_1/B_2;\qquad \mathbf{s}_i=\mathbf{B}_i/B_i;\qquad i=1,2, \tag{5}$$

где оператор

$$\hat{F}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial t^2}-V_{A1}^2\Delta-V_{S1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & V_{S1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\\ 0 & V_{S1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial t^2}-V_{S1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\end{pmatrix} \tag{6}$$

записан в ортогональном базисе $\langle\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{s}_1$, причем $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ лежат в плоскости y,z; $\mathbf{B}_i=\{0,B_{iy},B_{iz}\}$ $(i=1,2)$.

Здесь МГД потенциалы скорости и магнитного поля $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{r},\mathbf{b}}(\mathbf{r},t)$ имеют вид

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{\Pi}_\mathbf{u}\\ \mathbf{\Pi}_\mathbf{b}\end{Bmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(\mathbf{r}',t')\\ \mathbf{b}(\mathbf{r}',t')\end{Bmatrix}\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,d\mathbf{r}',$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}G_a & 0\\ 0 & G_m\end{pmatrix}$$

— функция Грина, компонента G_a ответственна за альфвеновские волны, G_m — за магнитозвуковые

$$G_a=-\frac{1}{V_{A1}s_{1z}}\,\delta(x-x')\delta\left(y-y'-\frac{s_{1y}|z-z'|}{s_{1z}}\right)$$
$$\times\,\theta\left(t-t'-\frac{|z-z'|}{V_{A1}s_{1z}}\right),$$
$$G_m=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty+i\sigma_0}^{\infty+i\sigma_0}\exp\left[-iq(t-t')\right]dq$$
$$\times\iiint\limits_{\infty}\frac{\exp[i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{\Delta(q,\mathbf{p})}\,d\mathbf{p}, \tag{7}$$

где благодаря выбранной ориентации поля знаменатель подынтегральной функции приводится к виду

$$\Delta(q,\mathbf{p})=q^4-q^2(V_{A1}^2+V_{S1}^2)\mathbf{p}^2+V_{A1}^2V_{S1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\mathbf{p}^2.$$

Как отмечалось выше, в знаменателе весовой функции Грина стоят выражения (3), представляющие собой дисперсионные уравнения различных типов волн. Из соотношения (2) видно, что в общем случае их компоненты взаимно переплетаются. При рассмотрении же определенного класса задач, в частности, связанных с плоскопараллельными структурами, компоненты весовой функции (7) и дифференциального оператора (6) распадаются на отдельные составляющие, ответственные за каждый тип волн в отдельности.

Пусть на модулированную бегущей синусоидой плоскость падает плоская волна, представляющая собой пакет волн: альфвеновской, имеющей компоненты u_x, b_x, и ускоренной $(+)$ и замедленной $(-)$ магнитозвуковой волн u_j, b_j, $j=2,3$, вида

$$u_{nx}(\mathbf{r},t)=u_{0x}\exp\left[-i\mathbf{k}_{a0}\mathbf{r}+i\omega_0t\right],$$
$$\mathbf{k}_{a0}=\omega_0\mathbf{n}_{a0}/V_{A1}(\mathbf{n}_{a0}\mathbf{s}_1); \tag{8}$$
$$u_{nj}(\mathbf{r},t)=u_{0j}^{+}\exp\left[-i\mathbf{k}_0^{+}\mathbf{r}+i\omega_0t\right]$$
$$+u_{0j}^{-}\exp\left[-i\mathbf{k}_0^{-}\mathbf{r}+i\omega_0t\right];\quad j=2,3, \tag{9}$$

где $\mathbf{k}_0^{\pm}$ удовлетворяет следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega_0^4-\omega_0^2(V_{A1}^2+V_{S1}^2)\mathbf{k}_0^2+V_{A1}^2V_{S1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{k}_0)^2\mathbf{k}_0^2=0.$$

