

01;04;10

## О влиянии слабых электростатических возмущений на траектории пролетных частиц в магнитном поле токамака

© А.Ю. Чирков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
105005 Москва, Россия  
e-mail: chirkov@power.bmstu.ru

(Поступило в Редакцию 23 марта 2004 г.)

Представлен анализ траекторий пролетных частиц в магнитной конфигурации токамака под действием слабых электростатических возмущений. В результате численных расчетов в дрейфовом приближении получены траектории, параметры которых позволяют определить пространственный масштаб диффузии. Рассматривается резонансное взаимодействие частиц и волн. Проанализирована возможность возникновения бесстолкновительной диффузии в режиме сильной турбулентности.

### Введение

Форма и параметры траекторий частиц плазмы являются одними из основных факторов, определяющих интенсивность процессов переноса в сложном магнитном поле токамака. Согласно неоклассической теории переноса, в зависимости от частоты столкновений (плотности плазмы) доминирующий вклад вносят либо запертые, либо пролетные частицы. При низком уровне турбулентности в токамаках в  $H$ -режиме потери ионов соответствуют неоклассическим коэффициентам диффузии [1]. Поэтому представляет интерес исследование траекторий частиц в магнитной конфигурации токамака под действием факторов, изменяющих форму и параметры траекторий. Так, существенное искажение траекторий создается тороидальным электрическим полем [2].

В настоящей работе анализируются траектории пролетных частиц в магнитном поле токамака при наличии слабых электростатических возмущений, искажающих траектории частиц и, следовательно, увеличивающих пространственный масштаб диффузии. Расчеты, выполненные ранее для простых магнитных конфигураций, показали, что при достаточно больших амплитудах возмущений и большом количестве мод может возникать бесстолкновительная аномальная диффузия [3–5]. Цель настоящей работы — проанализировать траектории пролетных частиц в токамаке под действием заданных, достаточно слабых возмущений, т.е. таких, которые не обязательно могут вызывать бесстолкновительный перенос. Рассматриваются низкочастотные длинноволновые электростатические возмущения (частота много меньше ионной циклотронной частоты, длина волны существенно больше ларморовского радиуса иона). Расчеты выполнены в дрейфовом приближении. Для определенности в работе рассматриваются ионы. Полученные результаты в принципе могут быть распространены также и на электроны, но при этом необходимо учитывать, что электростатическое взаимодействие легких электронов с более тяжелыми ионами накладывает ограничения на потоки электронов из ловушек. В результате расчетов найдены условия, при которых пространственный мас-

штаб диффузии существенно увеличивается по сравнению со случаем невозмущенных траекторий.

### Расчетная модель

В исходных уравнениях движения ведущего центра частицы наряду с основными факторами, вызывающими дрейф частиц в магнитной конфигурации токамака, также учитывались влияние конечного давления плазмы (что может быть актуально для токамаков с низким аспектным отношением [6]) и радиального электрического поля. В тороидальных координатах ( $r$  — радиус,  $\theta$  — полоидальный угол,  $\varphi$  — тороидальный угол) рассматривалась конфигурация с магнитными поверхностями круглого сечения. Тороидальное магнитное поле в этом случае

$$B_\varphi = \chi \frac{B_0 R}{R + r \cos \theta}, \quad (1)$$

где  $B_0$  — вакуумное магнитное поле на оси;  $R$  — большой радиус тора;  $\chi$  — диамагнитная проницаемость плазмы, учитывающая диамагнитное ослабление поля из-за конечного давления плазмы.

Полоидальная компонента магнитного поля  $B_\theta$  задавалась запасом устойчивости

$$q(r) = \frac{B_\varphi r}{B_\theta R}, \quad (2)$$

модельная зависимость которого в расчетах была принята параболической, монотонно возрастающей от 1.2 до 3.5.

