

01;03

## Нелинейный анализ временной эволюции неустойчивой плоской заряженной поверхности жидкости

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 27 октября 2003 г. В окончательной редакции 13 января 2004 г.)

В аналитических асимптотических расчетах пятого порядка малости по отношению амплитуды волны к капиллярной постоянной жидкости найдены нелинейные поправки второго и четвертого порядков малости к критическому значению параметра Тонкса–Френкеля, характеризующему устойчивость плоской однородно заряженной поверхности идеальной электропроводной несжимаемой жидкости. Выведено и решено нелинейное интегральное уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуды неустойчивой волны. Оказалось, что большую часть полного времени развития неустойчивости занимает линейная стадия, нелинейная же стадия весьма кратковременна. Показано, что характерное время реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости быстро уменьшается с ростом начальной амплитуды виртуальной волны и величины закритичности поверхностного заряда.

1. Исследование физических закономерностей реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, [1–9] и цитируемую там литературу). Большая часть проведенных к настоящему времени теоретических исследований выполнена в линейном приближении по амплитуде деформации плоской поверхности жидкости, и лишь недавно появились работы, отражающие его нелинейную суть [10–15]. Но, несмотря на значительный интерес к этому феномену и длительную историю его изучения, многое в нем остается непонятным. В частности, практически не исследованным остается вопрос о закономерностях формирования „конусов Тейлора“ — выступов на заряженной поверхности жидкости, образующихся на нелинейной стадии реализации ее неустойчивости, с вершин которых идет сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных, сильно заряженных капелек [1–8]. Качественная модель формирования таких выступов предложена еще в [1]. В [10,16] обсуждаются попытки их численного расчета. Но никто не пытался оценить характерное время формирования „конусов Тейлора“ от момента начала реализации неустойчивости заряженной жидкой поверхности. Инкремент неустойчивости в качестве характеристики времени роста выступа не подходит, поскольку описывает его рост лишь на линейной (начальной) его стадии, пока высота (амплитуда) выступа много меньше его поперечного линейного размера, тогда как „конус Тейлора“ является существенно нелинейным образованием. Вопросу расчета характерного времени формирования „конусов Тейлора“ и посвящено настоящее рассмотрение, которое будет проведено по схеме, использованной ранее при анализе нелинейных стадий развития сильно заряженной капли [17,18] и незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле большой величины [19].

2. Пусть идеальная, идеально проводящая несжимаемая жидкость, имеющая плотность  $\rho$ , заполняет в поле сил тяжести ( $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ ) полупространство  $z \leq 0$  в декартовой системе координат (за  $\mathbf{n}_z$  обозначен орт оси  $z$ ), а ее не возмущенная волновым движением равновесная плоская поверхность (совпадающая с плоскостью  $XOY$ ) граничит с вакуумом, подвержена действию сил поверхностного натяжения с коэффициентом  $\gamma$  и несет однородно распределенный электрический заряд плотностью  $\sigma$ . Вследствие теплового движения молекул жидкости на ее свободной поверхности возбуждаются капиллярные волны весьма малой амплитуды так, что форма свободной поверхности определится соотношением  $z = \xi(x, t)$ . Математическая постановка задачи о расчете нелинейных капиллярно-гравитационных волн на свободной, однородно заряженной поверхности жидкости имеет вид

$$\begin{aligned} z > \xi : \quad \Delta\Phi &= 0; & z \leq \xi : \quad \Delta\varphi &= 0; \\ z = \xi : \quad p &= p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right); \\ & \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}; \\ p + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} &= -\gamma \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; & \Phi &= 0; \\ z \rightarrow \infty : \quad \nabla\Phi &\rightarrow -E_0\mathbf{e}_z; \\ z \rightarrow -\infty : \quad \nabla\varphi &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — потенциал поля скоростей течения жидкости;  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — потенциал электростатического поля над жидкостью;  $p(\mathbf{r}, t)$  — поле давлений в жидкости.

В задаче должны быть сформулированы также и начальные условия. Решение нелинейных задач с произвольными, наперед заданными начальными условиями

вызывает большие математические трудности. Поэтому целесообразно определить начальное условие таким образом, чтобы результат решения задачи имел как можно более простой вид. В качестве такого условия предполагается, что капиллярно-гравитационная волна на поверхности жидкости является бегущей синусоидальной волной в первом приближении по малой амплитуде волны, т.е. профиль ее выглядит следующим образом:

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) + O(a^2),$$

где  $a$  и  $\omega$  — амплитуда и частота волны,  $k$  — волновое число.

Амплитуду волны будем считать малой по сравнению с капиллярной постоянной жидкости  $\alpha = \sqrt{\gamma/\rho g}$ , так что отношение  $(a/\alpha)$  для нижеследующего асимптотического анализа естественно выбрать в качестве малого параметра. Кроме того, предполагается, что все добавки к профилю волны второго и более высоких порядков малости, пропорциональные  $\cos(kx - \omega g)$ , которые могут появиться в силу нелинейности задачи, равны нулю.

В нулевом приближении по малому параметру  $(a/\alpha)$  свободная поверхность жидкости находится в невозмущенном состоянии и описывается уравнением  $z = 0$ , жидкость покоится, а электрическое поле однородно во всем пространстве

$$\xi_0 \equiv 0; \quad \nabla \varphi_0 \equiv 0; \quad \nabla \Phi_0 \equiv E_0 \mathbf{e}_z; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi}.$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим

$$\Phi_0 \equiv -E_0 z.$$

Неизвестными функциями в сформулированной задаче являются возмущение свободной поверхности  $\xi$ , потенциал поля скоростей  $\varphi$  и электрический потенциал  $\Phi$ . Искать их будем в виде разложений по малому параметру

$$\xi = \left(\frac{a}{\alpha}\right) \xi_1 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \xi_2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \xi_3 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^4 \xi_4 + O\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5;$$

$$\Phi = -E_0 z + \left(\frac{a}{\alpha}\right) \Phi_1 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \Phi_2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \Phi_3 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^4 \Phi_4 + O\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5;$$

$$\varphi = \left(\frac{a}{\alpha}\right) \varphi_1 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \varphi_2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \varphi_3 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^4 \varphi_4 + O\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5;$$

$$\xi_n \sim O(1); \quad \Phi_n \sim O(1); \quad \varphi_n \sim O(1).$$

3. Решая сформулированную задачу методом многих масштабов [14,20–22] в безразмерных переменных, в которых  $g = \gamma = \rho = 1$  (следовательно, и капиллярная