Для нахождения внутреннего $(i=2)$ и внешнего $(i=1)$ полей будем считать, что возмущение ξ мало́ по сравнению с размерами рассеивающей неоднородности, т.е. приближение касается учета движения границы неоднородности. Тогда решение можно представить в виде

$$\mathbf{u}=\sum_k\mathbf{u}^{(k)},\ \ \mathbf{u}^{(k)}\sim|\xi|^k,\ \ \mathbf{b}=\sum_k\mathbf{b}^{(k)},\ \ \mathbf{b}^{(k)}\sim|\xi|^k. \tag{10}$$

С учетом высказанного предположения, если в объемном интеграле перейти к лагранжевым координатам $\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0t)$, где $\mathbf{r}_0$ — координата точки неоднородности в начальный момент времени, то интеграл преобразится следующим образом [4]:

$$\int\limits_{V(t')}f(\mathbf{r}',t')d\mathbf{r}'=\int\limits_{V_0(t')}f(\mathbf{r}_0,t')d\mathbf{r}_0+\oint\limits_{S_0(t')}f(\mathbf{r}_0,t')\big(\boldsymbol{\xi}\mathbf{ds}\big). \tag{11}$$

Подставляя ряды (10) в исходное уравнение (5) и учитывая (11), получим уравнение для n-го члена ряда

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}_k(\mathbf{r},t)+(V_{S1}^2-V_{S2}^2)\hat{F}\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{\Pi}_\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{r},t)$$
$$+\frac{\hat{F}}{B_1}\left[V_{A1}^2\mathbf{s}_1-\gamma V_{A2}^2\mathbf{s}_2,\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{\Pi}_\mathbf{b}^{(k)}(\mathbf{r},t)\right]$$
$$-V_{A1}^2\hat{F}\left[\mathbf{s}_1,\,\mathrm{rotrot}\,\left[\mathbf{s}_1-\gamma^{-1}\mathbf{s}_2,\,\mathbf{\Pi}_\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{r},t)\right]\right],$$

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{\Pi}_\mathbf{u}^{(k)}\\ \mathbf{\Pi}_\mathbf{b}^{(k)}\end{Bmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{r}',t')\\ \mathbf{b}^{(k)}(\mathbf{r}',t')\end{Bmatrix}\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,d\mathbf{r}', \tag{12}$$

причем свободный член этого уравнения определяется соотношениями

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}_n(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r},t)=(V_{S1}^2-V_{S2}^2)\hat{F}\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{H}_{\mathbf{u}}^{(k-1)}(\mathbf{r},t)$$
$$+\frac{\hat{F}}{B_1}\left[V_{A1}^2\mathbf{s}_1-\gamma V_{A2}^2\mathbf{s}_2,\ \mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_{\mathbf{b}}^{(k-1)}(\mathbf{r},t)\right]$$
$$-V_{A1}^2\hat{F}\left[\mathbf{s}_1,\ \mathrm{rotrot}\left[\mathbf{s}_1-\gamma^{-1}\mathbf{s}_2,\ \mathbf{\Pi}_{\mathbf{u}}^{(k-1)}(\mathbf{r},t)\right]\right],$$

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{\Pi}_{\mathbf{u}}^{(k-1)}\\ \mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}}^{(k-1)}\end{Bmatrix}(\mathbf{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\oint\limits_{S_0(t')}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}^{(k-1)}\\ \mathbf{b}^{(k-1)}\end{Bmatrix}\mathbf{G}(\xi\,ds).$$

Таким образом, возмущение включено в свободный член (12) и решение поставленной задачи проводится по следующей схеме. В нулевом приближении уравнение (12) описывает задачу о преломлении и отражении альфвеновской и магнитозвуковых волн плоской границей раздела двух сред. Решение такой задачи получено в [6,7]. При этом решение уравнения (12) в нулевом приближении выражается через невозмущенное падающее поле. Затем вычисляется интеграл, определяющий свободный член в следующем приближении, и по той же схеме находится поле в первом приближении и т. д.

