01;07

Расчет тепловой волны поглощения лазерного излучения в волоконном световоде на основе двумерного нестационарного уравнения теплопроводности

© Р.И. Голятина, А.Н. Ткачев, С.И. Яковленко

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
119991 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 2 июня 2004 г.)

Тепловая волна поглощения лазерного излучения в сердцевине лазерного световода исследована на основе нестационарного двумерного уравнения теплопроводности. Вычислены скорости распространения волны как функции интенсивности лазерного излучения, а также пороговые значения интенсивности, при которых возникает волна прогрева. Показано, что скорость волны при больших интенсивностях качественно описывается известной из теории горения формулой и пропорциональна квадратному корню из интенсивности излучения. Пороговые значения интенсивности лазерного излучения, полученные в расчетах, хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Введение

Эффект резкого изменения мощным лазерным излучением физических параметров прозрачного конденсированного вещества известен давно [1]. В частности, при превышении интенсивностью лазерного излучения некоторого порогового значения резко повышается коэффициент поглощения излучения. Это приводит при оптических разрядах в конденсированной среде [2,3] и в газе [4] к распространению волны поглощения навстречу лазерному излучению.

В последние годы большой интерес возник к явлению такого рода в волоконных световодах [5–15]. Если на каком-либо участке волокна повышен коэффициент поглощения, то в этом месте происходит нагрев, который приводит к дальнейшему повышению поглощения. Теплопроводность обеспечивает продвижение такой тепловой волны поглощения (ТВП) навстречу лазерному излучению.

ТВП ранее рассматривалась в упрощенном стационарном одномерном приближении в системе координат, движущейся со скоростью волны [7,8]. В данной работе ТВП рассматривается на основе двумерного нестационарного уравнения теплопроводности. Рассмотрены зависимости скорости движения ТВП от интенсивности излучения и определены пороговые значения интенсивности излучения, при которой возникает ТВП.

Рассматриваемая модель

Уравнение теплопроводности. Нестационарная двумерная модель ТВП в цилиндрических координатах r, z в прямоугольной области $0 \le r \le r_1$, $0 \le z \le l$ (r_1 — внешний радиус световода, l — его длина) описывается двумя уравнениями: уравнением теплопроводности (1) и уравнением переноса излучения (2)

$$c_P(T)\rho(T)\frac{\partial}{\partial t}T(t,z,r) = \frac{\partial}{\partial z}\left[k(T)\frac{\partial}{\partial z}\left(T(t,z,r)\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot k(T)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(T(t,z,r)\right)\right)\right] + \alpha(T)I(t,z,r), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,r) = -\alpha(T)\,I(z,r). \quad (2)$$

Здесь z — координата вдоль волновода, r — координата по радиусу, $c_P(T)$ — удельная теплоемкость, I — интенсивность (плотность потока энергии) лазерного излучения, $\alpha(T)$ — коэффициент поглощения лазерного излучения, $k(T)$ — коэффициент теплопроводности, $\rho(T)$ — плотность вещества. Интенсивность зависит от времени неявным образом через температуру. Зависимость коэффициента поглощения от температуры была выбрана следующей:

$$\alpha(T) = \begin{cases} 0, & T < T_1, \\ \alpha_P(T-T_1)/(T_P-T_1), & T_1 \le T \le T_P, \\ \alpha_P, & T > T_P. \end{cases}$$

Здесь α_P — максимальное значение коэффициента поглощения; T_P — температура, при которой достигается это максимальное значение; T_1 — температура, при которой начинается быстрый рост коэффициента поглощения. Полагалось $(T_P - T_1) \ll T_P$, при этом от величины T_1 результаты расчетов практически не зависят. Исходя из данных работ [7,8] было положено $\alpha_P = 560\,\mathrm{cm}$, $T_P = 2000^\circ\mathrm{C}$. Если существенно изменить величину α_P, то результаты расчетов не будут согласовываться с экспериментальными данными. Кроме того, было положено $T_1 = 1700\mathrm{C}$.

Зависимость теплоемкости от температуры и от характеристик фазовых переходов представлялась в виде

$$c_P(T) = c_0(T) + \Delta c(T, T_m, \Delta T_m, \Delta H_m) + \Delta c(T, T_P, \Delta T_P, \Delta H_P).$$

Здесь $c_0(T)$ — функция, описывающая зависимость теплоемкости от температуры в отсутствие фазовых переходов:

$$\Delta c(T, T_0, \Delta T_0, \Delta H) = (\Delta H_0/\pi^{1/2}\Delta T_0) \times \exp\{-[(T - T_0)/\Delta H_0]^2\}$$

— функция, описывающая скачок теплоемкости в точке фазового перехода; T_m — температура плавления; T_P — температура, соответствующая резкому повышению поглощения; ΔH_m — энергия плавления; ΔH_P — энергия фазового перехода при увеличении поглощения. Величина ΔT_0 характеризует ширину фазового скачка.