В токамаке частицы испытывают дрейф в направлении, перпендикулярном экваториальной плоскости тора, со скоростью

$$V_y = \frac{mv_{\parallel}^2 + \mu B}{\chi^2 Z e B_0 R}, \quad (3)$$

где  $e$  — заряд электрона;  $Z$  — зарядовое число частицы;  $m$  — масса частицы;  $v_{\parallel}$  — компонента скорости, параллельная магнитному полю;  $\mu$  — магнитный момент частицы;  $B = \sqrt{B_\varphi^2 + B_\theta^2}$ .

Скорость полоидального вращения из-за диамагнетизма

$$V_d = \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{R + r \cos \theta}{\chi} V_y. \quad (4)$$

Потенциал волны задавался в виде

$$\Phi \sim = \Phi_0 g(r) \cos(-\omega t + n_\theta \theta + n_\phi \phi + \psi), \quad (5)$$

где  $\Phi_0$  — амплитуда,  $g(r)$  — радиальный профиль волны,  $\omega$  — частота,  $n_\theta$  — полоидальное волновое число,  $n_\phi$  — тороидальное волновое число,  $\psi$  — начальная фаза.

Компоненты электрического поля волны

$$E_\theta \sim = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi \sim}{\partial \theta}, \quad E_\phi \sim = -\frac{1}{R + r \cos \theta} \frac{\partial \Phi \sim}{\partial \phi}, \quad E_r \sim = -\frac{\partial \Phi \sim}{\partial r}.$$

Отметим, что радиальный профиль моды является результатом нелокального подхода к анализу неустойчивостей [7–10]. В расчетах характерная ширина радиального профиля принималась в несколько раз больше, чем смещение частицы в радиальном направлении.

В рассматриваемом случае уравнения движения ведущего центра имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = V_y \sin \theta + \frac{E_\phi \sim B_\theta - E_\theta \sim B_\phi}{B^2}, \quad (6)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = V_y \cos \theta - V_d + v_\parallel \frac{B_\theta}{B} + \frac{E_r B_\phi}{B^2} + \frac{E_r \sim B_\phi}{B^2}, \quad (7)$$

$$(R + r \cos \theta) \frac{d\phi}{dt} = V_d \frac{B_\theta}{B_\phi} + v_\parallel \frac{B_\phi}{B} - \frac{E_r B_\theta}{B^2} - \frac{E_r \sim B_\theta}{B^2}, \quad (8)$$

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{\mu B \sin \theta}{R + r \cos \theta} \frac{B_\theta}{B_\phi} + \frac{Ze}{m} \frac{E_\theta \sim B_\theta + E_\phi \sim B_\phi}{B}, \quad (9)$$

где  $E_r$  — напряженность радиального статического электрического поля.

## Анализ траекторий и результаты расчетов

Так как у пролетных частиц продольная скорость  $v_\parallel$  на траектории изменяется не очень сильно, то для анализа их невозмущенных траекторий можно полагать

$$\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} \approx \Omega_E + \frac{v_\parallel B_\theta}{rB} \approx \Omega_E + \frac{v_\parallel}{qR}, \quad (10)$$

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} \approx \frac{v_\parallel B_\phi}{(R + r \cos \theta)B} \approx \frac{v_\parallel}{(R + r \cos \theta)}, \quad (11)$$

где

$$\Omega_E = \frac{E_r B_\phi}{rB^2} - \frac{V_d}{r}.$$

Как показали расчеты, под действием волнового поля вида (5) сильней всего отклоняются от невозмущенных траекторий частицы, на траекториях которых выполняется условие резонанса

$$\omega - n_\theta \dot{\theta} - n_\phi \dot{\phi} = 0. \quad (12)$$

Так как  $v_\parallel$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\phi}$  на траектории частицы не являются постоянными величинами, то условие (12) может выполняться только в определенных точках траектории. Следовательно, для того чтобы считать всю траекторию резонансной, необходимо рассматривать не бесконечно узкий резонанс (12), а некоторую окрестность точки, определяемую соотношением (12). Размеры такой резонансной окрестности можно определить, полагая, что максимальное изменение фазы волны на траектории частицы не превосходит  $\pi/2$ .