Согласно [6,7], поле прошедшей волны в нулевом приближении имеет вид

$$u_x^{(0)}(\mathbf{r},t)=u_x^{(0)}\exp[-i\mathbf{k}_a^{(0)}\mathbf{r}+i\omega^{(0)}t],\tag{13}$$

$$u_j^{(0)}(\mathbf{r},t)=u_j^{+(0)}\exp\left[-i\mathbf{k}^{+(0)}\mathbf{r}+i\omega^{(0)}t\right]$$
$$+u_j^{-(0)}\exp\left[-i\mathbf{k}^{-(0)}\mathbf{r}+i\omega^{(0)}t\right];\quad j=2,3.\tag{14}$$

Фазовые характеристики внутреннего поля определяются следующими соотношениями: для альфвеновской волны

$$\omega^{(0)}=\omega_0,\ \mathbf{k}_a^{(0)}=\omega_0\mathbf{n}_a^{(0)}/V_{A2}(\mathbf{n}_a^{(0)}\mathbf{s}_2);$$
$$\mathbf{n}_a^{(0)}=\{0,\cos\beta_a,\sin\beta_a\},\tag{15}$$

где угол преломления β_a выражается через угол падения α_a соотношением

$$V_{A1}^2(s_{1y}+s_{1z}\,\mathrm{ctg}\,\alpha_a)=V_{A2}^2(s_{2y}+s_{2z}\,\mathrm{ctg}\,\beta_a);\tag{16}$$

для магнитозвуковых волн

$$\omega^{(0)}=\omega_0,\quad \mathbf{k}^{\pm(0)}=k^{\pm}\mathbf{n}^{\pm},\quad \mathbf{n}^{\pm}=\{0,\cos\beta^{\pm},\sin\beta^{\pm}\},$$

где $k^{\pm}$ определяется соотношением

$$\omega_0^4-\omega_0^2(V_{A2}^2+V_{S2}^2)(\mathbf{k}^{\pm})^2+V_{A2}^2V_{S2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{k}^{\pm})^2(\mathbf{k}^{\pm})^2=0,\tag{17}$$

а углы преломления $\beta^{\pm}$ выражаются через углы падения $\alpha^{\pm}$: $k^{\pm}\sin\beta^{\pm}=k_0\sin\alpha^{\pm}$.

Аналогично записывается внешнее поле, представляющее собой суперпозицию падающей волны (8), (9) и поля следующей отраженной волны: альфвеновской

$$u_x^{(0)}(\mathbf{r},t)=u_{refx}^{(0)}\exp\big[-ik_{a0y}y$$
$$+i(k_0+k_{a0y}s_{1y})(z/s_{1z})+i\omega_0t\big],\quad k_0=\omega_0/V_{A1},\tag{18}$$

магнитозвуковых

$$u_j^{(0)}(\mathbf{r},t)=u_{refj}^{+(0)}\exp\left[-ik_{0y}^{+}y+ik_{0z}^{+}z+i\omega_0t\right]$$
$$+u_{refj}^{-(0)}\exp\left[-ik_{0y}^{-}y+ik_{0z}^{-}+i\omega_0t\right];\quad j=2,3.\tag{19}$$

Для краткости амплитуды не выписаны.

Уравнение нулевого приближения не содержит возмущения, поэтому рассмотрим первое приближение, где возмущение учитывается линейным образом. Для его решения вычислим свободный член для альфвеновской волны

$$u_{x1}(\mathbf{r},t)=\frac{V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{k}_{A1})^2-V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{k}_{A1})^2}{4V_{A1}s_{1z}(\omega_0+\Theta)}u_{0x}\exp[-i\mathbf{k}_{a1}\mathbf{r}+i\omega_1t]$$

$$+\frac{V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{k}_{A2})^2-V_{A2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{k}_{A2})^2}{4V_{A1}s_{1z}(\omega_0-\Theta)}u_{0x}\exp[-i\mathbf{k}_{a2}\mathbf{r}+i\omega_2t],\tag{20}$$

