

01;05;06

Влияние разупорядоченности на проводимость двухфазных сильно неоднородных высоко наполненных композитов

© А.А. Снарский,¹ М.В. Шамонин,² М.И. Женировский,¹ Р. Траутнер²¹ Национальный технический университет Украины „КПИ“,
03056 Киев, Украина² Fachberei Technische Hochschule,
Regensburg, Germany
e-mail: phys@ln.com.ua

(Поступило в Редакцию 26 мая 2004 г.)

Рассмотрено влияние небольшого отклонения („шевеления“) структуры от строгой периодичности на эффективную проводимость. Найдены концентрационные и полевые зависимости эффективной проводимости при детерминированных и случайных сдвигах. Проведен численный эксперимент для детерминированных сдвигов как в случае линейных (по полю) включений в линейной матрице, так и в случае линейных включений в нелинейной матрице. Дано сравнение численного счета с результатами аналитического подхода к вычислению эффективной проводимости.

Введение

Мы будем рассматривать двухфазный композит с проводимостями первой, хорошо проводящей, фазы σ_1 и второй, плохо проводящей, σ_2 . Хорошо известно [1], что с увеличением концентрации хорошо проводящей фазы при приближении к порогу протекания p_c в композите происходит резкое возрастание эффективной проводимости σ_e . Это возрастание связано с появлением в образце связного пути (так называемого бесконечного кластера) по хорошо проводящей фазе от одного контакта к другому.

Вблизи порога протекания при концентрации хорошо проводящей фазы несколько меньше или больше p_c эффективная проводимость является аналогом параметра порядка в теории фазовых переходов второго рода [1]. Аналогично параметру порядка σ_e универсальным образом зависит от близости к точке перехода $\tau = (p - p_c)/p_c$ (описывается скейлинговой функцией), поведение σ_e задается небольшим количеством критических индексов. Универсальность поведения означает, что в достаточно большом образце σ_e не зависит от реализации случайной структуры. В частности, можно случайным образом (хаотически) сдвинуть каждое включение хорошо проводящей фазы в плохо проводящей матрице. При этом σ_e не изменится. Образно говоря, система является устойчивой относительно „шевеления“.

Обычно протекание в трехмерной системе наступает приблизительно при $p_c \approx 0.2$, т.е. когда хорошо проводящей фазы еще мало. На практике в ряде случаев требуются композиты с много большей, чем p_c , концентрацией хорошо проводящей фазы — это так называемые высоко наполненные композиты [2]. Концентрация хорошо проводящей фазы при этом близка к максимальной — включения хорошо проводящей фазы упакованы весьма плотно. Можно различать две принципиально разные упаковки: чисто случайную и

упаковку с периодическим (или близкими к нему) расположением включений. Эффективная проводимость случайно расположенных включений хорошо описывается приближением самосогласованного поля, впервые предложенного в [3] (см. также [4], много примеров различных вариантов приближения приведено в [5]) — приближение эффективной среды (ЕМА — от англ. Effective Medium Approximation). За исключением узкой области вблизи порога протекания, где необходимо применять методы теории перколяции, ЕМА удачно описывает многочисленные экспериментальные данные [6]. Однако приближение ЕМА не учитывает взаимное рас-

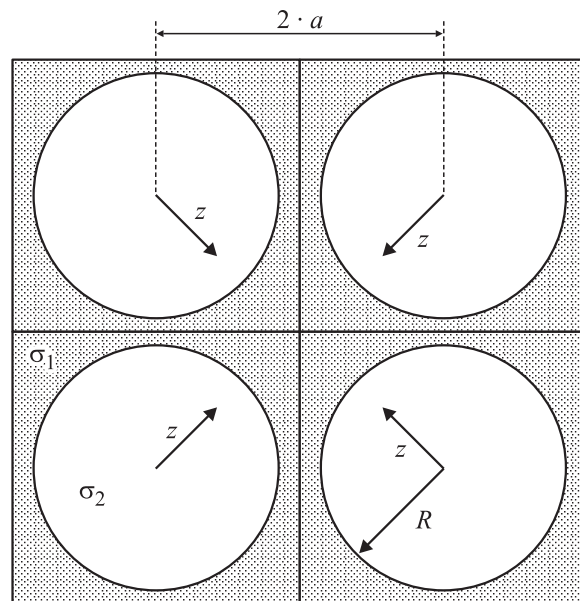


Рис. 1. Начальное, строго периодическое расположение включений. Белым цветом обозначены плохо проводящие включения (σ_2) в хорошо проводящей матрице (σ_1 — серый цвет). Стрелочками с надписью z показано направление простейшего сдвига при численном моделировании.

положение и влияние друг на друга включений. Как хорошо известно [5], приближение ЕМА сводит задачу об эффективной проводимости в среде с включениями, в том числе и задачу о распределении токов в такой среде, к задаче о распределении токов в сетке сопротивлений. При большой концентрации включений, при их „тесном“ расположении, когда невозможно пренебречь влиянием одного включения на другое, приближение ЕМА может давать значительную погрешность.