Для стекла в представленных здесь расчетах были выбраны следующие параметры [7,8,16]: $\rho(T) = 2.2\,\mathrm{g/cm^3}$, $k = 0.02\,\mathrm{W/cm \cdot K}$, $c_0(T) = 0.74\,\mathrm{J/g \cdot K}$, $T_m = 1600^\circ\mathrm{C}$, $T_P = 2000^\circ\mathrm{C}$, $\Delta H_m = 142\,\mathrm{J/g}$, $\Delta H_P = 142\,\mathrm{J/g}$, $\Delta T_m = 100\,\mathrm{K}$, $\Delta T_P = 100\,\mathrm{K}$.

Граничные и начальные условия. Считалось, что излучение интенсивности I_0 вводится при $z = 0$: $I(t, 0, r) = I_0(r)$. При этом из (2) имеем

$$I(t, z) = I_0 \exp\left(-\int_0^z \alpha\big(T(t, z')\big)dz'\right).$$

Однако при численном интегрировании это выражение неудобно, поскольку содержит искомую величину $T(t, z)$. В конкретных расчетах распределение вводимой интенсивности по радиусу соответствовало „ступеньке“: $I_0(r) = I_0$ при $r < r_0$, $I_0(r) = 0$ при $r \geq r_0$.

Считалось, что сток тепла с поверхности световода отсутствует

$$\frac{\partial}{\partial r} T(t, z, r)\bigg|_{r=r_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} T(t, z, r)\bigg|_{z=0,\, z=l} = 0.$$

Начальные условия соответствовали „ступеньке“: $T(t, z, r)|_{t=0} = T_0$ при $z < z_p$, $T(t, z, r)|_{t=0} = T_p$ при $z \geq z_p$. Здесь z_p — координата точки начального возмущения. В расчетах полагалось $T_0 = 20^\circ\mathrm{C}$.

Алгоритм решения двумерной задачи

Для решения уравнения (1) построим пятиточечную конечно-разностную аппроксимацию этого уравнения по пространственным переменным второго порядка точности. Для этого будем использовать метод конечных разностей на равномерной сетке по z с шагом hz и на квазиравномерной сетке по r [16,17]

$$\psi(\alpha, t) = r_1 \frac{\ln^\alpha(1.01+\alpha t) - \ln^\alpha(1.01)}{\ln^\alpha(1.01+\alpha) - \ln^\alpha(1.01)}, \quad \text{где} \quad t = \frac{i-1}{Nr-1}.$$

Тогда для внутреннего узла сетки (i, j), $1 < i < Nr$, $1 < j < Nz$ получаем

$$c_P(T_{i,j})\rho(T_{i,j}) \frac{\partial}{\partial t} T_{i,j} = P^1_{i,j} T_{i,j-1} + P^3_{i,j} T_{i,j+1} + P^2_{i,j} T_{i-1,j} + P^4_{i,j} T_{i+1,j} - (Pr^5_{i,j} + Pz^5_{i,j}) T_{i,j} + \alpha(T_{i,j}) I_{i,j},$$

где

$$P^1_{i,j} = \frac{K_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_z^2}, \quad P^3_{i,j} = \frac{K_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_z^2}, \quad Pz^5_{i,j} = P^1_{i,j} + P^3_{i,j},$$

$$P^2_{i,j} = \frac{r_{i-\frac{1}{2}} K_{i-\frac{1}{2},j}}{hr_{i-1}(r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}) r_i}, \quad P^4_{i,j} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} K_{i+\frac{1}{2},j}}{hr_i(r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}) r_i},$$

$$Pr^5_{i,j} = P^2_{i,j} + P^4_{i,j},$$

$hr_i = r_{i+1} - r_i$, $r_{i+\frac{1}{2}}$ — середина интервала квазиравномерной сетки, которая вычисляется при помощи того же преобразования ψ, что и для построения самой сетки

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \psi\left(\frac{i - \frac{1}{2}}{Nr - 1}\right).$$

Учитывая, что при $r = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$c_P(T)\rho(T) \frac{\partial}{\partial t} T(t, z, r) = \frac{\partial}{\partial z}\left[k(T) \frac{\partial}{\partial z}\big(T(t, z, r)\big)\right] + 2 \cdot k(T) \frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(T(t, z, r)\big) + \alpha(T) I(t, z, r),$$

