01;03

О внутреннем нелинейном резонансном трехмодовом взаимодействии осцилляций заряженной капли

© С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 30 июня 2004 г.)

Впервые обнаружено различие в особенностях реализации внутренних нелинейных трехмодовых вырожденных и комбинационных резонансов: во-первых, энергия, вложенная в начальную деформацию капли, переносится только от низких мод к высоким; во-вторых, в обоих направлениях. Оказалось, что вырожденные резонансы малочувствительны к значениям физических величин (например, к величине электрического заряда), определяющих точные положения резонансов: отклонения от резонансных значений сказываются лишь на доле энергии, участвующей в обмене между модами, и длительности характерного времени резонансного обмена энергией, само же взаимодействие остается резонансным.

1. Внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие мод осцилляций заряженной капли электропроводной несжимаемой жидкости среди прочих нелинейных эффектов, связанных с нелинейными осцилляциями капли, занимает в проводимых исследованиях видное место: начиная с первых работ на эту тему, появившихся двадцать лет назад [1–5], и до настоящего времени [6–18] более трех четвертей публикаций так или иначе его затрагивают. Причина такого интереса в том, что резонансное взаимодействие обеспечивает наиболее быстрое и эффективное перераспределение энергии начальной деформации капли между модами, возбуждающимися за счет нелинейного взаимодействия, и тем самым оказывает определяющее влияние как на закономерности реализации нелинейных осцилляций (и связанными с ними акустическим и электромагнитным излучениями [12,14]), так и на закономерности распада капли, несущей заряд, близкий к критическому в смысле линейной устойчивости [2,5,9,11,15,17]. Но, несмотря на значительное количество публикаций, посвященных резонансному взаимодействию мод, на многие вопросы, с ним связанные, ответа пока не получено. Так, до сих пор не исследован вопрос о направлении перекачки энергии между модами при резонансном взаимодействии. Первыми были открыты и исследованы так называемые вырожденные трехмодовые резонансы [1–3], в которых одна из двух взаимодействующих мод дважды взаимодействует с другой. В [10,16] было показано, что в таких резонансах энергия перекачивается только в направлении от низких мод к высоким, что, вообще говоря, не согласуется с представлениями о „распадной неустойчивости“ при трехмодовых взаимодействиях [19]. В работе [13] было обнаружено, что распадная неустойчивость может иметь место при истинно трехмодовых резонансах (вторичных комбинационных резонансах): было показано, что существует несколько резонансных ситуаций, в которых энергия перекачивается из высоких мод в третью, но особенности такого взаимодействия (характерное время взаимодействия и его глубина) исследованы не были. В [17] было показано, что в четырехмодовых взаимодействиях энергия также может перекачиваться от высоких мод к низким, но с малой интенсивностью, поскольку эти взаимодействия реализуются только в третьем порядке малости. Исследование возможности перекачки энергии из высоких мод нелинейных осцилляций к низким (точнее говоря, к основной моде) представляет существенный интерес в связи с обсуждающимся в научной литературе механизмом инициирования разряда молнии коронным разрядом в окрестности крупной сильно заряженной капли [15,18].

В связи с вышесказанным в настоящей работе проводится детальное исследование закономерностей перераспределения энергии между модами в вырожденных и во вторичных комбинационных резонансах при трехмодовом взаимодействии.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности нелинейно осциллирующей капли идеальной несжимаемой проводящей жидкости с плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения γ и электрическим зарядом Q, однородно распределенным по ее поверхности. В начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли с радиусом R претерпевает осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли. Зададимся целью найти спектр возникающих капиллярных осцилляций капли (форму капли) при $t > 0$.

Примем, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени и уравнение, описывающее ее поверхность, в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $\rho = R = \gamma = 1$, имеет вид

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1. \tag{1}$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей движения жидкости в капле $\psi(\mathbf{r},t)$; само поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ при этом определяется через градиент потенциала $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)=\operatorname{grad}(\phi(\mathbf{r},t))$. Принимая, что скорости гидродинамических движений жидкости в капле много меньше скорости распространения электромагнитных взаимодействий, электрическое поле заряда Q в окрестности капли будем считать электростатическим и станем описывать его с помощью потенциала $\Phi(\mathbf{r},t)$, с которым напряженность поля $\mathbf{E}$ связана известным соотношением $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}(\Phi)$.

Математическая формулировка решаемой задачи имеет вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t)=0;\quad \Delta\Phi(\mathbf{r},t); \tag{2}$$

$$r\to 0:\qquad \psi(\mathbf{r},t)\to 0; \tag{3}$$

$$r\to\infty:\qquad |\operatorname{grad}(\Phi(\mathbf{r},t))|\to 0; \tag{4}$$

$$r=1+\xi(\theta,t):\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \tag{5}$$

$$\Delta p-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+\frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2=\operatorname{div}\mathbf{n}; \tag{6}$$

$$\Phi(r,\theta,t)=\text{const}; \tag{7}$$

$$\int\limits_V r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{4}{3\pi},$$

$$V=\left[0\le r\le 1+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right]; \tag{8}$$

$$\int\limits_V \mathbf{e}_r\cdot r^3 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=0; \tag{9}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S(\mathbf{n}\cdot\nabla\Phi)ds=Q,$$

$$S=\left[r=1+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right]; \tag{10}$$

$$t=0:\quad \xi(\theta)=\xi_0P_0(\mu)+\xi_1P_1(\mu)+\varepsilon\sum_{i\in\Xi}h_iP_i(\mu);$$

$$\sum_{i\in\Xi}h_i=1;\qquad \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t}=0. \tag{11}$$

Поскольку условия (8), (9) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный, то при $t=0$ они определяют амплитуды нулевой и первой мод в разложении начального возмущения равновесной сферической формы поверхности капли $\xi(\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра, т.е. амплитуды нулевой и первой мод не могут быть произвольны, но будут зависеть от вида начальной деформации.