Будем рассматривать двумерную задачу — включения круговой формы с начальным строго периодическим расположением включений (рис. 1). В реальных композитах эта периодичность нарушена. Нас будет интересовать вопрос, как влияет небольшое отклонение („шевеление“) структуры от строгой периодичности на эффективную проводимость. В подразделе 1.1 мы рассмотрим „шевеление“ структуры при детерминированных сдвигах периодически расположенных двумерных включениях в линейном случае, в подразделе 1.2 проведены сравнения прямого численного счета простейших сдвигов с их теоретическим описанием и определены границы применимости применяемой нами модели. В разделе 2 рассмотрены случайные сдвиги, в разделе 3 решается нелинейная задача (линейные включения в нелинейной матрице) и приводятся сравнения с прямым численным счетом.

1. Сдвиги в случае линейной по полю матрицы

1.1. Детерминированные сдвиги. Для строго периодического расположения двумерных включений круговой (круговые цилиндры) формы решение задачи об эффективной проводимости рассмотрено в [7]. Для краткости будем далее называть хорошо проводящую фазу с проводимостью σ_1 черной, а плохо проводящую с проводимостью σ_2 — белой. Пусть структура представляет собой белые круговые включения в черной матрице. Эффективная проводимость такой структуры (обозначим ее σ_{WB} (WB — от англ. White in Black)) в случае строгой периодичности, согласно [7], имеет вид

$$\sigma_{WB} = \sigma_1 \left(\alpha - \frac{\pi R^2}{4a^2} \right) \left(\alpha + \frac{\pi R^2}{4a^2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

где R — радиус включений, $2a$ — размер ячейки (рис. 1),

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{1}{3}(\eta R^4)^2 - \frac{1}{63}(\eta R^4)^4 \\ &\quad - \frac{5}{9} \left(1 + \frac{4}{5 \cdot 11 \cdot 13^2} \right) (\eta R^4)^6 - \dots, \\ \eta &= K(1/\sqrt{2})^4 / (20a^4), \end{aligned}$$

наконец, $K(1/\sqrt{2}) = 1.85407$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $1/\sqrt{2}$.

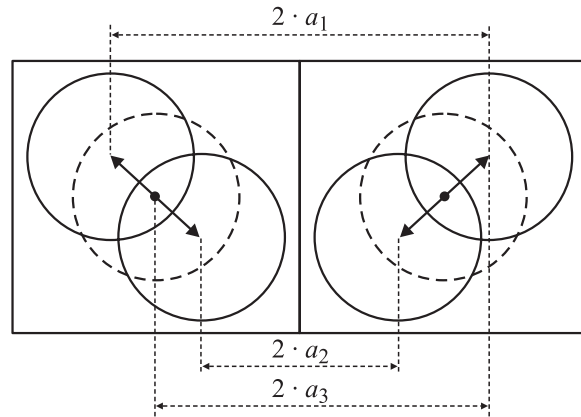


Рис. 2. „Детерминированный“ беспорядок. Показано три варианта сдвигов и соответственно три варианта „эффективных“ значений a_i .

Формула (1) справедлива при $0 \leq R \leq 0.95a$. Также в ней предполагается, что $\sigma_2 = 0$. Заметим, что рассматриваемая, строго периодическая структура эквивалентна сетке контактансов g , равных

$$g(a) = \sigma_1 \left(\alpha - \frac{\pi R^2}{4a^2} \right) \left(\alpha + \frac{\pi R^2}{4a^2} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Рассмотрим, что произойдет при разрушении строгой периодичности. В первом варианте нарушения строгой периодичности зададим „детерминированный“ беспорядок — сдвинем определенным образом каждое включение белой фазы вдоль диагонали квадратной ячейки на величину z (рис. 2) в ту или иную сторону или оставим на месте. Если при этом два включения окажутся отодвинутыми друг от друга, то промежуток между ними увеличится и соответственно увеличится „эффективное значение“ a

$$a_1 = a + \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad g_1 = g(a_1). \quad (3)$$

Если два включения пододвигнутся друг к другу, промежуток между ними уменьшится

$$a_2 = a - \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad g_2 = g(a_2). \quad (4)$$

В третьем случае одно включение сдвинуто, другое осталось на месте

$$a_3 = a + \frac{z}{2\sqrt{2}}, \quad g_3 = g(a_3). \quad (5)$$

Ограничимся пока описанными выше случаями. Тогда в нашей системе окажется три типа „эффективного“ значения a_i (3)–(5), которые и определяют σ_{WB} , такая система эквивалентна сетке, состоящей из трех типов контактансов g_1 , g_2 и g_3 . Одно из возможных расположений контактансов на сетке показано на рис. 3. Из этого рисунка ясно, как было сдвинуто каждое

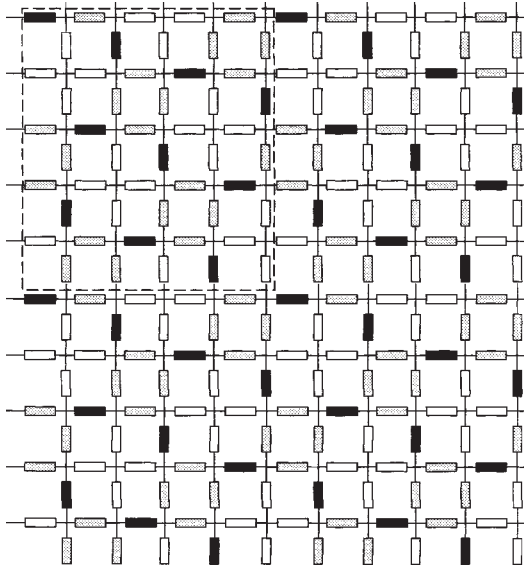


Рис. 3. „Детерминированные“ сдвиги. Черным цветом обозначены хорошо проводящие включения (3), белым — плохо проводящие (4) и промежуточный случай (5) обозначен серым цветом. Пунктирный квадрат — период такой решетки.