где

$$\mathbf{k}_{a1}=\Big\{0,\,k_{a0y}+\eta,\,\frac{\omega_1}{V_{A2}s_{1z}}-\frac{s_{1y}}{s_{1z}}(k_{a0y}+\eta)\Big\},\quad \omega_1=\omega_0+\Theta,$$

$$\mathbf{k}_{a2}=\Big\{0,\,k_{a0y}-\eta,\,\frac{\omega_1}{V_{A2}s_{1z}}-\frac{s_{1y}}{s_{1z}}(k_{a0y}-\eta)\Big\},\quad \omega_1=\omega_0-\Theta,$$

$$\mathbf{k}_{a1}=\frac{(\omega_0+\Theta)\mathbf{n}_1}{V_{A1}(\mathbf{n}_1\mathbf{s}_1)},\qquad \mathbf{k}_{a2}=\frac{(\omega_0-\Theta)\mathbf{n}_2}{V_{A1}(\mathbf{n}_2\mathbf{s}_1)};$$

для магнитозвуковых волн

$$u_{j1}(\mathbf{r},t)=\sum_{m=1}^{2}\big\{u_{j1m}^{+}\exp[-i\mathbf{k}_m^{+}\mathbf{r}+i\omega_1t]$$
$$+u_{j1m}^{-}\exp[-i\mathbf{k}_m^{-}\mathbf{r}+i\omega_2t]\big\};\quad j=2,3,$$

$$\omega_1=\omega_0+\Theta,\qquad \mathbf{k}_1^{\pm}=\{0,k_{0y}^{\pm}+\eta,q_1^{\pm}\},$$

$$\omega_2=\omega_0-\Theta,\qquad \mathbf{k}_2^{\pm}=\{0,k_{0y}^{\pm}-\eta,q_2^{\pm}\},\tag{21}$$

где $k_m^{\pm}$ являются решением дисперсионного уравнения

$$(\omega_0\pm\Theta)^4-(\omega_0\pm\Theta)^2(V_{A1}^2+V_{S1}^2)(\mathbf{k}_m^{\pm})^2$$
$$+V_{A1}^2V_{S1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{k}_m^{\pm})^2(\mathbf{k}_m^{\pm})^2=0,\tag{22}$$

$u_{j1m}^{\pm}$ определяются через $u_{0j}^{\pm}$ следующими формулами:

$$\begin{pmatrix} u_{21m}^{\pm} \\ u_{31m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{S1}^2(k_{m3}^{\pm})^2 + V_{A1}^2(k_m^{\pm})^2 - \omega_m^2 & -V_{S1}^2 k_{m2}^2 k_{m3}^2 \\ -V_{S1}^2 k_{m2}^2 k_{m3}^2 & V_{S1}^2(k_{m3}^{\pm})^2 - \omega_m^2 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} (V_{S1}^2 - V_{S2}^2)(k_{m2}^{\pm})^2 - V_{A2}^2 s_{23}^2 (k_m^{\pm})^2 & (V_{S1}^2 - V_{S2}^2)k_{m2}^{\pm}k_{m3}^{\pm} + V_{A2}^2 s_{22}s_{23}(k_m^{\pm})^2 \\ (V_{S1}^2 - V_{S2}^2)k_{m2}^{\pm}k_{m3}^{\pm} + V_{A2}^2 s_{23}s_{22}(k_m^{\pm})^2 & (V_{S1}^2 - V_{S2}^2)(k_{m3}^{\pm})^2 - V_{A2}^2 s_{22}^2(k_m^{\pm})^2 + V_{A1}^2(k_m^{\pm})^2 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{u_{20}^{+}}{\delta_1(q_m^{\pm})} + \dfrac{u_{20}^{-}}{\delta_2(q_m^{\pm})} \\ \dfrac{u_{30}^{+}}{\delta_1(q_m^{\pm})} + \dfrac{u_{30}^{-}}{\delta_2(q_m^{\pm})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_m^{\pm} = \{0, k_{m2}^{\pm}, k_{m3}^{\pm}\}, \quad k_{1y}^{\pm} = k_{0y}^{\pm} + \eta, \quad k_{2y}^{\pm} = k_{0y}^{\pm} - \eta,$$

$$\delta_i(q_m^{\pm}) = 2\Big\{-\omega_i^2(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)q_m^{\pm} + V_{A1}^2 V_{S1}^2\big[(s_{1y}k_{iy}^{\pm} + q_m^{\pm}s_{1z})k_{iy}^{\pm} + (s_{1y}k_{iy}^{\pm} + q_m^{\pm}s_{1z})^2 q_m^{\pm}\big]\Big\}; \quad i = 1, 2,$$