При  $n_\theta = 0$  вся траектория частицы находится в пределах определенной таким образом резонансной окрестности при выполнении условия

$$\left| \frac{n_\phi \Delta \phi}{\dot{\phi}} \right| < \frac{1}{4}, \quad (13)$$

где

$$\Delta \phi \approx \frac{2v_\parallel r}{R^2 - r^2} \quad (14)$$

— изменение угловой скорости тороидального вращения для невозмущенной траектории.

Условие резонансного взаимодействия (13) выполняется при

$$|n_\phi| < \frac{R^2 - r^2}{8Rr}, \quad (15)$$

что в свою очередь может быть выполнено только в областях, близких к магнитной оси системы. Следовательно, наибольший интерес с точки зрения резонансного взаимодействия представляют возмущения с  $n_\phi = 0$ . При  $n_\phi = 0$  условие резонансного взаимодействия

$$\left| \frac{n_\theta \Delta \dot{\theta}}{\dot{\theta}} \right| < \frac{1}{4}, \quad (16)$$

где относительное изменение угловой скорости полоидального вращения частицы равно

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \dot{\theta}}{\dot{\theta}} &\approx \frac{\Delta v_\parallel}{v_\parallel} \left( 1 + \frac{qR\Omega_E}{v_\parallel} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Rr}{R^2 - r^2} \left( \frac{v_\perp}{v_\parallel} \right)^2 \left( 1 + \frac{qR\Omega_E}{v_\parallel} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Delta v_\parallel$  — максимальное на траектории изменение продольной скорости частицы,  $v_\perp$  — поперечная по отношению к магнитному полю компонента скорости частицы (скорость ларморовского вращения частицы).