включение. Заметим, что при этом данное расположение включений 1) периодически, с постоянной периода в пять постоянный решетки и 2) является изотропным. Концентрация каждого кондактансов, как видно из рис. 3, равна $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$. Эффективная проводимость $\sigma_{WB}(p, z)$ сетки, состоящей из кондактансов g_1 , g_2 и g_3 , можно найти в ЕМА-приближении

$$\sum_{i=1}^3 p_i \frac{\sigma_{WB}(p, z) - g_i}{\sigma_{WB}(p, z) + g_i} = 0. \quad (6)$$

Поскольку включения непроницаемы, величина сдвига центра кругового включения от центра ячейки z ограничена значением z_{\max}

$$z \leq z_{\max} = \sqrt{2}(a - R). \quad (7)$$

На рис. 4 приведены зависимости $\ln(\sigma_{WB}(\tau, z))$ как функции от $\ln(\tau)$ при разных значениях z . Напомним, что $\tau = (p - p_c)/p_c$, где p_c — порог протекания. В данном случае $p_c = 1 - \tau/4$. Очевидно, что $R(\tau) = 2a\sqrt{(1 - p_c(\tau + 1))/\pi}$. Как видно из графика, сдвиг z не меняет наклон зависимости, т.е. не меняет критический индекс. При

$$0.95a < R \leq a \quad (8)$$

выражение (1) уже не работает (из-за этого на z_{\max} накладывается более сильное условие, нежели (7) $z_{\max} = \sqrt{2}(a - R/0.95)$). Здесь можно воспользоваться, например, приближенным решением из [8]

$$\sigma_{WB} = \sigma_1 \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \frac{a - R}{R}}. \quad (9)$$

Выражение (9) записано для случая $R \rightarrow a$, когда сопротивление всей системы набирается в узких перешейках между включениями. Проводимость белой фазы при этом считается равной нулю. Точность выражения (9) можно проверить, сравнив (9) непосредственно с численным счетом (рис. 5), откуда видно, что, начиная с концентраций $p \approx 0.25$ и ниже, формула (1) перестает работать, зато начинает работать формула (9). Тогда вместо (2) получаем

$$g(a) = \sigma_1 \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \frac{a - R}{R}}. \quad (10)$$

Аналогично можно найти зависимость эффективной проводимости и в случае включений хорошо проводящей фазы в плохо проводящей матрице $\sigma_{WB}(p, z)$ (аналогично предыдущему, будем обозначать этот слу-

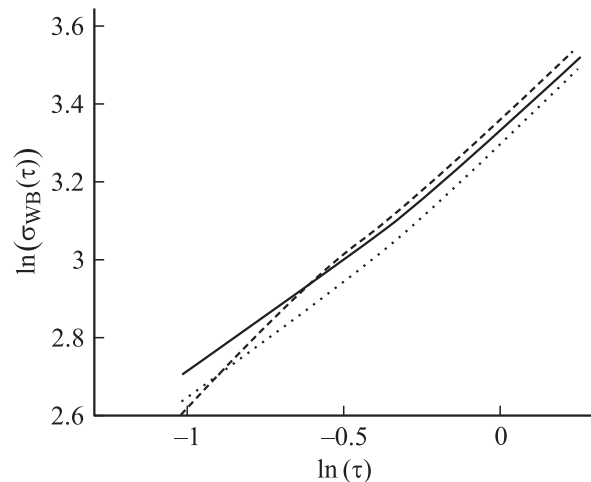


Рис. 4. Зависимости $\ln(\sigma_{WB}(\tau, z))$ как функции от $\ln(\tau)$ при разных значениях сдвига z (случай WB). — бессдвиговый случай ($z = 0$), — — — $z = 0.02$, - - - - $z = 0.05$.

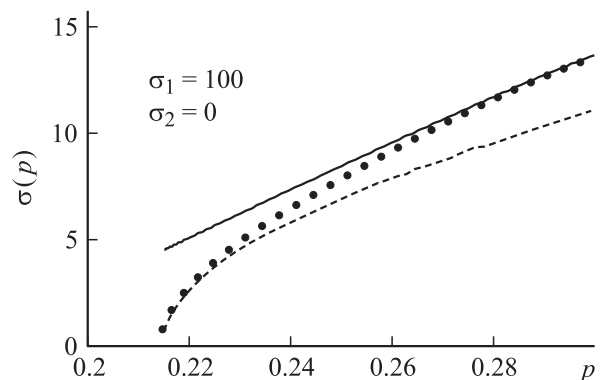


Рис. 5. Определение границ применимости выражений (1) и (9) для зависимости эффективной проводимости от концентрации вблизи порога протекания p_c . — — расчет согласно (1) [см. также [7]], - - - - расчет согласно (9) [см. также [8]], ●●● — численный расчет.