В выражениях (6)–(11) введены обозначения: $\mu=\cos\theta$; Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (1); ε — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли, являющаяся малым параметром задачи; $P_i(\mu)$ — полиномы Лежандра порядка i; h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i-й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод; ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий (8) и (9) в начальный момент времени с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε, равные

$$\xi_0\approx-\varepsilon^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{h_i^2}{(2i+1)}+O(\varepsilon^3);$$

$$\xi_1\approx-\varepsilon^2\sum_{i\in\Xi}\frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)}+O(\varepsilon^3). \tag{12}$$

3. Для отыскания решения поставленной задачи воспользуемся методом многих масштабов, как это делалось в задачах этого типа в [2,5–7,9–18]. Искомые функции $\xi(\theta,t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$, $\Phi(\mathbf{r},t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и будем считать зависящими не просто от времени t, а от разных его масштабов, определенных через малый параметр ε: $T_m\equiv\varepsilon^m t$

$$\xi(\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\xi^{(m)}(\theta,T_0,T_1,\ldots);$$

$$\psi(\mathbf{r},t)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\psi^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1,\ldots);$$

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\Phi^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1,\ldots). \tag{13}$$

Ограничимся рассмотрением поставленной задачи в квадратичном приближении, в рамках которого можно определить зависимость искомых величин от двух временных масштабов T_0 и T_1.

Подставляя разложения (13) в систему (2)–(11) и приравнивая слагаемые, содержащие одинаковые степени параметра ε, получим набор краевых задач для определения функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$. Очевидно, что линейным уравнениям (2) должна удовлетворять каждая из функций $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$.

В нулевом порядке малости получим выражения для электростатического потенциала в окрестности равновесной сферической капли, обладающей зарядом Q: $\Phi^{(0)}=Q/r$.

Решения уравнений (2) для функции первого и второго порядков малости, удовлетворяющие условиям ограниченности (3), (4), запишем в виде

$$\psi^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{(m)}(T_0,T_1)r^n\cdot P_n(\mu)\quad (m=1,2);$$

$$\Phi^{(m)}(r,\theta,T_0,T_1)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(m)}(T_0,T_1)r^{-(n+1)}P_n(\mu). \tag{14}$$

Последовательные поправки к равновесной поверхности капли также представим в виде разложений по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1) P_n(\mu) \quad (m = 1, 2). \tag{15}$$

Подставляя решения (14), (15) при $m = 1$ в систему граничных условий первого порядка малости, полученную из (5)–(7), после соответствующих преобразований получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$

$$\frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0;$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)\big((n+2) - W\big); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi}. \tag{16}$$

Решением уравнения (16) являются гармонические функции с коэффициентами, зависящими от времени T_1,

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = A_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.};$$

$$A_n^{(1)}(T_1) = a_n^{(1)}(T_1) \exp\big(i b_n^{(1)}(T_1)\big) \quad (n \geq 2). \tag{17}$$

Здесь и далее аббревиатура к.с. обозначает слагаемые, комплексно-сопряженные к выписанным; $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ — вещественные функции, зависимость которых от времени T_1 может быть определена только при рассмотрении задачи следующего порядка малости.

Из условий (9), (10), записанных в линейном по малой величине ε приближении, следует, что

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0. \tag{18}$$

Отметим, что формально выражения (18) не противоречат уравнениям (16) для $n = 0$ и $n = 1$.

Удовлетворяя начальным условиям (1) в первом приближении по ε, получим

$$a_i^{(1)}(0) = \frac{1}{2} h_i; \quad b_i^{(1)}(0) = 0 \quad (i \in \Xi);$$

$$a_n^{(1)}(0) = 0; \quad b_n^{(1)}(0) = 0 \quad (n \notin \Xi). \tag{19}$$

Решения первого порядка (17), (18) и решения (14), (15) при $m = 2$ подставим в полученную из (5)–(7) систему граничных условий второго порядка малости и после громоздких преобразований получим уравнение относительно неизвестных коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1)$

$$\frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = -2i\omega_n \frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1}$$

$$\times \exp(i\omega_n T_0) + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \Big\{ (\gamma_{lmn} + \omega_l \omega_m \eta_{lmn}) A_l^{(1)}(T_1) A_m^{(1)}(T_1)$$

$$\times \exp\big(i(\omega_l + \omega_m)T_0\big) + (\gamma_{lmn} - \omega_l \omega_m \eta_{lmn}) A_l^{(1)}(T_1) \overline{A_m^{(1)}(T_1)}$$

$$\times \exp\big(i(\omega_l - \omega_m)T_0\big) + \text{к.с.}\Big\};$$

$$\gamma_{ijn} = K_{ijn}\Big[\omega_i^2(n - i + 1) + 2n\big(j(j+1) - 1\big) + \big(j(i+1)$$

$$- i(2i - 2n + 7) + 3\big)\, n\, \frac{W}{2}\Big] + \alpha_{ijn}\Big[\frac{1}{i}\,\omega_i^2 + n\,\frac{W}{2}\Big];$$

$$\eta_{ijn} = K_{ijn}\Big(\frac{n}{2} - i + 1\Big) + \alpha_{ijn}\frac{1}{i}\Big(1 + \frac{n}{2j}\Big);$$

$$K_{ijn} = \big[C_{i0j0}^{n0}\big]^2;$$

$$\alpha_{ijn} = -\sqrt{i(i+1)j(j+1)}\, C_{i0j0}^{n0} C_{i(-1)j1}^{n0}. \tag{20}$$