постоянная жидкости также равна единице:  $\alpha = 1$ ), в пятом порядке малости по амплитуде волны можно найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде (за всеми переменными оставлены прежние обозначения, а малый параметр обозначается просто  $a$ )

$$\begin{aligned} \xi = & a \cos[kx - (\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4) \cdot t] \\ & + a^2 \cdot X_{22} \cos[2kx - 2(\omega + a^2 \delta_2) \cdot t] \\ & + a^3 \cdot X_{33} \cos[3kx - 3(\omega + a^2 \delta_2) \cdot t] \\ & + a^4 (X_{42} \cos[2(kx - \omega t)] + X_{44} \cos[4(kx - \omega t)]) \\ & + a^5 X_5 \cos[5(kx - \omega t)]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\omega^2 = k(1 + k^2 - kW); \quad W = 4\pi\sigma^2;$$

$$\delta_2 = \frac{k^3(16k^2W^2 - 16k^3W + 2k^4 - 16kW + k^2 + 8)}{16\omega(1 - 2k^2)};$$

$$\delta_4 = \frac{k^5}{512\omega(1 + k^2 - kW)(1 - 2k^2)^3(1 - 3k^2)}$$

$$\begin{aligned} & \times (256 - 2368kW + 788k^2 + 8704k^2W^2 - 5188k^3W \\ & - 15616k^3W^3 + 229k^4 + 11040k^4W^2 + 13056k^4W^4 \\ & + 942k^5W - 2432k^5W^3 - 4096k^5W^5 - 377k^6 \\ & - 18528k^6W^2 - 9984k^6W^4 + 11948k^7W + 31232k^7W^3 \\ & + 6144k^7W^5 - 2218k^8 - 22400k^8W^2 - 13824k^8W^4 \\ & + 6056k^9W + 7680k^9W^3 - 1148k^{10} + 1920k^{10}W^2 \\ & - 1968k^{11}W + 24k^{12}); \end{aligned}$$

$$X_{22} = \frac{k(1 + k^2 - 2kW)}{2(1 - 2k^2)};$$

$$X_{33} = \frac{k^2(6 - 32kW + 21k^2 + 32k^2W^2 - 32k^3W + 6k^4)}{16(1 - 2k^2)(1 - 3k^2)};$$

$$\begin{aligned} X_{42} = & \frac{k^3}{48(1 - 2k^2)^3(1 - 3k^2)} (34 - 164kW - 33k^2 \\ & + 336k^2W^2 - 52k^3W - 192k^3W^3 + 171k^4 \\ & - 240k^4W^2 + 124k^5W + 192k^5W^3 \\ & - 134k^6 - 24k^7W - 48k^8); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{44} = & \frac{k^3(1 + k^2 - 2kW)}{48(1 - 2k^2)^2(1 - 3k^2)(1 - 4k^2)} (16 - 128kW \\ & + 77k^2 + 128k^2W^2 + 160k^3W - 248k^4 - 288k^4W^2 \\ & + 288k^5W - 12k^6), \end{aligned}$$

$W$  — безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду.

Выражение для  $X_5$  не приводится ввиду его громоздкости и незначительного влияния на профиль результирующей волны. Выражение для формы нелинейной волны на свободной заряженной поверхности идеальной жидкости (1) с точностью до величин третьего порядка малости совпадает в пределе  $W \rightarrow 0$  (т.е. при  $\sigma \rightarrow 0$ ) с известным [21,22] выражением для формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности идеальной жидкости.

Из (1) видно, что амплитудный множитель поправки второго порядка малости  $X_{22}$  нарастает резонансно при  $k = k_2 = 1/(2^{1/2})$ , а множитель поправки третьего порядка малости  $X_{33}$  — при  $k = k_2$  и  $k = k_3 = 1/(3^{1/2})$ . Амплитудный множитель поправки четвертого порядка малости  $X_{44}$  имеет три резонанса: при  $k = k_2$ , при  $k = k_3$  и при  $k = k_4 = 1/(4^{1/2})$ . В [20] показано, что в квадратичном приближении по амплитуде волны (когда есть только одно резонансное волновое число  $k = k_2$ ) при резонансном взаимодействии происходит перекачка энергии от длинных волн с волновыми числами  $k = k_2$  к более коротким с  $k = 2k_2$ . Из выражения (1) легко видеть, что кроме указанного резонанса в третьем порядке малости аналогичный эффект будет иметь место при  $k = k_3$ : энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами  $k = k_3$  к более коротким волнам с  $k = 3k_3$ . В четвертом порядке малости кроме указанных будет иметь место и резонанс при  $k = k_4$ ; перекачка энергии будет происходить от волн с  $k = k_4$  к волнам с  $k = 4k_4$ .

Видно также, что поправка к частоте  $\sim \delta_2$  содержит квадрат амплитуды, а поправка  $\sim \delta_4$  содержит амплитуду в четвертой степени. Эффект влияния этих поправок к частотам имеет соответственно третий и пятый порядки малости (это можно показать разложением  $a \cos[(\omega + a^2\delta_2 + a^4\delta_4) \cdot t]$  по степеням  $a^2\delta_2$  и  $a^4\delta_4$ ).