чай BW — Black in White). Формула (2) заменяется на

$$g(a) = \sigma_2 \left(\alpha - \frac{\pi R^2}{4a^2} \right) \left(\alpha + \frac{\pi R^2}{4a^2} \right)^{-1}, \quad (11)$$

а вместо (10) пишем [8]

$$g(a) = \frac{\pi \sigma_2}{\sqrt{2} \frac{a-R}{R}}. \quad (12)$$

Если сдвинуть включения, точно так же как и в рассмотренном ранее случае (WB), то задача вычисления эффективной проводимости сведется к сеточной с теми же самыми значениями a_i (3)–(5), но с другими значениями концентраций $p_1 = p_3 = 0.4$, $p_2 = 0.2$.

1.2. Сравнение с численным экспериментом. Для определения области применения нашей сеточной модели сопротивлений (3)–(5) и (10)–(12) рассмотрим простейшие сдвиги. Выделим квадрат $4a \times 4a$, и пусть каждое включение в этом квадрате сдвигается к его центру на величину z (рис. 1). Такие сдвиги, с одной стороны, точно считаются в рамках нашей модели сопротивлений, а с другой стороны, достаточно легко поддаются прямому численному счету.

В этом случае у нас будет только два типа контактансов (3) и (4), причем $p_1 = p_2 = 0.5$. В случае WB наша „черно-белая“ сетка с контактантами g_1 (White) и g_2 (Black) эквивалентна „серой“ сетке с контактантом

$$\tilde{g}_{WB} = \frac{1}{2} (g_1 + g_2), \quad (13)$$

так как в этом случае g_1 и g_2 оказываются соединенными параллельно. Поступая совершенно аналогично для случая BW вместо (13), получаем

$$\tilde{g}_{BW} = 2 \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2}, \quad (14)$$

так как в этом случае g_1 и g_2 соединяются последовательно. Для случая BW сравнение теории и численного счета дает более хорошее согласование, чем для случая WB (рис. 8) (более подробно о численном счете см. Приложение).

2. Случайные сдвиги в случае линейной по полю матрицы

Обратимся теперь к случаю случайных сдвигов каждого из включений. Причем для конкретности рассмотрим случай WB. Предположим, что при таких сдвигах равновероятно встречаются значения a из некоторого диапазона $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$. Для случая белых включений в черной матрице ЕМА-приближение для используемой модели сопротивлений, сконцентрированных в перешей-

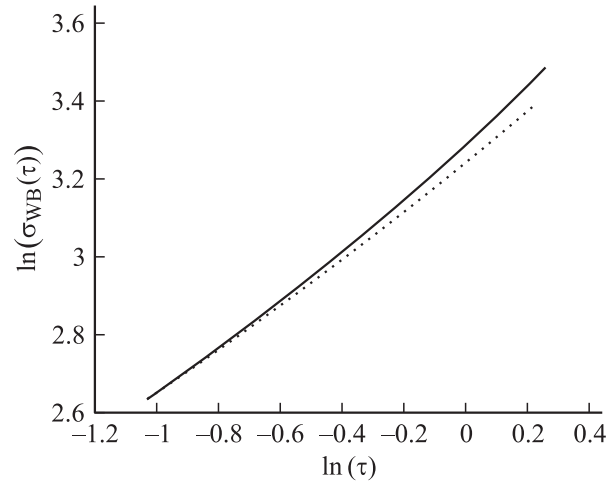


Рис. 6. Случайные сдвиги с равномерным законом распределения величины сдвига (случай WB). — расчет по (16), — — $z = 0$ — нет сдвигов.

ках, приводит к уравнению

$$\int_{g_{\min}}^{g_{\max}} \frac{\sigma_{WB} - g}{\sigma_{WB} + g} S(g) dg = 0, \quad (15)$$

где $S(g) dg = f(a) da$ и, согласно предположению о равномерном распределении расстояний между ближайшими включениями a , $f(a) = 1/(a_{\max} - a_{\min})$ при $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ и нуль вне этого интервала.

Очевидно, что $a_{\min} = R/0.95$, $a_{\max} = 2a - R/0.95$, а $g_{\max(\min)}$ связан с $a_{\max(\min)}$ согласно (2), тогда (15) можно переписать в виде

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{\sigma_{WB} - g(a)}{\sigma_{WB} + g(a)} \frac{da}{a_{\max} - a_{\min}} = 0. \quad (16)$$

На рис. 6 приведен расчет по формуле (16). Видно, что и здесь критический индекс практически не меняется в сравнении с бессдвиговым случаем.