Здесь C_{i0j0}^{n0}, $C_{i(-1)j1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана. Они отличны от нуля, только если нижние индексы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|i = j| \leq n \leq (i + j); \quad (i + j + n) = 2g. \tag{21}$$

Поэтому во втором порядке малости будут возбуждаться только колебания мод, номера которых удовлетворяют (21).

4. Из второй части (20) можно заметить, что если для каких-либо трех мод колебаний поверхности капли с номерами p, q, k выполняется одно из соотношений

$$\omega_p + \omega_q = \omega_k, \quad \omega_p + \omega_q = \omega_k, \tag{22}$$

то в соответствии с общей идеологией метода многих масштабов эти моды вступают в резонансное взаимодействие, при этом говорят о вторичном (поскольку проявляется лишь во втором порядке малости) комбинационном резонансе.

Заметим, что, согласно (16), значения частот собственных колебаний поверхности капли ω_n зависят от величины заряда на капле (от параметра W). Причем при значении $W_{\text{cr}} = 4$ частота колебаний основной моды (с $n = 2$) обращается в нуль, дальнейшее же увеличение W приводит к тому, что поверхность капли становится неустойчивой по отношению к собственному заряду. Поэтому вторичные резонансы оказывают влияние на нелинейные осцилляции капли и их имеет смысл исследовать только в том случае, если соотношения (22) выполняются при $W < W_{\text{cr}}$. В работе [2] был обнаружен резонанс подобного типа для случая, когда $\omega_6 = 2\omega_4$, а в [11,13,15] показано, что общее количество резнансов при $W < 4$ весьма велико и при $p, q, k < 100$ их количество измеряется сотнями.

Пусть индекс n нумерует моды, возбуждающиеся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, а индексы k, p, q — моды, связанные резонансным взаимодействием.

а) Рассмотрим вначале случай $n \neq k, p, q$, т. е. когда мода n не связана никаким резонансным соотношением, а условие исключения секулярных членов и членов с малыми знаменателями из решения уравнения (20) имеет простой вид,

$$\frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dt} = 0.$$

Из этого равенства, используя выражение для $A_n^{(1)}(T_1)$ через скалярные функции $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ (см. (18)) и требуя обращения в нуль действительной и мнимой частей, несложно получить

$$\frac{da_n^{(1)}(T_1)}{dt} = \frac{db_n^{(1)}(T_1)}{dt} = 0.$$

Эти равенства означают, что $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ не зависят от медленного времени T_1 и в рамках рассмотрения задачи во втором порядке малости их можно считать константами, равными своим начальным значениям (19). Выражение (17) для коэффициентов первого порядка малости $M_n^{(1)}(t)$ в разложении возмущения формы равновесной поверхности $\xi^{(1)}(\theta, t)$ в ряд по полиномам Лежандра (15) примет вид

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{n,i} h_i \cos(\omega_i t); \quad i \in \Xi; \quad n \neq k, p, q, \tag{23}$$

$\delta_{n,i}$ — дельта-символ Кронекера.

Амплитуды поправок второго порядка малости, получаемые при решении уравнения (20), в рассматриваемой ситуации примут вид

$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{i\in\Xi}\sum_{j\in\Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n + \omega_i + \omega_j)t\right) \right.$$
$$\times \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n - \omega_i - \omega_j)t\right) + \lambda_{ijn}^{(-)} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n + \omega_i - \omega_j)t\right)$$
$$\left. \times \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_n - \omega_i + \omega_j)t\right) \right\} \quad (n \geq 2;\ n \neq p, q, k);$$

$$\lambda_{ijn}^{(\pm)} \equiv (\gamma_{ijn} \pm \omega_i\omega_j\eta_{ijn})\left(\omega_n^2 - (\omega_i \pm \omega_j)^2\right)^{-1}. \tag{24}$$

б) При анализе уравнения (20) для мод с $n = k, p, q$, чтобы отразить близость комбинации частот $\omega_p - \omega_q$ к частоте ω_k, введем параметр расстройки $\sigma \sim O(1)$, определяемый соотношением

$$\omega_p - \omega_q = \omega_k(1 + \varepsilon \cdot k). \tag{25}$$

Отметим, что параметр расстройки можно связать с величиной собственного заряда капли (с величиной параметра W), имея в виду, что, варьируя заряд капли, можно изменять частоту осцилляций, уводя ее от положения точного резонанса.