Нелинейные поправки к частоте, так же как и амплитудные множители  $X_{22}, X_{33}, X_{42}, X_{44}$ , имеют резонансный вид (имеют в знаменателях множители, обращающиеся при определенных значениях волнового числа в ноль). Сказанное означает ограниченную применимость выражения (1) в окрестности волновых чисел  $k = k_2, k = k_3, k = k_4$ , так как амплитудные множители добавок к частотам  $\delta_2$  и  $\delta_4$  и амплитудные коэффициенты  $X_{22}, X_{33}, X_{42}, X_{44}$  должны быть порядка  $O(1)$ .

Частота основной волны задается выражением  $(\omega + a^2\delta_2 + a^4\delta_4)$ . Критические условия реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду определяются двумя соотношениями: равенством нулю квадрата частоты  $Z^2 = (\omega + a^2\delta_2 + a^4\delta_4)^2$  виртуальной волны и равенством нулю производной от частоты  $Z$  по волновому числу. Из первого соотношения определяется критическое значение параметра Тонкса–Френкеля  $W_*$ , а из второго — волновое число наиболее неустойчивой волны  $k_*$  [2,23]. Как было показано ранее [20], в рамках линейной модели критические значения  $W_*$  и  $k_*$  определяются равенствами

$$W_* = k_* + k_*^{-1}, \quad k_* = 1. \quad (2)$$

В решаемой нелинейной задаче будем искать нелинейные поправки к критическому для реализации неустойчивости значению параметра Тонкса–Френкеля  $W$ , полагая, что условия (2) выполнены и неустойчивость претерпевает волна с  $k = 1$ , для этого представим  $W$  в виде разложения

$$W_* \approx 2 - w_2 \cdot a^2 + w_4 \cdot a^4. \quad (3)$$

Подставив данное разложение в уравнение  $Z^2 = 0$ , путем последовательных приближений нетрудно получить, что  $w_2 = 11/10, w_4 = 51/160$ . Таким образом, оказывается, что критическое для реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности идеальной жидкости значение параметра  $W$  зависит от амплитуды виртуальной волны, с потери устойчивости которой начинается неустойчивость Тонкса–Френкеля. В условиях натурального эксперимента на свободной поверхности жидкости существует бесконечный спектр капиллярных волн с размерной амплитудой порядка  $\sqrt{\kappa T/\gamma}$  ( $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура жидкости), порождаемых тепловым движением молекул жидкости. Эти волны и исполняют функцию виртуальных волн [2]. Несложно видеть, что амплитуда таких волн для подавляющего большинства реальных жидкостей при разумных (в смысле возможности существования жидкости) температурах будет иметь величину около половины ангстрема, а в принятых безразмерных переменных —  $\sim 10^{-8}$ . Для целей определения условий реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости столь малая амплитуда волны означает, что критические условия неустойчивости полностью определяются линейной теорией:  $k_* = 1, W_* = 2$ . Влияние же нелинейных поправок (см. (3)) проявится в увеличении скорости нарастания амплитуды, которая будет зависеть от самой амплитуды. Подробное обсуждение этого феномена проведено в нижеследующем рассмотрении.

4. Примем, что в начальный момент времени (при  $t = 0$ ) у свободной, однородно заряженной поверхности жидкости величина параметра  $W$  равна критическому значению, предсказываемому линейной теорией,  $W = 2$ ; тогда, согласно линейной же теории, квадрат частоты волны с  $k = 1$  и амплитудой, как угодно мало отличающейся от нуля, обратится в нуль [2]

$$\omega^2 = k \cdot (1 + k^2 - kW). \quad (4)$$

Это обстоятельство само по себе еще не обеспечивает начала реализации неустойчивости волны, поскольку инкремент неустойчивости такой волны, определяемый линейной теорией, будет равен нулю, так как в линейной теории дисперсионное уравнение не содержит амплитуды волны и все его компоненты имеют нулевой порядок малости. Проведенный же выше нелинейный анализ показывает, что критическое значение параметра  $W$  зависит от амплитуды волны и уменьшается с ее ростом согласно (3). Сказанное означает, что имеющиеся у поверхности жидкости электрическое поле (характеризуемое параметром  $W$ ) будет за критическим

и для волны любой как угодно малой амплитуды величина инкремента неустойчивости будет отлична от нуля. Степень закритичности параметра  $W$  определится разностью между  $W_* \approx 2 - w_2 \cdot a^2 + w_4 \cdot a^4$  и  $W = 2$ . Другими словами, квадрат частоты волны определится соотношением

$$\omega^2 \approx -w_2 \cdot a^2 + w_4 \cdot a^4, \quad (5)$$

т.е. волна станет неустойчивой с инкрементом  $\chi$ , определяющимся согласно (5) выражением  $\chi = a \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a^2)}$ . Если учесть теперь, что амплитуда неустойчивой волны увеличивается со временем, то из этого соотношения получим инкремент неустойчивости как функцию увеличивающейся со временем амплитуды  $a(t)$

$$\chi = a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что в проведенных рассуждениях результат нелинейного анализа (соотношение (3)) используется для получения аналитического выражения линейной характеристики временной эволюции неустойчивой волны — инкремента.

Из (6) видно, что поскольку амплитуда волны является функцией времени, то и инкремент неустойчивости также будет функцией времени  $\chi = \chi(t)$ . Сказанное означает, что амплитуда волны будет увеличиваться со временем по закону

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \exp(\chi \cdot t) \\ &= a_0 \exp \left[ a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot t \right], \end{aligned} \quad (7)$$

т.е. существенно быстрее, чем по экспоненциальному закону, и, следовательно, быстро выйдет за рамки применимости использованных при получении (7) разложений по малому параметру.