Обратимся теперь к случаю $0.95a < R \leq a$, так как здесь удастся получить аналитическое решение. Вместо (16) с учетом (10) получаем

$$\int_{g_{\min}}^{g_{\max}} \frac{\sigma_{WB} - g}{\sigma_{WB} + g} g dg = 0, \quad (17)$$

где $a_{\min} = R$, $a_{\max} = 2a - R$, $g_{\max(\min)}$ связан с $a_{\max(\min)}$ согласно (9), откуда для σ_{WB} следует нелинейное уравнение

$$2(g_{\max} - g_{\min})\sigma_{WB} - \frac{1}{2}(g_{\max}^2 - g_{\min}^2) - 2\sigma_{WB}^2 \ln \frac{\sigma_{WB} + g_{\max}}{\sigma_{WB} + g_{\min}} = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) дает зависимость σ_{WB} от величин g_{\max} и g_{\min} . Если предположить, что при любом случайном „шевелении“ структуры, т.е. при любом сдвиге включений включения не покидают своей ячейки (сдвиги малые), то значение g_{\max} равно

$$g_{\max} = \frac{2\sigma_1}{\pi} \sqrt{\frac{a-R}{R}}. \quad (19)$$

Заметим сразу, что при $g_{\min} = 0$, т.е. в том случае, когда некоторые включения касаются друг друга ($a = a_{\min} = R$), т.е. перемикают ток, уравнение (18) упрощается настолько, что удастся записать его решение в аналитическом виде

$$\sigma_{WB} = C g_{\max} = C \frac{2\sigma_1}{\pi} \sqrt{\frac{a-R}{R}}, \quad (20)$$

где константа $C = 0.616$ есть решение нелинейного уравнения

$$C \left(1 - C \ln \frac{C+1}{C} \right) = \frac{1}{4}. \quad (21)$$

В случае $g_{\min} \neq 0$ решение уравнения (18) в аналитическом виде получить не удастся. Из (20) непосредственно видно, что при p , близких к p_c , $\sigma_{WB} \sim (p - p_c)^{1/2}$, что наблюдается и для бессдвигового случая [7]. Отметим, что все рассмотренные системы по своему поведению принципиально отличаются от Swess-Chees систем [9,10]. В последних сопротивление также набирается „в узких местах“ между включениями. Однако сами включения расположены хаотически, в частности, в системе возможны области, свободные от включений с размером больше (и значительно больше), чем два периода.

3. Сдвиги в случае нелинейной по полю матрицы

Обратимся теперь к случаю нелинейной матрицы с проводимостью $\sigma_1(E)$, в которой находятся круговые включения с проводимостью σ_2 . Как и в линейном случае, рассматриваем двумерную задачу. Существуют разные типы нелинейности: сильная, слабая и т.д. (см., например, [11–13]). В отсутствие гистерезиса задача о нахождении эффективной проводимости полностью эквивалентна задаче определения эффективной магнитной проницаемости, при этом для магнитной проницаемости ферромагнитной фазы наблюдается нетривиальная нелинейная зависимость от магнитного поля. Поскольку магнитные композиты широко используются в практике и их свойства активно исследуются (см., например, [2]), интересно рассмотреть случай линейных по локальному полю включений в ферромагнитной матрице с пренебрежимо малой петлей гистерезиса. Чтобы не вводить новых обозначений, будем обозначать напряженность магнитного поля H как E , а относительную магнитную проницаемость μ как σ (μ не включает в себя μ_0 —

магнитную постоянную). Стандартная зависимость магнитной проницаемости (например, у стали) от H дана на рис. 7 и в наших обозначениях может быть записана как

$$\sigma_1(E) = 1 + 1.5 \cdot 10^6 \frac{\tanh(5 \cdot 10^{-4} E)}{E} - 2.5 \cdot 10^5 \frac{\tanh(3 \cdot 10^{-3} E)}{E}, \quad (22)$$

а магнитная проницаемость включений обозначена как $\sigma_2 = 1$. В таких магнитных композитах [14–17] наблюдаются сложные нелинейные зависимости отклика всего образца на внешнее магнитное поле, резкие концентрационные зависимости эффективных коэффициентов, связанные с их перколяционным поведением. Кратко остановимся на приближенных методах нахождения эффективной проводимости точно периодической задачи с нелинейностью вида (22), поскольку точного решения такой задачи в общем случае нет.

Рассмотрим вначале метод локальной линеаризации (LL-метод) [18,19], который позволяет получить приближенное аналитическое выражение для эффективных кинетических коэффициентов. В соответствии с ним для нашего случая получаем

$$\sigma_{\text{eff}}(E) = \frac{\sigma_1(E)(\sigma_e(E) - \sigma_2) - \sigma_2(\sigma_e(E) - \sigma_{d1}(E))}{\sigma_{d1}(E) - \sigma_2}, \quad (23)$$

где $\sigma_{d1}(E) = d(\sigma_1(E)E)/dE$ — дифференциальная проводимость; $\sigma_e(E)$ — это какое-либо решение для аналитической (в смысле геометрии) линейной задачи, в котором реальные проводимости фаз заменены на дифференциальные [18,19].

Рассмотренный здесь случай основан на точном решении линейной задачи [7]. Из (1) имеем

$$\sigma_e(R, E) = \sigma_{d1}(E) \frac{\alpha(R, E) - \frac{\pi R^2 \delta(E)}{4a^2}}{\alpha(R, E) + \frac{\pi R^2 \delta(E)}{4a^2}}, \quad (24)$$

где, согласно приближенному LL-методу, аналогично линейному случаю (см. также [7])

$$\delta(E) = (\sigma_{d1}(E) - \sigma_2) / (\sigma_{d1}(E) + \sigma_2),$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3}(\eta R^4)^2 \delta(E)^2 - \frac{1}{63}(\eta R^4)^4 \delta(E)^2 - \frac{5}{9} \left(\delta(E)^2 + \frac{4}{5 \cdot 11 \cdot 13^2} \right) (\eta R^4)^6 \delta(E)^2 - \dots,$$

где R — как и раньше, радиус включения; $2a$ — размер ячейки (рис. 1).