Если (25) подставить в (20), то в правой части уравнения (20) для рассматриваемых случаев появятся слагаемые, содержащие следующие сомножители:

$$\exp\left(i(\omega_p - \omega_q)T_0\right) = \exp\left(i(\omega_k + \varepsilon\omega_k\sigma)T_0\right)$$
$$= \exp(i\sigma\omega_k T_1)\exp(i\omega_k T_0);$$

$$\exp\left(i(\omega_k + \omega_q)T_0\right) = \exp\left(i(\omega_p - \varepsilon\omega_k\sigma)T_0\right)$$
$$= \exp(-i\sigma\omega_k T_1)\exp(i\omega_p T_0);$$

$$\exp\left(i(\omega_p - \omega_k)T_0\right) = \exp\left(i(\omega_q + \varepsilon\omega_k\sigma)T_0\right)$$
$$= \exp(i\sigma\omega_k T_1)\exp(i\omega_q T_0),$$

а условия исключения секулярных членов из решения уравнения (20) для $n = k, p, q$ запишутся в виде

$$-2i\omega_k \frac{dA_k^{(1)}(T_1)}{dt} + \Lambda_{pqk}^{(-)} \exp(i\sigma\omega_k T_1) A_p^{(1)}(T_1)\overline{A_q^{(1)}(T_1)} = 0;$$

$$-2i\omega_p \frac{dA_p^{(1)}(T_1)}{dt} + \Lambda_{kqp}^{(+)} \exp(-i\sigma\omega_k T_1) A_k^{(1)}(T_1)\overline{A_q^{(1)}(T_1)} = 0;$$

$$-2i\omega_q \frac{dA_q^{(1)}(T_1)}{dt} + \Lambda_{pkq}^{(-)} \exp(i\sigma\omega_k T_1) A_p^{(1)}(T_1)\overline{A_k^{(1)}(T_1)} = 0;$$

$$\Lambda_{lmn}^{(\pm)} = (\gamma_{lmn} + \gamma_{mln}) \pm \omega_l\omega_m(\eta_{lmn} + \eta_{mln}). \tag{26}$$

Приравнивая нулю действительную и мнимую части выражений (26) и вводя новую функцию

$$\beta_k^{(1)}(T_1) = \sigma\omega_k T_1 - b_k^{(1)}(T_1), \tag{27}$$

получим систему дифференциальных уравнений относительно вещественных функций $a_k^{(1)}(T_1)$, $\beta_k^{(1)}(T_1)$, $a_p^{(1)}(T_1)$, $b_p^{(1)}(T_1)$, $a_q^{(1)}(T_1)$, $b_q^{(1)}(T_1)$

$$2\omega_k \frac{da_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{pqk}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \sin\left(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\right);$$

$$2\omega_k a_k^{(1)}(T_1) \frac{d\beta_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 2\omega_k^2 a_k^{(1)}(T_1)\sigma + \Lambda_{pqk}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1)$$
$$\times a_q^{(1)}(T_1) \cos\left(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\right);$$

$$2\omega_p \frac{da_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kqp}^{(+)} a_k^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \sin\left(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\right);$$

$$2\omega_p a_p^{(1)}(T_1) \frac{db_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kqp}^{(+)} a_k^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \cos\left(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\right);$$

$$2\omega_q \frac{da_q^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{pkq}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1) \sin\left(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\right);$$

$$2\omega_q a_q^{(1)}(T_1) \frac{db_q^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{pkq}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1) \cos\left(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\right);$$

$$\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1) = \beta_k^{(1)}(T_1) + b_p^{(1)}(T_1) - b_q^{(1)}(T_1). \tag{28}$$

Начальными условиями для уравнений (28) служат соотношения (19), причем из требования непротиворечивости системы (28) при $t = 0$ получаем, что если какая-либо из мод k, p или q не присутствует в спектре изначально возбужденных мод Ξ, т.е. ее амплитуда в начальный момент времени равна нулю, то ее фаза при $t = 0$ не произвольна, а равна $\pi/2$. В итоге начальные условия для системы (28) можно записать в следующей компактной форме:

$$a_j^{(1)}(0) = \delta_{i,j} h_j/2; \qquad b_j^{(1)}(0) = \pm(1 - \delta_{i,j})\pi/2;$$
$$i \in \Xi; \qquad j = k, p, q. \tag{29}$$

Коэффициенты первого порядка в разложении (15) для резонансно взаимодействующих мод k, p, q запишутся в виде (см. (17))

$$M_k^{(1)}(t) = 2a_k^{(1)}(\varepsilon t)\cos\big((\omega_p - \omega_q)t - \beta_k^{(1)}(\varepsilon t)\big);$$

$$M_p^{(1)}(t) = 2a_p^{(1)}(\varepsilon t)\cos\big(\omega_p t + b_p^{(1)}(\varepsilon t)\big);$$

$$M_q^{(1)}(t) = 2a_q^{(1)}(\varepsilon t)\cos\big(\omega_q t + b_q^{(1)}(\varepsilon t)\big), \qquad (30)$$

где коэффициенты $a_k^{(1)}(T_1)$, $\beta_k^{(1)}(T_1)$, $a_p^{(1)}(T_1)$, $b_p^{(1)}(T_1)$, $a_q^{(1)}(T_1)$, $b_q^{(1)}(T_1)$ являются решениями системы уравнений (28) с начальными условиями (29).