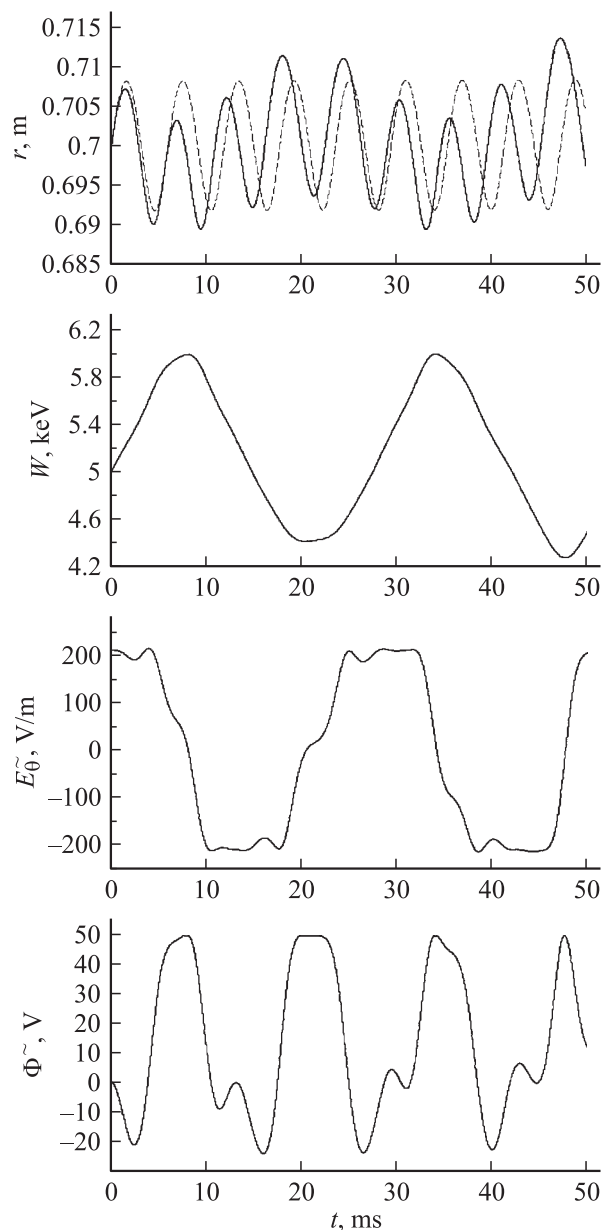
Условие (16) выполняется при

$$|n_\theta| < \frac{R^2 - r^2}{2Rr} \left( \frac{v_\parallel}{v_\perp} \right)^2 \left| 1 + \frac{qR\Omega_E}{v_\parallel} \right|, \quad (18)$$

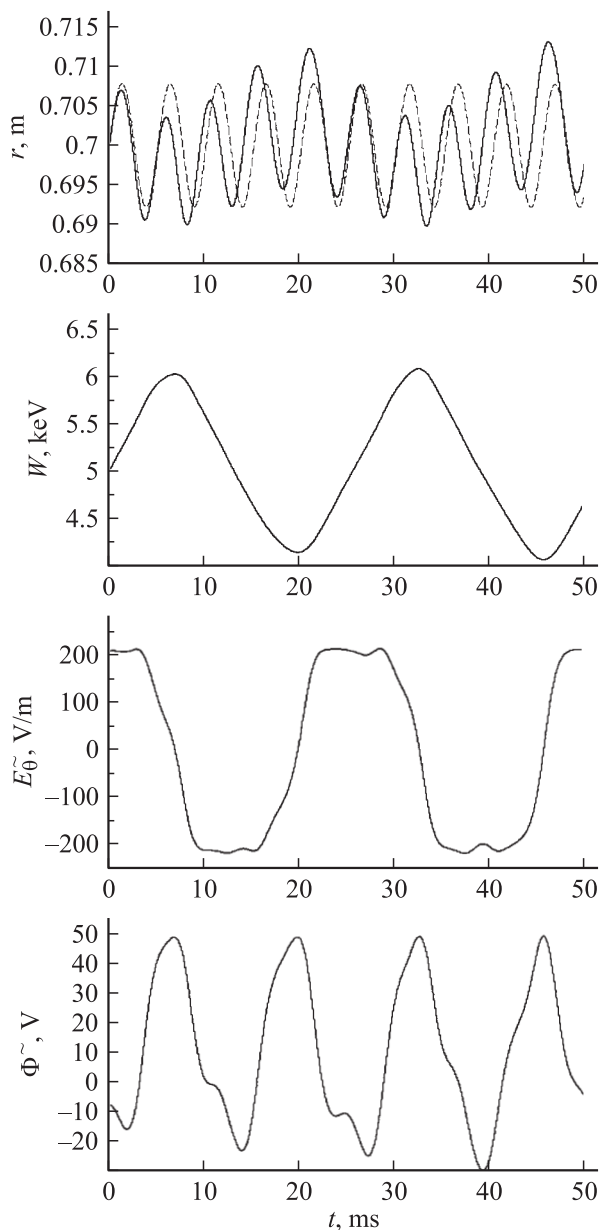
откуда следует, что при достаточно большом отношении продольной и поперечной скоростей частицы полоидальное волновое число резонансной моды может быть также достаточно большим.

На рис. 1–3 представлены примеры результатов расчетов для различных значений полоидального волнового

числа  $n_\theta$  и отношения продольной кинетической энергии в точке старта  $W_{\parallel 0}$  (вычисляемой по продольной компоненте скорости) к полной кинетической энергии в точке старта  $W_0$ . На рисунках приведено изменение радиальной координаты  $r$  со временем (для возмущенной и невозмущенной траекторий), кинетической энергии частицы  $W$ , а также полоидальной компоненты поля волны  $E_{\tilde{\theta}}$  и потенциала волны  $\Phi_{\tilde{\theta}}$  на траектории. В расчетах, представленных на рисунках, радиус старта частицы  $r_0 = 0.7$  м, полоидальный угол старта  $\theta_0 = \pi/2$ . В представленной на рисунках серии расчетов, проведенных для случая традиционного токамака с аспек-



