01;09

Синтез токов по заданной направленности на диске

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
173003 Великий Новгород, Россия
e-mail: theorphy@novsu.ac.ru

(Поступило в Редакцию 27 апреля 2004 г.)

Решается проблема синтеза токов по заданной реализуемой или нереализуемой диаграмме направленности. Если диаграмма направленности реализуема, то задача решается аналитическим методом: ток ищется в виде ряда по базису, каждая функция которого удовлетворяет условию Мейкснера на ребре. Если диаграмма нереализуема, то ток находится из решения интегрального уравнения с малым параметром. Решение интегрального уравнения также удовлетворяет условию Мейкснера на ребре.

1. Постановка задачи

Проблема синтеза токов на поверхности круга является фундаментальной, она рассматривалась многими авторами. В работах [1,2] предложены аналитические методы нахождения токов по заданной реализуемой диаграмме направленности.

В работе [3] предлагается находить токи по произвольной диаграмме направленности из решения интегрального уравнения с малым параметром. Однако решение может не удовлетворять условию Мейкснера на ребре.

Целью данной работы является нахождение поверхностных токов, удовлетворяющих условию Мейкснера на ребре. Для решения этой проблемы в данной работе применяются новые методы, разработанные в работах [4–6], а также система функций, учитывающая условие Мейкснера на ребре и предложенная в работе [7].

2. Исходные интегральные уравнения синтеза

Связь между поверхностными токами $\mathbf{j}(j_r, j_\varphi)$ и диаграммой направленности $\mathbf{F}(F_\theta, F_\varphi)$ описывается системой двух интегральных уравнений [6]

$$\iint\limits_S \left[j_r(\mathbf{t}_\theta \cdot \mathbf{t}_{r'}) + j_\varphi(\mathbf{t}_\theta \cdot \mathbf{t}_{\varphi'}) \right] \exp(ikr'\cos\gamma)ds = F_\theta, \quad (1)$$

$$\iint\limits_S \left[j_r(\mathbf{t}_\varphi \cdot \mathbf{t}_{r'}) + j_\varphi(\mathbf{t}_\varphi \cdot \mathbf{t}_{\varphi'}) \right] \exp(ikr'\cos\gamma)ds = F_\varphi, \quad (2)$$

где $\mathbf{t}_\theta, \mathbf{t}_\varphi, \mathbf{t}_R$ — орты сферической системы координат; $\mathbf{t}_{\varphi'}, \mathbf{t}_{r'}$ — орты полярной системы координат на поверхности круга; r' — расстояние между началом системы координат и точкой излучения на поверхности S; γ — угол между направлениями на точку наблюдения и точку излучения, проведенными из начала координат.

Система уравнений (1) и (2) является системой двух связанных интегральных уравнений с двумя неизвестными. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда токи и диаграмма не зависят от угла φ.

Тогда система распадается на два независимых уравнения. После ряда элементарных преобразований уравнение радиальных токов будет иметь вид

$$2\pi i \cos\theta \int\limits_0^a j_r(r')J_1(kr'\sin\theta)r'dr' = F_\theta(\theta), \quad (3)$$

а уравнение для азимутальных токов преобразуется к виду

$$2\pi i \sin\theta \int\limits_0^a j_\varphi(r')J_1(kr'\sin\theta)r'dr' = F_\varphi(\theta), \quad (4)$$

где k — волновое число, J_1 — функция Бесселя.

3. Сущность проблемы синтеза

Из решения уравнения (3) нужно найти токи, удовлетворяющие условию Мейкснера,

$$j_r(r) \approx \sqrt{a^2 - r^2}, \quad r \to a,$$

а решение уравнения (4) должно обращаться в бесконечность по закону

$$j_\varphi(r) \approx \frac{1}{\sqrt{a - r^2}}, \quad r \to a.$$

С другой стороны, интегральные уравнения (3) и (4) имеют одинаковую структуру, они отличаются лишь коэффициентом перед интегралом. Этот коэффициент не влияет на структуру интегрального уравнения.

После замены $\sin\theta = x$ и несложных преобразований оба уравнения можно записать в едином виде

$$\int\limits_0^1 j(t)J_1(axt)tdt = F(x), \quad (5)$$

где J_1 — функция Бесселя.

Уравнение (5) не несет в себе информацию о токе. Оно не является достаточным для нахождения тока с нужным поведением на ребре. Поэтому для решения задачи синтеза необходимо привлечь дополнительную информацию. Такой информацией может быть указание функционального пространства, которому принадлежат токи. Пространство токов в свою очередь можно определить из решения задачи анализа, т. е. задачи нахождения токов, наведенных первичным полем.