Отметим, что в используемом приближении (до второго порядка включительно) резонансное взаимодействие трех мод будет проявляться лишь в том случае, когда хотя бы две из них присутствуют в спектре мод, возбужденных в начальный момент Ξ, т.е. их амплитуды при $t = 0$ должны быть отличны от нуля. Третья же мода, даже имея нулевую начальную амплитуду, появится в спектре колебаний первого порядка малости, если ее номер удовлетворяет соотношениям вида $p + q + k$ — четно; $|p - q| \le k \le (p + q)$ (для случая $p, q \in \Xi$; $k \notin \Xi$), возникающим из требования отличия от нуля коэффициентов $\Lambda_{pqk}^{(-)}$, $\Lambda_{kqp}^{(+)}$, $\Lambda_{pkq}^{(-)}$ в уравнениях (28).

Результаты расчета по соотношениям (28)−(30) при $\varepsilon = 0.3$ временно́й эволюции амплитуд первого порядка малости резонансно взаимодействующих при $W = 1.649$ четвертой, пятой и седьмой мод, когда начальная деформация определена четвертой и седьмой модами, представлены на рис. 1. Видно, что возбуждение отсутствовавшей в спектре начального возмущения пятой моды происходит за счет резонансной перекачки энергии из наиболее высокой седьмой моды. Видно также, что часть энергии седьмой моды передается и четвертой, амплитуда которой увеличивается синхронно с амплитудой пятой моды, т.е. имеет место передача энергии

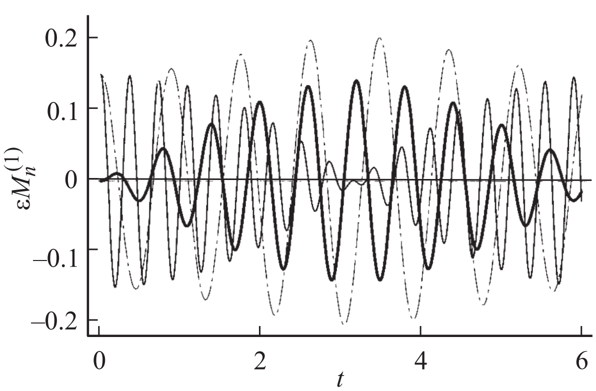

Рис. 1. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд $M_n^{(1)}$ резонансно взаимодействующих четвертой, пятой и седьмой мод нелинейных капиллярных осцилляций заряженной капли в положении точного резонанса $W = 1.649$. Тонкая кривая — седьмая мода, жирная кривая — пятая, штрихпунктир — четвертая.

от высокой моды к более низким в соответствии с представлениями о распадной неустойчивости.

в) Рассмотрим теперь случай вырожденного резонанса, когда одна из мод дважды резонансно взаимодействует с другой, т.е. когда $\omega_s = 2\omega_k$.

Проводя такой же анализ, как описано выше, получим для временны́х коэффициентов первого порядка малости в разложении (15)

$$M_s^{(1)}(t) = 2a_s^{(1)}(\varepsilon t)\cos\big(2\omega_s t - \beta_s^{(1)}(\varepsilon t)\big);$$

$$M_k^{(1)}(t) = 2a_k^{(1)}(\varepsilon t)\cos\big(2\omega_k t + b_k^{(1)}(\varepsilon t)\big), \qquad (31)$$

где вещественные функции $a_s^{(1)}(\varepsilon t)$, $\beta_s^{(1)}(\varepsilon t)$, $a_k^{(1)}(\varepsilon t)$, $\beta_k^{(1)}(\varepsilon t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$4\omega_s \frac{da_s^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{kks}^{(+)}\big(a_k^{(1)}(T_1)\big)^2 \sin\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$4\omega_s a_s^{(1)}(T_1)\frac{d\beta_s^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 4\omega_s^2 a_s^{(1)}(T_1)\sigma + \Lambda_{kks}^{(+)}\big(a_k^{(1)}(T_1)\big)^2 \cos\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$2\omega_k \frac{da_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{skk}^{(-)} a_s^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1)\sin\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$2\omega_k a_k^{(1)}(T_1)\frac{db_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{skk}^{(-)} a_s^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1)\cos\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$\varphi_{sk}^{(1)}(T_1) = \beta_s^{(1)}(T_1) + 2b_k^{(1)}(T_1);$$

$$\beta_s^{(1)}(T_1) = \sigma\omega_s T_1 - b_s^{(1)}(T_1). \qquad (32)$$

Из соотношений (19) следует, что для системы (32) возможны следующие комбинации начальных условий:

$$[s, k] \in \Xi: \quad a_s^{(1)}(0) = h_s/2; \quad \beta_s^{(1)}(0) = 0;$$

$$a_k^{(1)}(0) = h_k/2; \quad b_k^{(1)}(0) = 0;$$

$$s \notin \Xi, \; k \in \Xi: \quad a_s^{(1)}(0) = 0; \quad \beta_s^{(1)}(0) = \pi/2;$$

$$a_k^{(1)}(0) = h_k/2; \quad b_k^{(1)}(0) = 0.$$

В ситуации, когда $k \notin \Xi$, $s \in \Xi$ (т.е. когда $a_k^{(1)}(0) = 0$, $a_s^{(1)}(0) = h_s/2$), резонансное взаимодействие мод s и k в используемом приближении иметь места не будет, так как из системы (32) при $t = 0$ получим, что

$$\frac{da_s^{(1)}(0)}{dT_1} = \frac{da_k^{(1)}(0)}{dT_1} = 0,$$

т.е. амплитуды $a_k^{(1)}$ и $a_s^{(1)}$ сохраняют свои начальные значения.