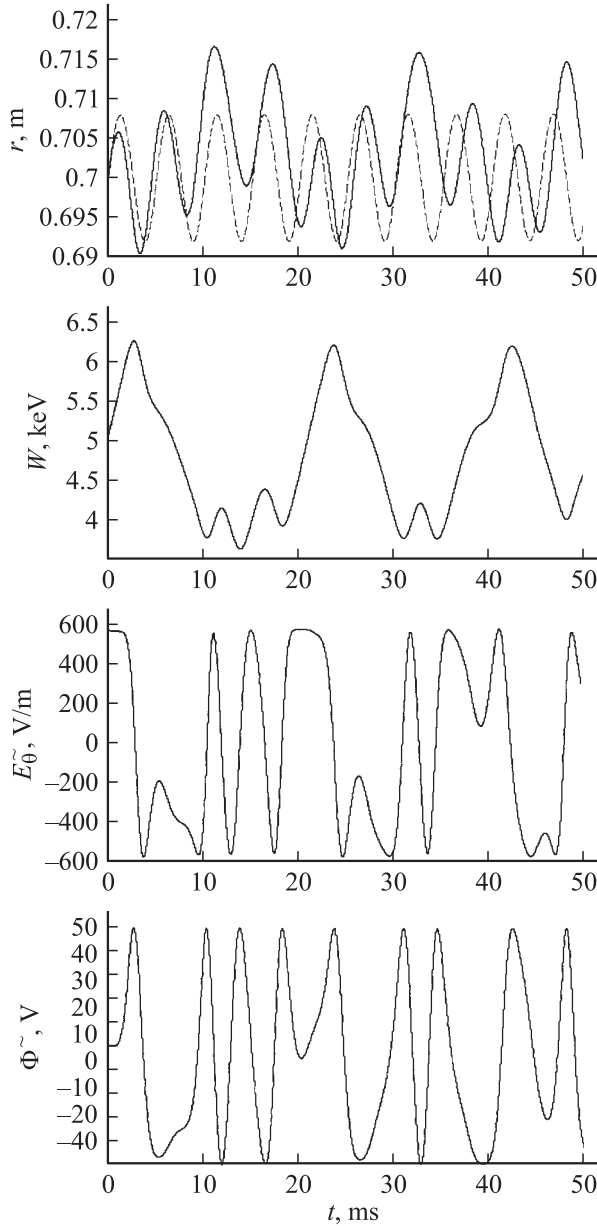
**Рис. 1.** Результаты расчета траектории иона (протона) в магнитном поле токамака под действием волны с  $n_\theta = 3$ ,  $\omega = 3.24 \cdot 10^5$  rad/s,  $W_{\parallel 0}/W_0 = 0.6$ .  $W_0 = 5$  keV,  $\Phi_0 = 50$  V,  $B_0 = 3$  T,  $R = 3$  м, малый радиус тороидального плазменного шнура  $a = 1$  м,  $r_0 = 0.7$  м,  $q(r_0) = 3$ .



**Рис. 2.** Результаты расчета траектории иона (протона) в магнитном поле токамака под действием волны с  $n_\theta = 3$ ,  $\omega = 3.74 \cdot 10^5$  rad/s,  $W_{\parallel 0}/W_0 = 0.8$ ;  $W_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $B_0$ ,  $R$ ,  $a$ ,  $r_0$ ,  $q(r_0)$  те же, что и на рис. 1.

ным отношением  $A = 3$ , мы пренебрегали диамагнитным эффектом, полагая  $\chi = 1$  в связи с малостью давления плазмы.