Чтобы получить закон роста со временем амплитуды волны, пригодный при любых ее величинах, рассмотрим последовательность значений амплитуды  $a$  через интервалы времени  $\Delta t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4 \dots$ ), в течение каждого из которых выражение (7) можно считать хорошо работающим. Отметим, что (7) справедливо лишь для линейной связи между скоростью роста амплитуды волны  $da/dt$  и амплитудой  $a(t)$ . Величину интервала  $\Delta t_i$  будем определять из условия, чтобы приращение инкремента на этом интервале  $\chi_i - \chi_{i-1}$  было много меньше величины инкремента в конце предыдущего интервала времени  $\Delta \chi \equiv \chi_i - \chi_{i-1} \ll \chi_{i-1}$ . Тогда в пределах интервала времени  $\Delta t_i$  величину  $\chi_i$  можно считать неизменной и пользоваться для подсчета прироста амплитуды  $\Delta a_i$  соотношением (7).

Пусть волна с  $k = 1$  при  $W = 2$  претерпела неустойчивость и ее амплитуда начала увеличиваться с инкрементом  $\chi_1 = a_0 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}$ . За время  $\Delta t_1$  амплитуда начальной виртуальной волны  $a_0 = \sqrt{\kappa T}$  вырастет до  $a_1 = a_0 \exp(\chi_1 \cdot \Delta t_1)$ . Это приведет, согласно (6), к росту величины инкремента до  $\chi_2 = a_1 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_1^2)}$ , и в следующий интервал времени  $\Delta t_2$  амплитуда будет расти с таким инкрементом и вырастет до  $a_2 = a_1 \exp(\chi_2 \cdot \Delta t_2)$ .

В конце интервала времени  $\Delta t_2$  инкремент вырастет до  $\chi_3 = a_2 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_2^2)}$ . На следующем интервале времени  $\Delta t_3$  амплитуда будет расти по закону  $a_3 = a_2 \exp(\chi_3 \cdot \Delta t_3)$ .

Таким образом, для  $i$ -го интервала времени  $\Delta t_i$  получим

$$a_i = a_{i-1} \exp(\chi_i \cdot \Delta t_i). \quad (8)$$

Подставим в (8) выражение для  $a_{i-1}$ , которое в свою очередь выразится через  $a_{i-2}$ , которое выразится через  $a_{i-3}$ , и т.д. до  $a_0$ . В итоге вместо (8) будет иметь

$$a_i = a_0 \exp \left[ \sum_{m=1}^i (\chi_m \cdot \Delta t_m) \right].$$

Переходя в этом выражении к пределу  $\Delta t_m \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , получим

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \int_0^t \chi(t) \cdot dt \right].$$

В это выражение подставим соотношение (6), определяющее зависимость величины инкремента от амплитуды,

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \int_0^t a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot dt \right]. \quad (9)$$

Таким образом, мы получили нелинейное интегральное уравнение относительно изменяющейся со временем амплитуды волны  $a(t)$ . Для отыскания решения уравнения (9) прологарифмируем его

$$\ln(a(t)/a_0) = \int_0^t a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot dt$$

и продифференцируем получившееся выражение по  $t$

$$\frac{da(t)}{a(t) \cdot dt} = a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{da}{a^2 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a^2)}} = dt.$$

После интегрирования найдем

$$\frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}}{w_2 \cdot a_0} - \frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}}{w_2 \cdot a(t)} = t$$

или

$$a(t) = \left( \sqrt{w_2 \left( \frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}}{w_2 \cdot a_0} - t \right)^2 + \frac{w_4}{w_2}} \right)^{-1}. \quad (10)$$

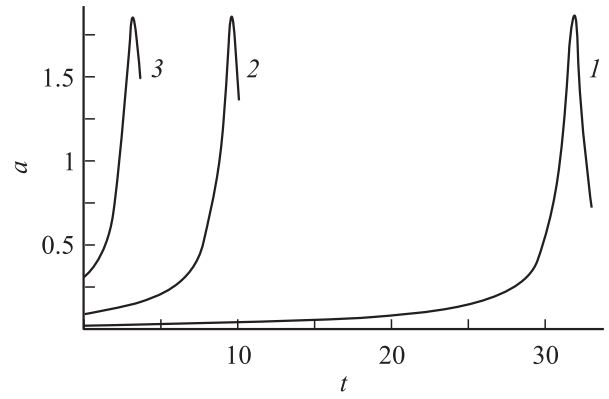
Из выражения (10) видно, что характерное время разности неустойчивости  $\tau$  (характерное время нелинейного нарастания амплитуды), которое определим условием

достижения выражением (10) максимального значения, имеет вид

$$\tau = \frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}}{w_2 \cdot a_0}. \quad (11)$$

Если рассматривать развитие во времени неустойчивости виртуальной волны, начиная от тепловой амплитуды при  $W = 2$ , то, согласно сказанному выше, характерное время нарастания амплитуды оказывается очень большим: в использованных безразмерных переменных  $\sim 10^8$ , а в размерных переменных, например, для воды, граничащей с вакуумом, это время будет  $\approx 2.5 \cdot 10^4$  s, т.е. около 7 h (характерный масштаб обезразмеривания времени есть  $\sqrt{\rho \cdot g^3 / \gamma}$ , т.е.  $\tau \equiv t \sqrt{\rho \cdot g^3 / \gamma}$ ). Для других жидкостей или комбинаций жидких сред в зависимости от коэффициента межфазного натяжения, плотностей сред и температуры это время может несколько изменяться, сохраняя порядок величины, поскольку именно перечисленные физические величины влияют на величину тепловой амплитуды виртуальных волн и на величину параметров обезразмеривания. Сказанное качественно согласуется с экспериментальными наблюдениями Тейлора [8], который отмечал, что длительность линейной стадии подготовки неустойчивости во много раз превышает длительность нелинейной стадии, в течение которой амплитуда эмиссионного выступа на заряженной поверхности жидкости (известного под названием „конуса Тейлора“) быстро нарастает. Тем не менее в экспериментах [3,24] о факте длительной задержки реализации неустойчивости не сообщается, хотя на него сложно не обратить внимания. Это наталкивает на мысль о том, что в указанных экспериментах развитие неустойчивости имело место с виртуальной волны, амплитуда которой существенно больше, чем амплитуда волны, генерированной тепловым движением молекул жидкости.