Интегральное или интегродифференциальное уравнение задачи анализа содержит полную информацию о поведении тока на ребре.

Наконец отметим, что пространство токов полностью определяется геометрией поверхности и поляризацией. Поэтому задача синтеза антенн в первую очередь это задача построения пространства токов.

4. Пространства токов. Базисы

Пространство токов строится по оператору задачи анализа, а точнее, главной положительной части. Для радиальных токов оператор имеет вид

$$Aj_r = \int_0^{+\infty} J_1(ax\tau)\tau x^2 \int_0^1 j_r(t)J_1(axt)tdtdx, \qquad (6)$$

а для азимутальных токов он имеет следующий вид:

$$Lj_\varphi = \int_0^{+\infty} J_1(ax\tau)\tau \int_0^1 j_\varphi(t)J_1(axt)tdtdx. \qquad (7)$$

Операторы A и L являются положительными. В качестве пространств возьмем энергетические пространства этих операторов H_A и H_L. Скалярное произведение и норма, например, в H_A определяется по формулам

$$[u, v] = (Au, v),\ [u]^2 = (Au, u), \qquad (8)$$

где $(.,.)$ скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

В работе [7] предложена система функций $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, преобразование Ханкеля которых имеет вид

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)J_1(axt)tdt = \sqrt{4n+1}\,\frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(ax)}{x^{\frac{3}{2}}}, \qquad (9)$$

а также предложена система функций $\psi_n(t)$, таких что

$$\widetilde{\psi}_n(x) = \int_0^1 \psi_n(t)J_1(axt)tdt = \sqrt{4n+1}\,\frac{J_{2n-\frac{1}{2}}(ax)}{x^{\frac{1}{2}}}. \qquad (10)$$

При этом функции φ_n имеют такое же поведение на ребре, как радиальные токи, а ψ_n — как азимутальные токи. Иначе говоря, функции φ_n и ψ_n удовлетворяют условию Мейкснера на ребре. Кроме того, указанные функции оказываются ортогональными, а именно

$$(A\varphi_m, \varphi_n) = \sqrt{(4m+1)(4n+1)} \times \int_0^{+\infty} \frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(ax)J_{2n+\frac{1}{2}}(ax)}{x}dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1,\ m = n, \\ 0,\ m \neq n. \end{cases} \qquad (11)$$

Последний интеграл найден как табличный интеграл [8]. Также справедливо соотношение

$$(L\psi_m, \psi_n) = \delta_{mn}.$$

Таким образом, система функций $\{\varphi_n\}_{n+1}^{+\infty}$ образует ортонормированный базис пространства H_A, а система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ составляет базис пространства H_L.

5. Синтез токов по реализуемой диаграмме. Критерий реализуемости

Вернемся к уравнению синтеза

$$Kj = \int_0^1 j(t)J_1(axt)tdt = F(x), \quad 0 \le x \le 1. \qquad (12)$$

Если рассматривать оператор K, определяемый левой частью из пространства H_A в пространстве $L_2[0, 1]$, то он будет вполне непрерывным, а следовательно, необратимым. Однако если рассматривать оператор K из H_A в некоторое пространство на полупрямой, т. е. $0 \le x < +\infty$, то оператор оказывается обратимым. Введем гильбертово пространство $H_1(0, +\infty)$ с помощью скалярного произведения

$$(u, v)_1 = \int_0^{+\infty} u(x)\overline{v(x)}x^2dx \qquad (13)$$

и будем полагать правую часть (12) $F(x)$ элементом этого пространства. Найдем диаграммы, отвечающие базисным функциям токов φ_n. Согласно (9), имеем

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = K\varphi_n = \sqrt{4n+1}\frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(ax)}{x^{\frac{3}{2}}}. \qquad (14)$$

Полученные диаграммы оротогональны. Оператор K как оператор из пространства H_A в пространство $H_1(0, +\infty)$ является изоморфизмом, норма при этом отображении не меняется. Поэтому образ H_A при этом отображении $\mathrm{Im}K$ будет замкнутым множеством. На нем определен и ограничен обратный оператор K^{-1}.