Как показали расчеты, частица не остается бесконечно долго в резонансе. Это связано, видимо, с изменением энергии частицы под действием волны. Отметим, что для изменения продольной компоненты скорости частицы использовалось уравнение динамики (9). Поэтому энергия частицы не остается постоянной. Значительное изменение энергии связано с продольным ускорением (или замедлением) под действием продольной (по отношению



**Рис. 3.** Результаты расчета траектории иона (протона) в магнитном поле токамака под действием волны с  $n_\theta = 8$ ,  $\omega = 9.98 \cdot 10^5$  rad/s,  $W_{\parallel 0}/W_0 = 0.8$ ;  $W_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $B_0$ ,  $R$ ,  $a$ ,  $r_0$ ,  $q(r_0)$  те же, что и рис. 1.

к магнитному полю) составляющей электрического поля

$$E_{\parallel}^{\sim} \approx \frac{r}{qR} E_{\theta}^{\sim}. \quad (19)$$

В течение пребывания в окрестности резонанса частица непрерывно ускоряется (или замедляется) вдоль магнитного поля, поэтому энергия частицы может существенно изменяться даже при очень небольших значениях амплитуды потенциала волны. Так, в случаях, представленных на рис. 1–3, при отношении  $(Ze\Phi_0)/W_0$  всего 1% энергия изменяется примерно на 20%.

При резонансном взаимодействии скорость радиального смещения

$$V_r \approx \frac{n_\theta \Phi_0}{rB}, \quad (20)$$

а время резонансного взаимодействия может быть определено из расчетов.

Условие (16) позволяет оценить ширину резонанса

$$\delta v_{\parallel} = \left| \frac{v_{\parallel}}{4n_\theta} \left( 1 + \frac{qR\Omega_E}{v_{\parallel}} \right) \right|, \quad (21)$$

где резонансное значение продольной скорости

$$v_{\parallel} = \frac{qR(\omega - n_\theta\Omega_E)}{n_\theta}. \quad (22)$$

При  $\omega \ll \omega_{ci}$  ( $\omega_{ci}$  — ионная циклотронная частота) резонансное значение скорости может быть примерно равно тепловой скорости ионов. Это означает, что резонансное взаимодействие возмущения с ионами будет играть существенную роль как в процессах затухания (или раскачки) волны, так и в процессах переноса частиц поперек магнитного поля.

При искажении траектории возмущающим полем (5) частица находится в резонансной окрестности, если выполняется условие

$$|\Delta v_{\parallel}| + \sqrt{\frac{Ze\Phi_0}{m}} \leq \delta v_{\parallel}. \quad (23)$$

Это условие аналогично условию захвата частицы потенциалом волны для нелинейного затухания Ландау [11]. Условие (23) позволяет оценить максимальное значение амплитуды, при котором возможно резонансное взаимодействие. Так, при  $v_{\perp} \ll v_{\parallel}$ ,  $qR\Omega_E \ll v_{\parallel}$  относительная амплитуда

$$\frac{Ze\Phi_0}{k_B T} < \frac{1}{8n_\theta^2} \left( \frac{v_{\parallel}}{v_T} \right)^2 = \frac{q^2 R^2 (\omega - n_\theta \Omega_E)^2}{8n_\theta^4 v_T^2} \ll 1, \quad (24)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  и  $v_T$  — температура и тепловая скорость рассматриваемых частиц.

При  $qR\Omega_E \gg v_{\parallel}$

$$\frac{Ze\Phi_0}{k_B T} < \frac{1}{8n_\theta^2} \left( \frac{qR\Omega_E}{v_T} \right)^2 \ll 1. \quad (25)$$

В (24) и (25) полагается, что условие малости амплитуд, определяемых этими выражениями, выполняется при  $v_{\parallel} \lesssim v_T$ ,  $qR\Omega_E \ll v_T$ .