На рис. 1 приведены временные зависимости амплитуд нелинейно нарастающих волн, рассчитанные при различных начальных амплитудах, много больших тепловой. Кроме уже упомянутой длительной задержки реализации неустойчивости бросается в глаза, что амплитуда нелинейно растущей волны с течением времени проходит через максимум и начинает уменьшаться. Величина амплитуды нелинейной волны в максимуме не зависит от начальной амплитуды, но определяется отношением коэффициентов при нелинейных поправках второго и четвертого порядков малости. Этот эффект связан с наличием поправки четвертого порядка малости по амплитуде к критическому значению параметра Тонкса–Френкеля, имеющей противоположный знак по сравнению с поправкой второго порядка ((3)). Если провести все изложенные рассуждения, ограничившись лишь поправкой второго порядка малости по амплитуде, то отмеченное на рис. 1 ограничение амплитуды не имеет места, а амплитуда растет до бесконечности. По всей видимости, данное обстоятельство связано просто с ограниченной применимостью полученных соотношений, т.е. с выходом за пределы равномерной пригодности



**Рис. 1.** Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд нелинейно растущих волн с безразмерным волновым числом  $k = 1$  при  $W = 2$ , рассчитанные по (10) для различных начальных амплитуд  $a_0$ : 1 — 0.03, 2 — 0.1, 3 — 0.3.

разложения (3). Максимум на кривых наблюдается, когда с ростом амплитуды поправка четвертого порядка малости сравнивается с поправкой второго порядка, и при больших значениях времени именно поправка четвертого порядка малости определяет затухание амплитуды.

5. Еще одним фактором, обеспечивающим быстрое нарастание амплитуды неустойчивой волны, является степень за критичности напряженности электростатического поля (величины плотности поверхностного заряда  $\sigma$ ), прикладываемого к невозмущенной поверхности жидкости. Отметим, что в экспериментах обычно определяются критические условия реализации неустойчивости, которые для хорошо проводящих жидкостей определяются соотношениями (2). Термин „хорошо проводящие жидкости“ в реальности означает, что время максвелловской релаксации электрического заряда должно быть много меньше характерного времени реализации неустойчивости, так чтобы электрический потенциал поверхности жидкости выравнивался быстрее, чем происходит ее деформация. В подавляющем большинстве реализованных в экспериментах ситуаций [8,24] последнее требование выполнялось, но вот полученные критические условия неустойчивости отличаются от (2) и зависят от условий проведения экспериментов (например, в [24] критические условия реализации неустойчивости зависят от характерного времени нарастания у поверхности жидкости напряжения электрического поля). Это позволяет предположить, что в экспериментах [8,24] напряженности электрического поля несколько превышали критическое значение  $W_* = 2$  и, следовательно, величина инкремента неустойчивости виртуальной волны определялась двумя факторами: степенью за критичности параметра  $W$  и нелинейными поправками (3). В этой связи повторим рассуждения, аналогичные приведенным в разделе 4 настоящей работы, учитывая вклад в инкремент, обусловленный тем, что параметр Тонкса–Френкеля  $W$  превышает  $W_*$  на величину  $\Delta W$ . В результате величина

инкремента неустойчивости плоской заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости вместо (6) будет определяться соотношением

$$\chi = \sqrt{\Delta W + a(t)^2(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}.$$

Для отыскания зависимости амплитуды неустойчивости волны от времени получим вместо (9) нелинейное интегральное уравнение

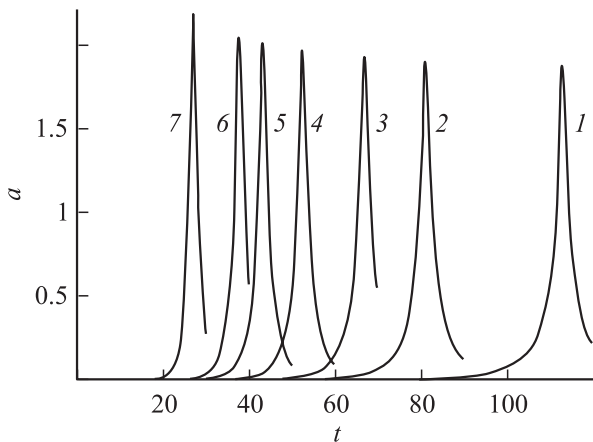
$$a(t) = a_0 \exp \left[ \int_0^t \sqrt{\Delta W + a(t)^2(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot dt \right],$$

имеющее решение

$$a(t) = \sqrt{\frac{4\Delta W \cdot F(t)}{1 + (w_2^2 + 4\Delta W \cdot w_4) \cdot F(t)^2 - 2w_2 \cdot F(t)}};$$

$$F(t) = \frac{a_0^2 \exp(\sqrt{\Delta W} \cdot t)}{2\Delta W + w_2 \cdot a_0^2 + 2\sqrt{\Delta W \cdot (\Delta W + w_2 \cdot a_0^2 - w_4 \cdot a_0^2)}}. \quad (12)$$

На рис. 2 приведены зависимости амплитуды нелинейно нарастающей волны от времени, рассчитанные по (12) при различных значениях степени заkritичности  $\Delta W = W - W_*$  параметра Тонкса–Френкеля и при тепловой начальной амплитуде виртуальных волн  $a_0 = 10^{-8}$ . Несложно видеть, что в качественном отношении кривые, приведенные на рис. 2, аналогичны кривым, приведенным на рис. 1. Разница лишь количественная: согласно сказанному выше, характерное время реализации неустойчивости при  $\Delta W = 0$  и  $a_0 = 10^{-8}$  было очень велико:  $t \sim 10^8$ , а при достаточно больших заkritичностях  $\Delta W \neq 0$  и  $a_0 = 10^{-8}$  характерное



**Рис. 2.** Зависимости безразмерных амплитуд нелинейно растущих волн при  $W = 2 + \Delta W$  с безразмерным волновым числом  $k = 1$  и безразмерной начальной амплитудой  $a_0 = 10^{-8}$  от безразмерного времени, рассчитанные по (12) при различных значениях начальной заkritичности параметра Тонкса–Френкеля  $\Delta W$ : 1 — 0.1, 2 — 0.2, 3 — 0.3, 4 — 0.5, 5 — 0.75, 6 — 1, 7 — 2.