где $q_m^{\pm}$ — корни следующего уравнения относительно p_z:

$$(\omega_0 \pm \Theta)^4 - (\omega_0 \pm \Theta)^2(V_{A1}^2 + V_{S1}^2)\big[(k_{my}^{\pm})^2 + p_z^2\big] + V_{A1}^2 V_{S1}^2(s_{1y}k_{my}^{\pm} + p_z s_{1z})^2\big[(k_{my}^{\pm})^2 + p_z^2\big] = 0.$$

Считая формально за падающее поле вычисленные компоненты первого приближения u_{x1}, u_{j1}; $j = 2, 3$ (соотношения (20), (21)), найдем прошедшее поле в первом приближении. Поскольку так называемое падающее поле представляет собой пакет уже шести волн (двух альфвеновских и чытерых магнитозвуковых), то прошедшее поле в первом приближении представляет также шесть плоских волн: двух альфвеновских

$$u_x^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{2u_{x1}'\omega_1^{(1)}V_{A1}\big[\omega_1^{(1)}/V_{A1} - \mathbf{k}_{a1}^{(1)}\mathbf{s}_1\big]}{V_{A1}^2(\mathbf{k}_{a1}^{(1)}\mathbf{s}_1)^2 - V_{A2}^2(\mathbf{k}_{a1}^{(1)}\mathbf{s}_2)^2}\,u_{0x} \times \exp\big[-i\mathbf{k}_{a1}^{(1)}\mathbf{r} + i\omega_1^{(1)}t\big] + \frac{2u_{x1}''\omega_2^{(1)}V_{A1}\big[\omega_2^{(1)}/V_{A1} - \mathbf{k}_{a2}^{(1)}\mathbf{s}_1\big]}{V_{A1}^2(\mathbf{k}_{a2}^{(1)}\mathbf{s}_1)^2 - V_{A2}^2(\mathbf{k}_{a2}^{(1)}\mathbf{s}_2)^2}\,u_{0x} \times \exp\big[-i\mathbf{k}_{a2}^{(1)}\mathbf{r} + i\omega_2^{(1)}t\big], \tag{23}$$

где u_x', u_x'' — амплитуды волн в (20),

$$\omega_1^{(1)} = \omega_0 + \Theta, \qquad \omega_2^{(1)} = \omega_0 - \Theta,$$

$$\mathbf{k}_{ai}^{(1)} = \omega_i^{(1)}\mathbf{n}_{ai}^{(1)}/V_{A2}(\mathbf{n}_{ai}^{(1)}\mathbf{s}_2),$$

$$\mathbf{n}_{ai}^{(1)} = \{0, \cos\beta_{ai}^{(1)}, \sin\beta_{ai}^{(1)}\}; \quad i = 1, 2, \tag{24}$$

угол преломления $\beta_{ai}^{(1)}$ в первом приближении находится из соотношений, аналогичных (16), с той лишь разницей, что под углом падения необходимо подразумевать угол $\alpha_{ai}^{(1)}$, полученный из соотношений

$$\big[\omega_0 + \eta V_{A1}(s_{1y} + s_{1z}\operatorname{ctg}\alpha_a)\big]\big(s_{1y} + s_{1z}\operatorname{ctg}\alpha_{a1}^{(1)}\big) = (\omega_0 + \Theta)(s_{1y} + s_{1z}\operatorname{ctg}\alpha_a),$$

$$\big[\omega_0 + \eta V_{A1}(s_{1y} + s_{1z}\operatorname{ctg}\alpha_a)\big]\big(s_{1y} + s_{1z}\operatorname{ctg}\alpha_{a2}^{(1)}\big) = (\omega_0 - \Theta)(s_{1y} + s_{1z}\operatorname{ctg}\alpha_a),$$