На рис. 2, *a* представлены временны́е зависимости амплитуд $M_4^{(1)}(t)$ и $M_6^{(1)}(t)$ резонансно взаимодействующих четвертой и шестой мод, рассчитанные в положении точного резонанса $W_r = 2.66667$ при $\varepsilon = 0.3$,

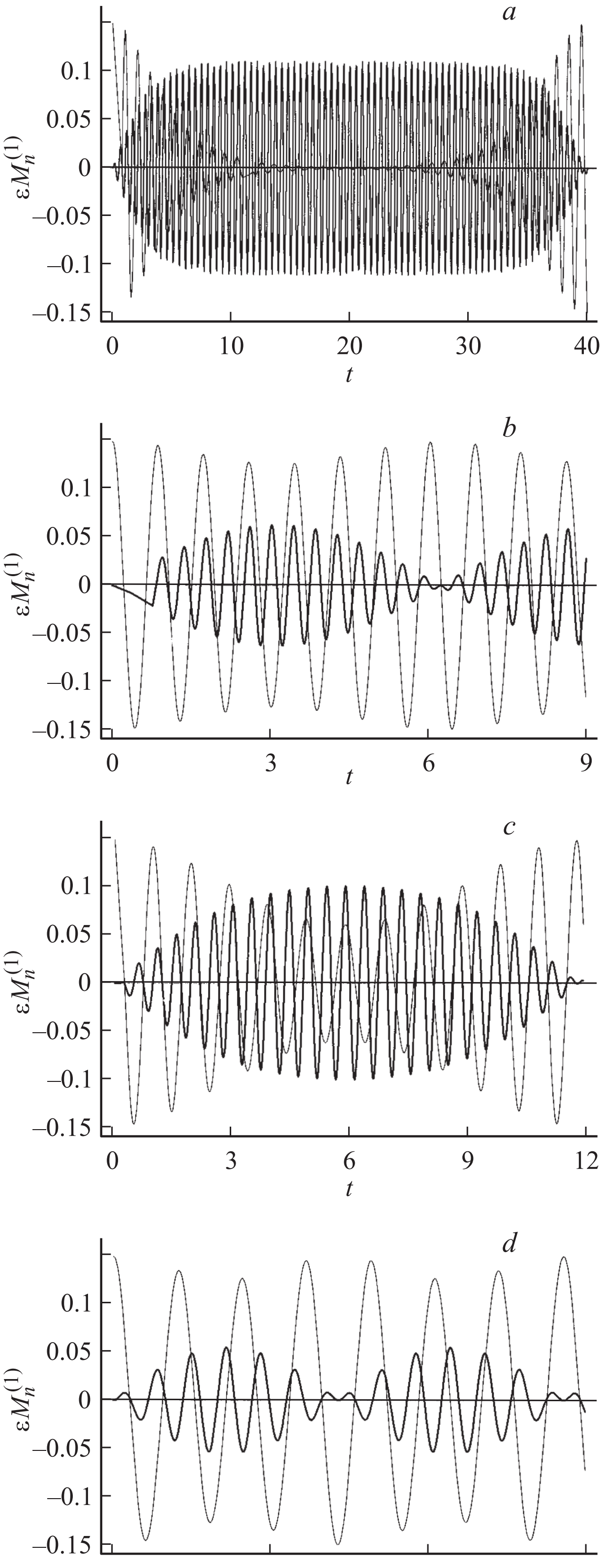

Рис. 2. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд резонансно взаимодействующих четвертой и шестой мод: a — в положении точного резонанса $W = 2.66667$, b — $W = 1.5$, c — $W = 2.5$, d — $W = 3$, e — $W = 3.9$. Тонкая линия — четвертая мода, толстая — шестая.

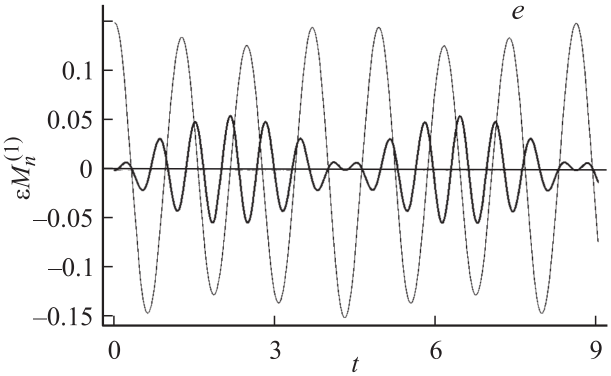

Рис. 2 (*продолжение*).

когда в начальный момент времени возбуждена только четвертая мода, а шестая имеет нулевую амплитуду (при начальном возбуждении только шестой моды резонансная раскачка амплитуды четвертой моды места не имеет [10]). На рис. 2, b–e приведены аналогичные зависимости, рассчитанные при различных значениях параметра W (определяющего величину расстройки σ), отличных от W_r.