безразмерное время реализации неустойчивости может быть весьма кратковременным:  $t \sim 10-100$ , т.е. хорошо согласуется с описаниями экспериментов [8,24]. Однако остается актуальным вопрос о точности измерений напряженности электрического поля в [8,24], поскольку есть основание полагать, что эксперименты [8,24] были проведены при превышении параметром  $W$  критического значения на некоторую величину  $\Delta W$ . Из рис. 2 видно, что величина заkritичности  $\Delta W$  при ее изменении в диапазоне от единиц до 100% от  $W_*$  достаточно слабо сказывается на наблюдаемой феноменологии явления (на величине времени реализации неустойчивости). Иначе говоря, экспериментальное измерение критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности электропроводной жидкости только тогда может считаться выполненным корректно, когда характерное время реализации неустойчивости составляет величину  $\approx 2.5 \cdot 10^4$  s, т.е. когда причиной неустойчивости при  $W = W_* = 2$  являются виртуальные волны тепловой природы. Только в таком случае имеет смысл говорить об измерении истинно критической напряженности поля и можно надеяться, что неустойчивость претерпела волна с  $k = \alpha^{-1}$ , как и следует из теории [2].

Подчеркнем, что, так же как и на рис. 1, кривые, приведенные на рис. 2, имеют смысл лишь в диапазоне амплитуд  $a(t) < 1$ , поскольку при больших значениях  $a(t)$  теряет равномерность разложение (3), положенное в основу проведенных рассуждений. Тем не менее наличие максимумов на кривых  $a = a(t)$  позволяет качественно исследовать зависимость характерного времени реализации неустойчивости  $\tau$  от величины заkritичности  $\Delta W$  и величины начальной амплитуды виртуальной волны  $a_0$ . Для этого примем во внимание, что кривые  $a(t)$  растут весьма круто и положение максимумов кривых можно принять в качестве адекватной оценки характерного времени развития неустойчивости. Учтем теперь, что в положении максимума кривых  $a = a(t)$  производная  $da(t)/dt$  обращается в нуль, и из этого условия найдем зависимость  $\tau = \tau(a_0, \Delta W)$  характерного времени реализации неустойчивости  $\tau$  от интересующих нас физических характеристик процесса: величины заkritичности  $\Delta W$  параметра Тонкса–Френкеля и величины начальной амплитуды виртуальной волны  $a_0$

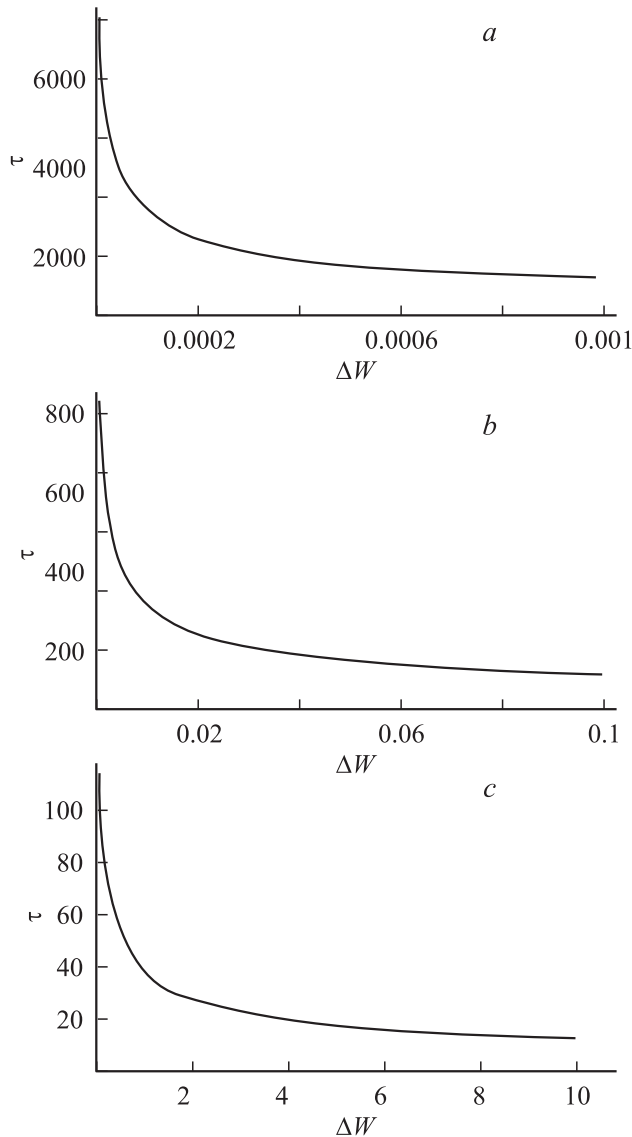
$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{\Delta W}} \ln \left\{ - \left[ (w_2 \cdot a_0^2 + 2\Delta W) (16\Delta W \cdot w_2 \cdot a_0^2 + 16(\Delta W)^2 + a_0^4(w_2^2 - 12w_4 \cdot \Delta W)) + 2\sqrt{\Delta W} \right. \right. \\ \times \left. \sqrt{w_2 \cdot a_0^2 + \Delta W - w_4 \cdot a_0^4(16\Delta W \cdot w_2 \cdot a_0^2 + 16(\Delta W)^2 + a_0^4(3w_2^2 - 4w_4 \cdot \Delta W))} \right] / \left[ 2a_0^4\sqrt{\Delta W} \right. \\ \times \left. \sqrt{w_2 \cdot a_0^2 + \Delta W - w_4 \cdot a_0^4(-w_2^2 - 4w_4 \cdot \Delta W)} \right. \\ \left. \left. - a_0^4(w_2 \cdot a_0^2 + 2\Delta W)(w_2^2 + 4w_4 \cdot \Delta W) \right] \right\}.$$