Еще один приближенный метод основан на работах [20,21]. Этот метод хотя и не позволяет получить результат в аналитическом виде (требуется решение системы нелинейных уравнений, которая в общем случае решается только численно), но в некоторых случаях [18,19] дает более точное приближение. Основное

приближение в этом методе состоит в том, что, считая локальное поле внутри включений не зависящим от координат (это имеет место только для включений формы эллипсоида и в том случае, когда можно пренебречь взаимодействием включений), предполагается, что проводимость в нелинейной фазе $\sigma_1 = \sigma_1(E(\mathbf{r}))$ (\mathbf{r} — радиус-вектор) может быть заменена постоянной $\tilde{\sigma}_1$, не зависящей от координат,

$$\tilde{\sigma}_1 = \langle \sigma_1(E) \rangle_1, \quad (25)$$

где усреднение берется по объему нелинейной фазы, $\langle \dots \rangle = (1/V_1) \int \dots dV$.

Второе приближение заключается в замене, которая в терминах, используемых в данной работе, имеет вид

$$\tilde{\sigma}_1 = \langle \sigma_1(E) \rangle_1 \rightarrow \sigma_1 \left(\sqrt{\langle E^2 \rangle_1} \right). \quad (26)$$

Двухфазная среда с коэффициентами $\sigma_1(E(r))$ и $\sigma_2 = 1$ (вторая фаза линейная) заменяется на двухфазную среду с $\sigma_1(\sqrt{\langle E^2 \rangle_1})$ и σ_2 , т.е. такую, в которой локальная σ_1 не зависит от локального поля $E = E(r)$. При заданном внешнем поле $\langle E \rangle$ вся первая фаза имеет одно и то же значение $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1$, определяемое $\langle E^2 \rangle_1$.

Таким образом, с одной стороны, для определения σ_{eff} двухфазной среды с фазами $\tilde{\sigma}_1$ и σ_2 можно воспользоваться любым решением аналогичной линейной задачи. Например, это может быть приближение среднего поля (ЕМА-приближение) [3,4,15,16,19] или выражение (1). А с другой стороны, для определения $\langle E^2 \rangle_1$ можно воспользоваться равенством $\langle jE \rangle = \langle j \rangle \langle E \rangle$, (см., например, [22]), из которого следует $\sigma_{\text{eff}} \langle E \rangle = p \sigma_1 \langle E^2 \rangle_1 + (1-p) \sigma_2 \langle E^2 \rangle_2$, где $\langle \dots \rangle_{1,2}$ — усреднение по 1-й или 2-й фазе соответственно, p — концентрация первой фазы. Окончательно получаем

$$\langle E^2 \rangle_1 = \frac{\langle E \rangle^2}{p} \frac{\partial \sigma_{\text{eff}}}{\partial \tilde{\sigma}_1}. \quad (27)$$

Подстановка (1) (где всюду произведена замена σ_1 на $\tilde{\sigma}_1$) в (27) дает нелинейное уравнение для определения $\langle E^2 \rangle_1$. Находя его и подставляя в (1), получаем σ_{eff} как функцию внешнего поля $\langle E \rangle$, концентрации и параметров функции нелинейности.

На рис. 7 приведены полевые зависимости, полученные выше описанными методами, и прямой численный расчет. Видно, что до значения поля, при котором $\sigma_{\text{eff}}(E)$ имеет максимальное значение, оба метода дают удовлетворительный результат. А в области более сильных полей оба метода дают лишь качественную оценку. Видно, что в данном случае метод работ [20–22] дает относительно менее точный результат, чем LL-метод (при том, что он занимает несравнимо больше машинного времени для численного счета, нежели первый). Поэтому для оценки эффективной проводимости при наличии сдвигов мы будем использовать LL-метод.

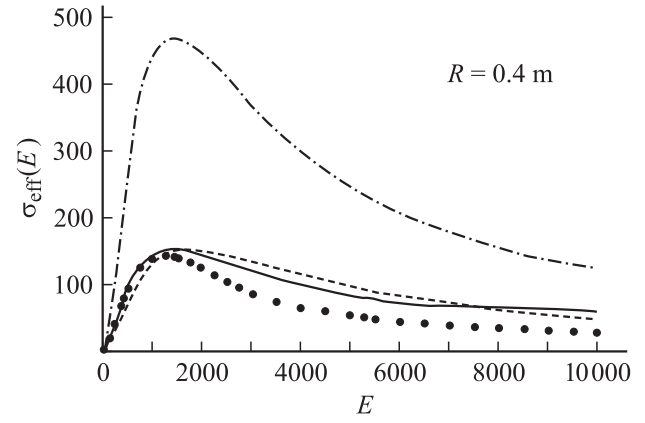


Рис. 7. Полевые зависимости проводимости нелинейной фазы и эффективной проводимости. — · — · — нелинейная фаза; — — — — эффективная проводимость, расчет LL-методом [18,19]; - - - - — эффективная проводимость, расчет методом работ [20,21]; ●●● — эффективная проводимость, прямой численный расчет.