Из сравнения зависимостей, приведенных на рис. 2, видно, что нелинейное взаимодействие мод имеет резонансный характер при любых значениях параметра $W < W_{\text{cr}} = 4$, что означает малость расстройки частоты при изменении W в указанном диапазоне; по мере увеличения абсолютной величины параметра расстройки уменьшается: a) характерное время резонансного взаимодействия мод, определяемое временем нарастания амплитуды моды до максимального значения; b) характерное время нахождения энергии в резонансно раскачиваемой моде; c) доля энергии, передаваемой изначально возбужденной модой резонансно раскачиваемой моде, полная перекачка энергии между модами имеют место только в положении точного резонанса. К сказанному следует добавить, что при резонансной раскачке мода, имевшая в начальный момент времени нулевую амплитуду, приобретает амплитуду первого порядка малости, хотя само резонансное взаимодействие мод обнаруживается и реализуется только во втором порядке малости.

4. Сказанное о слабой зависимости условий реализации резонанса от величины собственного заряда капли допускает обобщение на случай одновременной реализации нескольких резонансных взаимодействий [20]. Пусть при $W < 4$ какая-либо, например j-я, мода может быть вовлечена в резонансное взаимодействие в нескольких резонансных ситуациях, отличающихся наборами взаимодействующих мод и величинами W, соответствующими положениям точных резонансов. Например, пусть j-я мода участвует в двух резонансных ситуациях: j, i, k при $W_r = C_1$ и j, nm при $W_r = C_2$, где $C_1, C_2 < 4$. Тогда при возбуждении j-й моды с ней будут резонансно взаимодействовать моды из обеих возможных резонансных ситуаций: i-я, k-я, n-я и m-я. Амплитуды мод, резонансно раскачиваемых за счет взаимодействия с j-й в каждой из комбинаций, будут зависеть от величины параметра расстройки для данной ситуации (т.е. от отклонения истинного значения параметра W от резонансных значений C_1 и C_2). Так, при рассмотрении только первых десяти мод четвертая мода может участвовать в следующих резонансных взаимодействиях: при $W = 0.612$ четвертая мода резонансно взаимодействует с шестой и восьмой; при $W = 1.649$ — с пятой и седьмой; при $W = 2.66667$ — дважды с шестой (случай вырожденного резонанса, рассмотренный выше); при $W = 3.623$ — с третьей и пятой [167]. Таким образом, виртуально возбужденная четвертая мода при любом $W < 4$ может резонансно взаимодействовать со всеми перечисленными выше модами, степень же взаимодействия (доля передаваемой энергии) будет зависеть от величины расстройки в каждой из возможных комбинаций.

Проанализируем ситуацию, когда мода с номером k участвует одновременно в двух резонансных взаимодействиях: в одном вырожденном двухмодовом и одном невырожденном трехмодовом. Введем для обеих резонансных ситуаций параметры расстройки σ_1 и σ_2

$$\omega_p - \omega_q = \omega_k(1 + \varepsilon \cdot \sigma_1); \quad 2\omega_k = \omega_s(1 + \varepsilon\sigma_2).$$

Проводя анализ этого случая аналогично тому, как это делалось выше, получим, что амплитуды первого порядка малости для мод p, q, k имеют вид (28), а для моды s получим

$$M_s^{(1)}(t) = 2a_s^{(1)}(\varepsilon t)\cos\big(2(\omega_p - \omega_q)t - \beta_s^{(1)}(\varepsilon t)\big).$$

Функции $\beta_s^{(1)}(\varepsilon t)$ из последнего выражения и $\beta_k^{(1)}(\varepsilon t)$ из (28) определены следующим образом:

$$\beta_k^{(1)}(T_1) = \sigma_1\omega_k T_1 - b_k^{(1)}(T_1);$$

$$\beta_s^{(1)}(T_1) = (\sigma_2\omega_s + 2\sigma_1\omega_k)T_1 - b_s^{(1)}(T_1).$$

Система дифференциальных уравнений относительно вещественных функций $a_p^{(1)}(\varepsilon t)$, $b_p^{(1)}(\varepsilon t)$, $a_q^{(1)}(\varepsilon t)$, $b_q^{(1)}(\varepsilon t)$; $a_s^{(1)}(\varepsilon t)$, $\beta_s^{(1)}(\varepsilon t)$, $a_k^{(1)}(\varepsilon t)$, $\beta_k^{(1)}(\varepsilon t)$ включает в себя третье, четвертое, пятое и шестое уравнения системы (28), а также уравнения

$$2\omega_k \frac{da_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{pqk}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1) \sin\big(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\big) - \Lambda_{skk}^{(-)} a_s^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1) \sin\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$2\omega_k a_k^{(1)}(T_1)\frac{d\beta_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 2\omega_k^2 a_k^{(1)}(T_1)\sigma_1 + \Lambda_{pqk}^{(-)} a_p^{(1)}(T_1) a_q^{(1)}(T_1)\cos\big(\varphi_{kpq}^{(1)}(T_1)\big) + \Lambda_{skk}^{(-)} a_s^{(1)}(T_1) a_k^{(1)}(T_1)\cos\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$4\omega_s \frac{da_s^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{kks}^{(+)}\big(a_p^{(1)}(T_1)\big)^2 \sin\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$4\omega_s a_s^{(1)}(T_1)\frac{d\beta_s^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 4\omega_s(\sigma_2\omega_s + 2\sigma_1\omega_k)a_s^{(1)}(T_1) + \Lambda_{kks}^{(+)}\big(a_k^{(1)}(T_1)\big)^2\cos\big(\varphi_{sk}^{(1)}(T_1)\big);$$

$$\varphi_{sk}^{(1)}(T_1) = \beta_s^{(1)}(T_1) - 2b_k^{(1)}(T_1). \tag{33}$$

Начальные условия для системы решаемых уравнений можно записать в виде (29), но $j = k, p, q, s$.