Графики зависимости  $\tau = \tau(\Delta W)$  при  $a_0 = \text{const}$ , рассчитанные по полученному выражению, приведены для

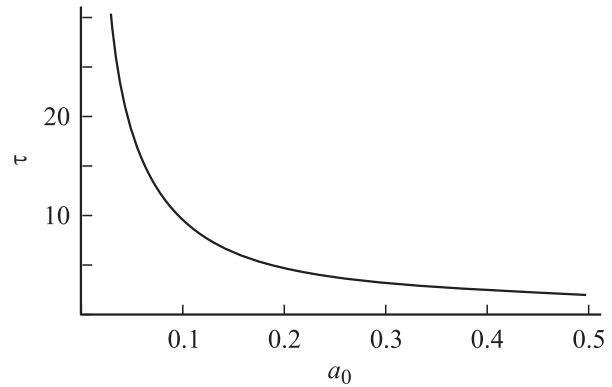
различных диапазонов изменения закритичности  $\Delta W$  на рис. 3, *a–c*. Зависимость  $\tau = \tau(a_0)$  будет более содержательна, если рассчитать ее при  $\Delta W = 0$ , однако полученная зависимость  $\tau = \tau(a_0, \Delta W)$  при  $\Delta W \rightarrow 0$  расходится. Поэтому искомую функциональную связь найдем, приравняв нулю производную по времени от амплитуды  $a(t)$ , определенной выражением (10), полученным именно для ситуации  $\Delta W = 0$ ,

$$\tau(a_0) = \frac{\sqrt{w_2 - w_4 \cdot a_0^2}}{w_2 \cdot a_0},$$

что совпадает с (11). Эта зависимость проиллюстрирована рис. 4. Несложно видеть, что при  $W = 2$ , ( $\Delta W = 0$ )



**Рис. 3.** Зависимости безразмерного времени развития неустойчивости  $\tau$  от величины начальной закритичности  $\Delta W$  параметра Тонкса–Френкеля, рассчитанные для волны с  $k = 1$ ,  $a_0 = 10^{-8}$  при изменении  $\Delta W$  в различных диапазонах величины: *a* —  $10^{-5} \leq \Delta W \leq 10^{-3}$ , *b* —  $10^{-3} \leq \Delta W \leq 10^{-1}$ , *c* —  $10^{-1} \leq \Delta W \leq 10$ .



**Рис. 4.** Зависимость безразмерного времени реализации неустойчивости  $\tau$  от начальной амплитуды волны, рассчитанная при  $k = 1$ ,  $\Delta W = 0$ ,  $W = W_* = 2$ .

зависимость характерного времени реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости  $\tau = \tau(a_0)$  в широком диапазоне изменения начальной амплитуды  $10^{-8} \leq a_0 \ll 1$  мало отличается от чисто гиперболической  $\tau \approx 1/(a_0 \sqrt{w_2})$ .

Зависимости  $\tau = \tau(\Delta W)$  и  $\tau = \tau(a_0)$  наглядно подтверждают сделанные выше на основании косвенных оценок выводы, что характерное время реализации неустойчивости может быть достаточно малым (меньше секунды) только при начальных амплитудах, существенно (на четыре порядка) превышающих тепловую амплитуду, или при закритичностях  $\Delta W \geq 10^{-4}$ . На это обстоятельство необходимо обращать внимание в будущих экспериментальных проверках критических условий неустойчивости Тонкса–Френкеля и аккуратно измерять в экспериментах физическую величину, на которую раньше никто не обращал внимания, — время реализации неустойчивости.

**6.** В проведенном анализе был выведен закон изменения со временем при  $W \approx 2$  амплитуды неустойчивой волны с  $k = 1$ . То обстоятельство, что, согласно (1), одновременно с волной с волновым числом  $k = 1$  за счет нелинейного взаимодействия в использованном при расчетах пятом порядке малости становятся неустойчивыми и волны с  $k = 2$ ,  $k = 3$ ,  $k = 4$  и  $k = 5$ , никак не упоминалось и не комментировалось. Однако естественно задаться вопросом о том, как в (1) будут изменяться во времени амплитуды волн с указанными волновыми числами.

Без детального рассмотрения в качестве первого приближения к решению сформулированной проблемы естественно принять утверждение, что зависимость амплитуды от времени  $a = a(t)$ , полученная выше для волны с  $k = 1$ , сохраняет свой вид и в амплитудных коэффициентах при поправках второго и более высоких порядков малости к основному решению, равно как и в квадратичных по  $a$  поправках к частотам волн с волновыми числами  $k = 2$  и  $k = 3$  в соотношении (1). Основанием для подобного заключения является сама



классическая процедура отыскания нелинейных поправок к основной волне, задаваемой в начальный момент времени [15,21–22] в виде асимптотического разложения по амплитуде основной волны  $a$ , а также то обстоятельство, что при принятом значении параметра Тонкса–Френкеля  $W \approx 2$  волны с  $k \geq 2$  устойчивы по отношению к имеющемуся поверхностному заряду и рост их амплитуд обусловлен только нелинейным взаимодействием с основной волной с  $k = 1$ .