Рассмотрим сдвиги из подраздела 1.2. Поскольку практически во всем диапазоне изменения поля имеет место неравенство $\sigma_1(E) \gg \sigma_2$, мы имеем в данном случае плохо проводящие включения в хорошо проводящей матрице (случай WB) и линейная модель описывается формулой (13). Окончательно получаем

$$\sigma_{\text{eff}}(E, z) = \frac{\sigma_1(E)(\sigma_e(E, z) - \sigma_2) - \sigma_2(\sigma_e(E, z) - \sigma_{d1}(E))}{\sigma_{d1}(E) - \sigma_2}, \quad (28)$$

где, согласно (13), $\sigma_e(E, z) = 0.5(\sigma_{e1}(E, z) + \sigma_{e2}(E, z))$, а

$$\sigma_{ei}(E, z) = \sigma_{d1}(E) \frac{\alpha_i(E, z) - \frac{\pi R^2 \delta(E)}{4a_i(z)^2}}{\alpha_i(E, z) + \frac{\pi R^2 \delta(E)}{4a_i(z)^2}}, \quad (29)$$

$$\alpha_i(E, z) = 1 - \left(0.333(\eta_i(z)R^4)^2 + 0.016(\eta_i(z)R^4)^4 + 2.4 \cdot 10^{-4}(\eta_i(z)R^4)^6 \right) \delta(E)^2 - 0.556(\eta_i(z)R^4)^6 \delta(E)^4, \quad (30)$$

$\eta_i(z) = (1.85407/a_i(z))^4/20$ и, наконец, согласно (3), (4), $a_1(z) = a + z/\sqrt{2}$, $a_2(z) = a - z/\sqrt{2}$. Всюду $i = 1, 2$.

Заключение

В линейном случае рассмотренная слабая разупорядоченность не разрушает скейлинговой зависимости эффективной проводимости от близости к порогу протекания τ (рис. 4, 6, а также (20)). Интересно также отметить, что при случайных сдвигах и предельных концентрациях включений (см. (20)) получился критический индекс, равный точно 1/2, что с очень хорошей точностью соответствует бессдвиговому случаю [7].

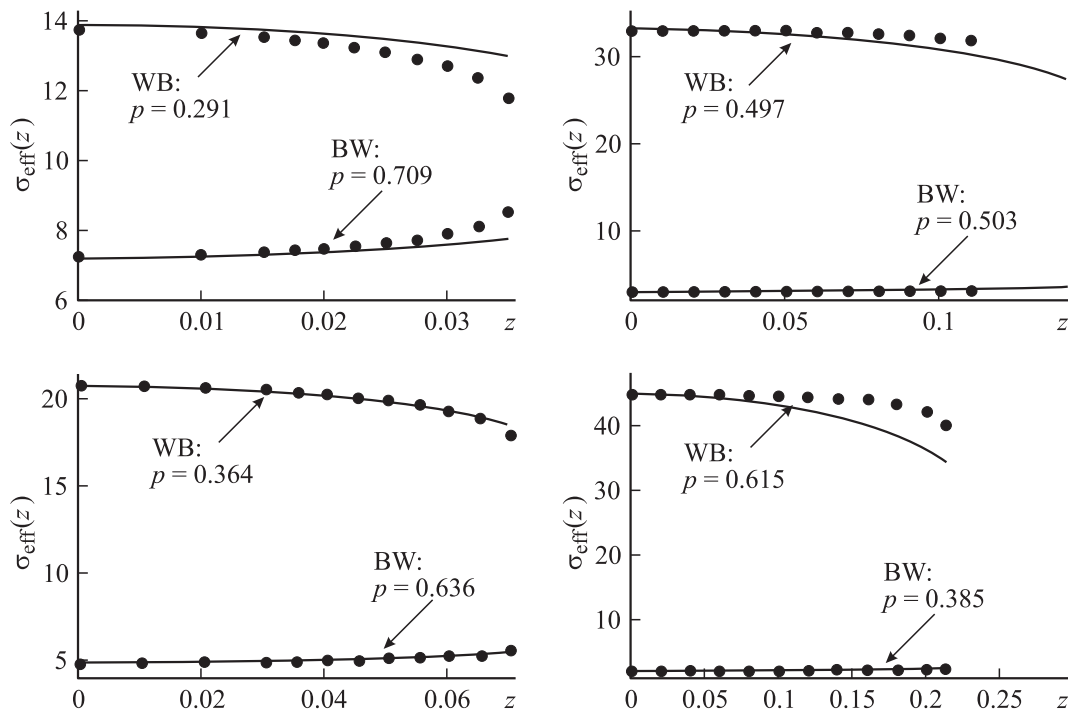


Рис. 8. Определение рабочего диапазона по концентрациям для случаев плохо проводящих включений в хорошо проводящей матрице (WB) и хорошо проводящих включений в плохо проводящей матрице (BW), путем сравнения расчетов по (13), (14) и прямого численного расчета. — — теоретический расчет (формулы (13), (14)); ••• — численный.

В нелинейном случае рассмотрен только один вид нелинейности, присущей зависимости магнитной проницаемости ферромагнетика. Как показал прямой численный эксперимент, приближенные методы удовлетворительно описывают полевые и концентрационные зависимости до значения поля, при котором $\sigma_{\text{eff}}(E)$ имеет максимальное значение (рис. 7).