Произвольную функцию диаграмм F из класса диаграмм разложим по ортонормированному базису $\widetilde{\varphi}_n(x)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\widetilde{\varphi}_n(x), \quad C_n = (F, \widetilde{\varphi}_n)_1. \qquad (15)$$

Критерием реализуемости диаграмм направленности является, во-первых, принадлежность к пространству $H_1(0, +\infty)$, а во-вторых, уравнение замкнутости

$$\|F\|_1^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2. \tag{16}$$

Коль скоро имеется разложение (15) для диаграммы направленности, то немедленно имеем разложение для тока

$$j(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \varphi_n(t). \tag{17}$$

Задача синтеза азимутальных токов решается аналогично. При этом оператор K рассматривается из пространства H_L в пространстве $H_0(0, +\infty)$, определяемое скалярным произведением

$$(u, v)_0 = \int_0^{+\infty} u(x)\overline{v(x)}dx. \tag{18}$$

Образцы токов ψ_n при отображении K образуют замкнутое множество реализуемых диаграмм. Затем, разлагая произвольную реализуемую диаграмму в $H_0(0, +\infty)$ по базису

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \widetilde{\psi}_n(x), \quad C_n = (F, \widetilde{\psi}_n)_0, \tag{19}$$

находим токи

$$j(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \psi_n(t), \tag{20}$$

реализующие заданную диаграмму направленности.

6. Синтез токов по произвольной, необязательно реализуемой диаграмме

Если диаграмма нереализуема, то ставится задача найти токи, реализующие близкую диаграмму и имеющие наименьшую норму. Для решения этой задачи в работах [5,6,8] предложены уравнения с малым параметром. Для радиальных токов это уравнение запишется в виде

$$Aj + K^*Kj = K^*F, \tag{21}$$

где

$$K^*F = \int_0^1 F(x)J_1(ax\tau)\tau\, dx,$$

$$K^*Kj = \int_0^1 J_1(ax\tau)\tau \int_0^1 j(t)J_1(axt)tdtdx,$$

в для азимутальных токов уравнение с малым параметром имеет вид

$$Lj + K^*Kj = K^*F. \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) отличаются только положительными операторами, не влияющими на структуру уравнения. Изложим кратко теорию уравнения, например, (21) и метод приближенного решения. Уравнение (22) исследуется аналогично.

Оператор A является положительным, поэтому он имеет обратный A^{-1}. Умножим обе части уравненя (21) на A^{-1}, в результате получим уравнение

$$j + A^{-1}K^*Kj = A^{-1}K^*F. \tag{23}$$

Операторы в левой части действуют в пространстве H_A. Ядро оператора K^*K является гладким, бесконечное число раз дифференцируемым. Используя это, нетрудно доказать, что оператор $A^{-1}K^*K$ является вполне непрерывным оператором в H_A. Следовательно, интегральное уравнение (23) относится к уравнению Фредгольма второго рода.

Таким образом, уравнение (21) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Кроме того, левая часть уравнения (23) представляет положительный оператор, так как

$$[A^{-1}K^*Kj, j] = (K^*Kj, j) = (Kj, Kj).$$

Поэтому уравнение (23) имеет единственное решение. Для нахождения решения уравнения (23) разложим ток по базису

$$j(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(t), \tag{24}$$

подставим в (23) и умножим обе части на $\varphi_m(t)$ в пространстве H_A, когда m принимает значение от 1 до N. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$C_n + \sum_{m=1}^{N} C_m K_{mn} = l_n, \quad 1 \le n \le N, \tag{25}$$

где

$$K_{mn} = \sqrt{(4n+1)(4m+1)} \int_0^1 \frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(ax) \cdot J_{2m+\frac{1}{2}}(ax)}{x^3}\, dx,$$

$$l_n = \sqrt{(4n+1)} \int_0^1 F(x) \frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(ax)}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Решив систему (25), найдем коэффициенты разложения тока по базису. Знание коэффициентов позволяет найти такие важные характеристики, как норму тока и диаграмму направленности, создаваемую токами. При необходимости можно найти также базисные функции, используя преобразование Ханкеля.

Список литературы

[1] *Эминов С.И.* // ЖВММФ. 2001. Т. 41. № 3. С. 450–458.
[2] *Эминов С.И.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 82–88.
[3] *Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д.* Синтез излучающих систем (теория и методы расчета). М.: Сов. радио, 1974.
[4] *Эминов С.И.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 14. С. 97–102.
[5] *Эминов С.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. № 4. С. 328–338.
[6] *Эминов С.И.* // Антенны. 2002. Вып. 6 (61). С. 61–66.
[7] *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* // РиЭ. 1978. Т. 23. № 8. С. 1625–1630.
[8] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.* Интегралы, ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.