В следующем приближении следует учесть, что с ростом амплитуды волны напряженность поля у вершин волн будет увеличиваться и при достаточно большой амплитуде основной волны с  $k = 1$  на ее вершине может претерпеть неустойчивость в смысле линейного анализа (в смысле выполнения критерия (2)) более короткая волна с  $k = 2$  (когда среднее по полупериоду волны с  $k = 2$  значение параметра Тонкса–Френкеля в окрестности вершины растущей волны с  $k = 1$  превышает  $W_* = 2.5$ ). При дальнейшем росте амплитуды то же может произойти с еще более короткой волной с  $k = 3$ . Но детальный анализ такой возможности нетривиален и составляет предмет отдельного исследования.

7. Представляется интересным отметить, что при рассмотрении закономерностей реализации неустойчивости капель по отношению к собственному и индуцированному зарядам [17–19] зависимость характерного времени реализации неустойчивости  $t_*$  (в размерной форме) от амплитуды  $\xi_0$  начального возмущения равновесной формы капли вида  $\xi_0 \cdot P_2(\cos \theta)$  (здесь  $P_2(\cos \theta)$  — полином Лежандра) маскируется его сильной зависимостью от радиуса капли  $R$ , имеющей вид  $t_* \sim (R^4/\xi_0)$ . При  $R \approx 10^{-2}$  см (а именно для капель таких размеров проводились экспериментальные исследования их устойчивости по отношению к поверхностному заряду [5]) и  $\xi_0 \approx 10^{-8}$  см получим  $(R^4/\xi_0) \approx 1$ . Поэтому обнаруженная в проведенном рассмотрении сильная зависимость характерного времени развития неустойчивости от величины начальной амплитуды на пороге критичности параметра Тонкса–Френкеля (при  $W = W_* = 2$ ) свойственна именно плоской заряженной поверхности жидкости.

8. То обстоятельство, что характерное время развития неустойчивости Тонкса–Френкеля при бесконечно малых амплитудах виртуальных волн оказывается весьма большим (а следовательно, скорость движения поверхности жидкости оказывается весьма малой), определяет и влияние вязкости жидкости на закономерности реализации неустойчивости. В самом деле, в течение большей части характерного времени реализации неустойчивости неустойчивая поверхность жидкости движется весьма медленно, потери энергии на диссипацию при этом малы и ими можно пренебречь. Поверхность жидкости при реализации неустойчивости движется быстро лишь на финальной стадии, длительность которой существенно меньше полного характерного времени реализации неустойчивости. Разложим выражение (10) для зависимости амплитуды волны от времени по степеням  $a_0 \cdot t$ ,

ограничившись квадратичным по  $a_0 \cdot t$  слагаемым, и получим

$$a(t) \approx \left\{ a_0 + a_0^2 \sqrt{w_2} \cdot t + 0.5a_0^3 \left[ 3t^2 - \frac{w_4}{w_2} - w_2 \left( t^2 - \frac{w_4}{w_2^2} \right) \right] \right\}.$$

Несложно видеть, что это выражение асимптотически корректно на интервале времени  $\Delta t \leq (1/a_0 \sqrt{w_2})$ . Сравнивая его с полным временем реализации неустойчивости, определяемым (11), получим, что длительность линейной стадии является хорошей аппроксимацией для полного времени реализации неустойчивости. Причем в течение всей линейной стадии характерная скорость движения поверхности жидкости весьма мала:  $V = a_0^2 \sqrt{w_2}$ . На начале нелинейной стадии, пока она хорошо аппроксимируется квадратичным по  $a_0 \cdot t$  слагаемым, ускорение движения поверхности жидкости, равное  $2a^2 \cdot w_2$ , также весьма мало. Следовательно, влияние вязкости на характерное время реализации неустойчивости мало.

Отметим также, что большая длительность линейной и квадратичной по  $a_0 \cdot t$  стадий реализации неустойчивости означает асимптотическую пригодность полученных результатов (в частности, интегральных уравнений, выведенных для описания развития во времени амплитуды неустойчивой волны).

## Заключение

Характерное время реализации неустойчивости плоской, однородно заряженной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости делится на две разномасштабные части: стадия подготовки неустойчивости или линейная стадия, занимающая в зависимости от начальных условий (от начальной амплитуды виртуальной волны и от степени закритичности параметра Тонкса–Френкеля в начальный момент) значительную часть полного времени развития неустойчивости, и весьма кратковременная нелинейная стадия, в течение которой амплитуда неустойчивой волны неограниченно возрастает.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760) и президента РФ (грант № МК 929.2003.01).

## Список литературы

- [1] Tonks L. // Phys. Rev. 1936. Vol. 48. P. 562–571.
- [2] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
- [3] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [4] He J., Miscovsky N.M., Cutler P.H., Chung M. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. N 4. P. 1475–1482.
- [5] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [6] De Surgy G.N., Chabrerie J.P., Denoux O., Wesfreid J.E. // J. Phys. II (France). 1993. Vol. 3. P. 1201–1225.



- [7] *Mohamed A.A., Elshehawey E.F., El-Sayed M.F.* // J. Coll. Int. Sci. 1995. Vol. 169. P. 65–78.
- [8] *Taylor G.I., McLwan A.D.* // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. Pt. 1. P. 1–15.
- [9] *Melcher J.R.* // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12. N 4. P. 778–790.
- [10] *Allen J.E.* // J. Phys. D. 1985. Vol. 18. P. 59–62.
- [11] *Жакин А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
- [12] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. 1994. Vol. 49. N 4. P. 2935–2940.
- [13] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 6(12). С. 1990–2005.
- [14] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 21–29.
- [15] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 37–46.
- [16] *Александров М.Л., Галь Л.Н., Иванов В.Я.* и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 165–167.
- [17] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
- [18] *Ширяева С.О.* // ПЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
- [19] *Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 24. С. 36–40.
- [20] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 8. С. 1–7.
- [21] *Naufeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 40. Part 4. P. 671–684.
- [22] *Naufeh A.H.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 3. P. 545–550.
- [23] *Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 15–22.
- [24] *Шутов А.А.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 126–130.