четырех магнитозвуковых

$$u_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{2}\Big\{u_{jm}^{+(1)}\exp[-i\mathbf{k}_m^{+(1)}\mathbf{r} + i\omega_m^{(1)}t] + u_{jm}^{-(1)}\exp[-i\mathbf{k}_m^{-(1)}\mathbf{r} + i\omega_m^{(1)}t]; \quad j = 2, 3,$$

$$\omega_1^{(1)} = \omega_0 + \Theta, \qquad \omega_2^{(1)} = \omega_0 - \Theta, \tag{25}$$

$\mathbf{k}_m^{\pm(1)}$ удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$(\omega_0 \pm \Theta)^4 - (\omega_0 \pm \Theta)^2(V_{A2}^2 + V_{S2}^2)\big(\mathbf{k}_m^{\pm(1)}\big)^2 + V_{A2}^2 V_{S2}^2(\mathbf{s}_2\mathbf{k}_m^{\pm(1)})^2\big(\mathbf{k}_m^{\pm(1)}\big)^2 = 0, \tag{26}$$

направления распространения определяются соотношением $k_{0y}^{\pm} \pm \eta = k_m^{\pm(1)}\sin\beta_m^{\pm}$, $\beta_m^{\pm}$ — углы преломления магнитозвуковых волн; $u_{jm}^{\pm(1)}$ определяются из соотношений, аналогичных для амплитуд в нулевом приближении (14).

Таким образом, с точностью до ξ в первой степени как прошедшее, так и отраженное поле будет состоять из девяти волн с разными частотами, волновыми векторами и амплитудами. Выпишем эти волны.

Прошедшее поле. С частотой $\omega = \omega_0$: волны типа (13), (14) с волновыми числами $\mathbf{k}_a^{(0)}$ (15), $\mathbf{k}^{\pm(0)}$ (17). С частотами $\omega = \omega_0 \pm \Theta$: волны типа (23), (25) с волновыми числами $\mathbf{k}_{ai}^{(1)}$ (24), $\mathbf{k}_m^{\pm(1)}$ (26).

Отраженное поле. С частотой $\omega = \omega_0$: волны типа (18), (19) с волновыми числами $\tilde{\mathbf{k}}_{a0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_0^{\pm}$: $\tilde{\mathbf{k}}_{a0}^{\pm} = \{0, -k_{a0y}, (k_0 + k_{a0}s_{1y})/s_{1z}\}$, $\tilde{\mathbf{k}}_0^{\pm} = \{0, -k_{0y}^{\pm}, k_{0z}^{\pm}\}$. С частотами $\omega = \omega_0 \pm \Theta$: альфвеновские волны $\exp[-i\tilde{\mathbf{k}}_{a1}^{(1)}\mathbf{r} + i(\omega_0 + \Theta)t]$, $\exp[-i\tilde{\mathbf{k}}_{a2}^{(1)}\mathbf{r} + i(\omega_0 - \Theta)t]$, где $\tilde{\mathbf{k}}_{a1}^{(1)} = \{0, -(k_{a0y} + \eta), k_0 + (k_{a0y} + \eta)s_{1y}/s_{1z}\}$, $\tilde{\mathbf{k}}_{a2}^{(1)} = \{0, -(k_{a0y} - \eta), k_0 + (k_{a0y} - \eta)s_{1y}/s_{1z}\}$, и магнитозвуковые $\exp[-i\tilde{\mathbf{k}}_1^{\pm(1)}\mathbf{r} + i(\omega_0 + \Theta)t]$, $\exp[-i\tilde{\mathbf{k}}_2^{\pm(1)}\mathbf{r} + i(\omega_0 - \Theta)t]$, где $\tilde{\mathbf{k}}_m^{\pm(1)}$ удовлетворяет (22), причем

$$\tilde{\mathbf{k}}_1^{\pm(1)} = \Big\{0, -\big(k_{0y}^{\pm} + \eta\big), \sqrt{\big(k_1^{\pm(1)}\big)^2 - \big(k_{0y}^{\pm} + \eta\big)^2}\Big\},$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_2^{\pm(1)} = \Big\{0, -\big(k_{0y}^{\pm} - \eta\big), \sqrt{\big(k_1^{\pm(1)}\big)^2 - \big(k_{0y}^{\pm} - \eta\big)^2}\Big\}.$$