Приложение

Численное моделирование проводилось с помощью коммерческого пакета OPERA-2D фирмы „Vector Fields“ [23]. Эта программа использует метод конечных элементов для прямого решения уравнений Максвелла в двумерном пространстве. Графический препроцессор позволяет представить двумерные объекты в форме полигонов со сторонами заданной кривизны и приписать этим полигонам свойства соответствующих материалов. Автоматический сеточный генератор разбивает эти области на отдельные элементарные подобласти, так называемые конечные элементы. Внутри каждого конечного элемента решение ищется в форме простых функций, например полиномов. Из соображений симметрии достаточно решить уравнения Максвелла в пределах одной элементарной ячейки. Такой элементарной ячейкой является квадрат $2a \times 2a$, внутри которого находится область круглой формы. Квадрат и область круглой формы состоят из разных материалов, например нелинейный материал и воздух. Для задания внешнего поля на противоположных сторонах элементарной ячейки задавались

постоянные значения электрического потенциала φ , так что $\Delta\varphi = E_{\text{out}} \cdot 2 \cdot a$. Эти стороны являются эквипотенциальными поверхностями, и на них тангенциальная компонента электрического поля обращается в нуль. На двух противоположных сторонах ячейки (параллельных внешнему полю) задавалось условие, что нормальная компонента электрического поля там обращается в нуль. Задача решалась в режиме автоматического улучшения сеточного разбиения. Критерием сходимости являлось отличие решения на двух последовательных шагах менее 0.1%. Процессорное время на стандартном персональном компьютере менялось от 1 min для случайных линейных материалов до 3 h для нелинейных моделей вблизи порога перколяции.

На рис. 8 приведены результаты численного расчета. Как видно из рис. 8, рассматриваемое приближение („серая“ сетка) удовлетворительно работает при концентрациях „черной“ фазы $0.2916 < p < 0.497$. Это легко объяснить, так как при $p < 0.2916$ перестает работать (2), а при $p > 0.497$ необходимо учитывать взаимодействие между включениями, что это приближение не учитывает. Для случая BW диапазон концентраций „черной“ фазы, при которой работает модель „серой“ сетки, будет (рис. 8) в пределах от 0.385 до 0.709. Заметим, что он шире, чем в случае WB.

А.А. Снарский DAAD за поддержку данной работы (грант № A/02/16226), М. Женировский и Р. Траутнер выражают благодарность Scheubeck-Jansen-Stiftung за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] Шкловский Б.И., Эфрос А.А. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
- [2] Fiske T.J., Gokturk H.S., Kalyon D.M. // Society of Plastic Engineers ANTEC Technical Papers. 1993. Vol. 39. P. 614.
- [3] Bruggeman D.A. // Ann. der Phys. 1935. Vol. 24. P. 636–679.
- [4] Landauer R. // J. Appl. Phys. 1952. Vol. 23. P. 779.
- [5] Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
- [6] Proc. Int. Conf. on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media. Vol. 3. / Ed. W.L. Mochan, R.G. Barrera. Physica A 207. 1994. Vol. 4. / Ed. A.M. Dykhne, A.N. Lagarkov, A.K. Sarychev. Physica A 241. 1997. Vol. 5. / Ed. P.M. Hui, P. Sheng, L.-H. Tang. Physica B 279. 2000.
- [7] Балагуров Б.Я., Кашиш В.А. // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. Вып. 5. С. 978–989.
- [8] Keller J.B. // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34. P. 991–993.
- [9] Halperin B.I., Feng S. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 2391–2394.
- [10] Feng S., Halperin B.I., Sen P.N. // Phys. Rev. B 1987. Vol. 35. P. 197–214.
- [11] Снарский А.А., Буда С.И. // Электричество. 1988. Т. 2. С. 67–72.
- [12] Kenkel S.W., Straley J.P. // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 767.
- [13] Straley J.P., Kenkel S.W. // Phys. Rev. B 1984. Vol. 29. P. 6299.
- [14] Fiske T.J., Gokturk H.S., Kalyon D.M. // J. Mat. Sci. 1997. Vol. 32. P. 5551.
- [15] Бакаев В.В., Снарский А.А., Шамонин М.В. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 84–87.
- [16] Бакаев В.В., Снарский А.А., Шамонин М.В. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 129–132.
- [17] Shamoin M., Snarskii A., Zhenirovskiy M. // NDT&E International. 2004. Vol. 37. P. 35–40.
- [18] Snarskii A.A., Zhenirovskiy M.I. // J. Phys. B 2002. Vol. 32. P. 84–91.
- [19] Снарский А.А., Шамонин М.В., Женировский М.И. // ЖЭТФ. 2003. Т. 123. Вып. 2. С. 79–91.
- [20] Hui P.M., Woo Y.F., Wan W.M.V. // J. Phys. Condens. Matter 1995. Vol. 7. P. L593–L597.
- [21] Hui P.M., Cheung P., Kwong Y.R. // Physica A 1997. Vol. 241. P. 301–309.
- [22] Дыхне А.М. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 110–115.
- [23] <http://www.vectorfields.co.uk>