На рис. 3, a приведены результаты расчета по системе (33), дополненной третьим, четвертым, пятым и шестым уравнениями системы (28), временны́х зависимостей резонансно взаимодействующих мод, в том числе и резонансно раскачиваемых пятой и шестой мод при тех же начальных условиях, что и на рис. 1 (в условиях точного резонанса четвертой, пятой и седьмой мод, когда начальная деформация задается четвертой и седьмой модами). Видно, что имеет место перекачка энергии седьмой моды во все моды с меньшими номерами. Интересно, что шестая мода в вырожденном резонансе с четвертой модой раскачивается за счет энергии четвертой моды [10] (см. также рис. 2), тем не менее из рис. 3 видно, что амплитуда четвертой моды не только не уменьшается, а немного увеличивается синхронно с пятой и шестой модами. Иными словами, перекачка

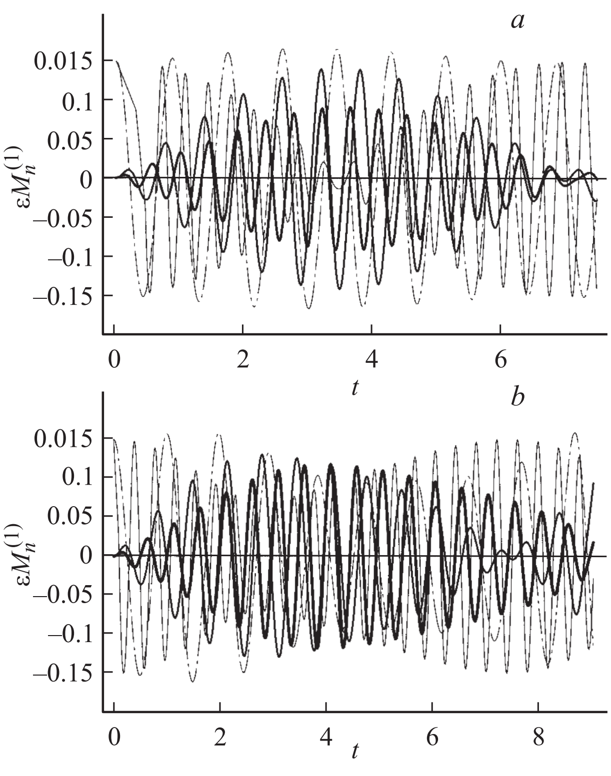

Рис. 3. Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд резонансно взаимодействующих четвертой, пятой, шестой и седьмой мод при $W = 1.649$ (a), 2.66667 (b). Тонкая кривая — седьмая мода, жирная — шестая, полужирная — пятая, штрихпунктир — четвертая.

энергии из седьмой моды в четвертую не только полностью компенсирует затраты энергии четвертой моды на раскачку шестой, но и приводит к ее увеличению.

На рис. 3, b приведены результаты аналогичных расчетов, выполненных при $W = 2.66667$, т.е. в условиях точного вырожденного резонанса между четвертой и шестой модами с теми же начальными условиями, что и на рис. 3, a. Видно, что в этом случае в отличие от ситуации, проиллюстрированной рис. 3, a, энергию отдают и четвертая и седьмая моды, а сами временны́е зависимости амплитуд резонансно раскачиваемых пятой и шетой мод становятся асимметричными.

Заключение

При значениях параметра Рэлея (характеризующего собственный заряд капли), меньших критического, для основной моды при $W < 4$ расстройка частот возбуждающихся мод достаточно мала, чтобы нелинейное взаимодействие мод носило резонансный характер при любых W, независимо от величины резонансных значений W_r в положениях точных резонансов. Величина расстройки отражается лишь на доле передаваемой энергии и характерных временах этого процесса.

Механизм распада нелинейно осциллирующей заряженной капли при малой величине собственного заряда может быть связан с нелинейной резонансной перекачкой энергии капиллярных осцилляций капли из высоких мод в низкие.

Распадная неустойчивость при трехмодовых резонансах реализуется только для комбинационных резонансов, а для вырожденных резонансов она места не имеет.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

Список литературы

[1] *Tsampopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
[2] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
[3] *Natarajan R., Brown R.A.* // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 9. P. 2788–2797.
[4] *Natarajan R., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 183. P. 95–121.
[5] *Natarajan R., Brown R.A.* // Proc. Roy. Soc. (London). 1987. Vol. A410. P. 209–227.
[6] *Feng Z.C., Leal L.G.* // Phys. Fluids. 1993. Vol. A5. N 4. P. 826–836.
[7] *Feng Z.C., Leal L.G.* // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. N 6. P. 1325–1336.
[8] *Feng Z.C., Su Y.H.* // Phys. Fluids. 1997. Vol. 9. N 3. P. 519–529.
[9] *Feng Z.C.* // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
[10] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 22. С. 76–83.
[11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 69–75.
[12] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
[13] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 45–51.
[14] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
[15] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 69–75.
[16] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
[17] *Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
[18] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
[19] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
[20] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 439 с.