Таким образом, мы видим, что волновые векторы как прошедших, так и отраженных волн с частотами $\omega_0 \pm \Theta$ (боковые сателлиты) лежат в плоскости падения по разные стороны от волновых векторов основных волн с частотой ω_0. Даже в случае нормального падения α_a, $\alpha^{\pm} = 0$ сателлиты будут распространяться под углом к рассеивающей плоскости. В зависимости от соотношения фазовых характеристик падающей волны и модулирующей плоскость синусоиды, а также от угла падения некоторые сателлиты могут исчезать (затухают в пространстве). Так, чтобы отсутствовал сателлит с частотой $\omega_0 - \Theta$ в поле отраженной магнитозвуковой (ускоренной $(+)$ или замедленной $(-)$) волны, необходимо, чтобы фазовая скорость возмущения удовлетворяла условию

$$U_f = \frac{\Theta}{\eta} > \frac{\sqrt{V_{A1}^2 + V_{S1}^2 \pm \sqrt{(V_{a1}^2 + V_{S1}^2)^2 - 4V_{A1}^2 V_{S1}^2 (\mathbf{n}_0^{\pm}\mathbf{s}_1)^2}}}{\sqrt{2}\,(\omega_0/\Theta)\left[\sin\alpha^{\pm} - 1) + 1\right]}. \tag{27}$$

Легко видеть, что при нормальном падении условие (27) определяется альфвеновскими и звуковыми скоростями в соответствующей среде и соотношением частот. При $\omega_0 \gg \Theta$ эти условия легко удовлетворяются при малых значениях U_f. С увеличением Θ диапазон скоростей возмущения U_f, порождающих незатухающие сателлиты, расширяется, стремясь к предельному значению — фазовой скорости магнитозвуковых волн

$$(U_f)^2 = \frac{1}{2}\left\{V_{Ai}^2 + V_{Si}^2 \pm \left[(V_{Ai}^2 + V_{Si}^2)^2 - 4V_{Ai}^2 V_{Si}^2 (\mathbf{n}^{\pm}\mathbf{s}_i)^2\right]^{1/2}\right\};$$

$$i = 1, 2.$$

Естественно, что в следующем приближении по ξ как в прошедшем, так и в отраженном полях будут существенны гармоники с частотами $\omega_0 \pm n\Theta \quad (n > 1)$. Следует также отметить, что если модуляция поверхности осуществлялась вдоль оси OY, а волновые векторы рассматриваемых волн расположены в плоскости YOZ, наличие периодичности в границе раздела сред не приводит к взаимному влиянию альфвеновских и магнитозвуковых волн, хотя замедленная и ускоренная магнитозвуковые волны перемешиваются. При другой ориентации волновых чисел уже в первом приближении по ξ происходит взаимное влияние альфвеновских и магнитозвуковых волн.

Как уже отмечалось, пакет волн в солнечной атмосфере состоит из четырех основных мод. Из проведенного исследования можно как частный случай получить результат по альфвеновским волнам сжатия, положив $V_S = 0$, и акустическим волнам, положив соответственно $V_A \equiv 0$. Более общие случаи (акустико-гравитационные и магнитоакустико-гравитационные волны) можно рассмотреть по разобранному алгоритму.

Список литературы

[1] *Прист Э.Р.* Солнечная магнитогидродинамика. М.: Мир, 1985. 589 с.

[2] *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. М.: Мир, 1964. 80 с.

[3] *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: Тест-радио лтд, 1991. 280 с.

[4] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* Краевые задачи магнитной гидродинамики. Харьков: Тест-радио лтд, 1993. 230 с.

[5] *Александрова А.А., Александров Ю.Н.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 10. С. 6–12.

[6] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* // Укр. физ. журн. 1984. Т. 29. № 10. С. 1497–1503.

[7] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* // Укр. физ. журн. 1986. Т. 31. № 7. С. 1029–1035.