## Заключение

Влияние рассмотренных слабых возмущений существенно только при частотах электронно-ионных столкновений не слишком больших по сравнению с частотами возмущений. Такие возмущения могут оказывать заметное влияние на диффузию, если отклонение частицы от

невозмущенной траектории сравнимо или превосходит пространственный масштаб неоклассической диффузии. В столкновительном режиме при слабой турбулентности (инкремент  $\gamma \ll \omega$ , частота электронно-ионных столкновений  $\nu_{ei} \lesssim \omega$ ) коэффициент диффузии резонансных частиц

$$D_{\text{col}} \sim V_r^2 \nu_{ei}^{-1}. \quad (26)$$

Если в плазме присутствует большое количество перекрывающихся мод, то может возникать бесстолкновительная диффузия [12]. В режиме сильной турбулентности ( $\gamma \sim \omega$ ) коэффициент бесстолкновительной аномальной диффузии

$$D_{\text{anom}} \sim V_r^2 \omega^{-1}. \quad (27)$$

Для дрейфовых волн  $\omega \propto k_B T_e (eB)^{-1} L^{-1} r^{-1}$ , где  $L$  — характерный масштаб неоднородности концентрации или температуры, различный для разных типов дрейфовых волн [7–9]. С учетом этого

$$D_{\text{anom}} \propto \left( \frac{e\Phi_0}{k_B T_e} \right)^2 \frac{k_B T_e}{eB} \frac{L}{r}. \quad (28)$$

Необходимо обратить внимание на ряд особенностей модели, существенных при рассмотрении поведения частиц в периферийных областях плазмы. Во-первых, если амплитуды возмущений  $e\Phi_0$  малы по отношению к тепловой энергии частиц  $k_B T$  в центральных областях плазмы (как в примерах на рис. 1–3), то при распространении этих возмущений в периферийные области их амплитуды могут стать сравнимы с  $k_B T$  на периферии, так как температура существенно падает от центральных областей к периферии. В этом случае резонансные частицы могут испытывать так называемый баллистический перенос [13]. Во-вторых, значительное изменение энергии частиц под воздействием возмущений способствует тому, что даже сравнительно небольшой поток резонансных частиц, покидающих ловушку, может уносить значительное количество тепла.

Полученные в работе результаты позволяют оценить потоки резонансных частиц, возникающие под действием слабых возмущений, что в свою очередь может быть актуально при самосогласованном рассмотрении возникновения переноса частиц и раскочки неустойчивостей в плазме.

## Список литературы

- [1] *Burrell K.H.* // Phys. Plasmas. 1997. Vol. 4. P. 1499–1518.
- [2] *Haines M.G., Martin P.* // Phys. Plasmas. 1996. Vol. 3. P. 4536–4544.
- [3] *Khvesyuk V.I., Chirkov A.Yu.* // Fusion Technol. 2001. Vol. 39. (1 T). P. 398–401.
- [4] *Хвесьюк В.И., Чирков А.Ю., Ковалев А.В.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 9. С. 854–857.
- [5] *Хвесьюк В.И., Чирков А.Ю.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 4. С. 18–26.
- [6] *Сайкс А.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. С. 50–57.

- [7] *Huba J.D., Drake J.F., Gladd N.T.* // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. P. 552–561.
- [8] *Ferrato R.D., Sanuki H., Littlejohn R.G., Fried B.D.* // Phys. Fluids. 1985. Vol. 28. P. 2181–2187.
- [9] *Artun M., Tang W.M.* // Phys. Fluids. 1992. Vol. B 4. P. 1102–1114.
- [10] *Idomura Y., Tokuda S., Wakatani M.* // Phys. Plasmas. 1999. Vol. 6. P. 4658–4671.
- [11] *Кингсен А.С.* Введение в нелинейную физику плазмы. М.: МФТИ, 1996. Гл. 3.
- [12] *Horton W., Park H.-B., Kwon J.-M., Strozzi D., Morison P.J., Choi D.-I.* // Phys. Plasmas. 1998. Vol. 5. P. 3910–3917.
- [13] *Van Milligen B.P., de la Luna E., Tabares F.L. et al.* // Nucl. Fusion. 2002. Vol. 42. P. 787–795.