и то, что на всех границах заданы условия Неймана, получаем следующие выражения для коэффициентов разностной схемы на соответствующих границах: для $i = 1, \ldots, Nr$

$$P^1_{i,1} = 0, \quad P^3_{i,1} = \frac{2K_{i,\frac{1}{2}}}{h_z^2}, \quad P^1_{i,Nz} = \frac{2K_{i,Nz-\frac{1}{2}}}{h_z^2}, \quad P^3_{i,Nz} = 0;$$

для $j = 1, \ldots, Nz$

$$P^2_{1,j} = 0, \quad P^4_{1,j} = \frac{4K_{1,j}}{hr_1^2},$$

$$P^2_{Nr,j} = \frac{K_{Nr-\frac{1}{2},j}}{hr_{Nr-1}(r_{Nr} - r_{Nr-\frac{1}{2}})}. \quad P^4_{Nr,j} = 0.$$

Таким образом, приходим к эволюционной задаче

$$c_P(T)\rho(T) \frac{\partial}{\partial t} T(t, z, r) = (\Lambda_z T)_{i,j} + (\Lambda_r T)_{i,j} + \alpha(T_{i,j}) I_{i,j},$$

где

$$(\Lambda_z T)_{i,j} = P^1_{i,j} T_{i,j-1} + P^3_{i,j} T_{i,j+1} - Pz^5_{i,j} T_{i,j},$$

$$(\Lambda_r T)_{i,j} = P^2_{i,j} T_{i-1,j} + P^4_{i,j} T_{i+1,j} - Pr^5_{i,j} T_{i,j},$$

для которой методом расщепления по пространственным переменным [18] построим абсолютно устойчивую неявную по времени схему первого порядка точности

$$c_P(T^n_{i,j})\rho(T^n_{i,j}) \frac{T^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} - T^n_{i,j}}{\Delta t} = \big(\Lambda_r T^{n+\frac{1}{2}}\big)_{i,j},$$

$$c_P(T^n_{i,j})\rho(T^n_{i,j}) \frac{T^{n+1}_{i,j} - T^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}}{\Delta t} = \big(\Lambda_z T^{n+1}\big)_{i,j} + \alpha(T^n_{i,j}) I_{i,j},$$

где n — номер шага по времени, Δt — шаг по времени.

Каждое из полученных трехточечных разностных уравнений легко решается с помощью метода факторизации (прогонки).

Результаты расчетов

Распространение волны поглощения. Характерное распределение температуры по оси световода при слабом и сильном лазерном излучении иллюстрирует рис. 1,2. Как и следовало ожидать, имеет место пик температуры, продвигающийся навстречу лазерному лучу. Спад температуры за пиком обусловлен падением интенсивности лазерного излучения за счет поглощения на длине порядка $\alpha_P^{-1} = 18\,\mu$m и теплопроводностным охлаждением. При меньшей интенсивности излучения охлаждение более существенно, поэтому пик выражен резче.

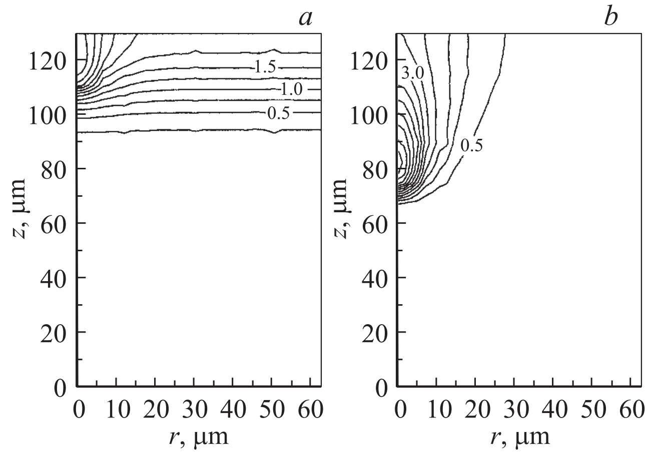

Рис. 1. Линии равного уровня температуры, проведенные с шагом 500°C. В разрывах линий указана температура в 1000°C. a: $I_0 = 1\,$MW/cm^2, $t = 80\,\mu$s ($P = 0.5\,$MW, $r_0 = 4\,\mu$m); b: $I_0 = 4\,$MW/cm^2, $t = 210\,\mu$s ($P = 4\,$MW, $r_0 = 4\,\mu$m).

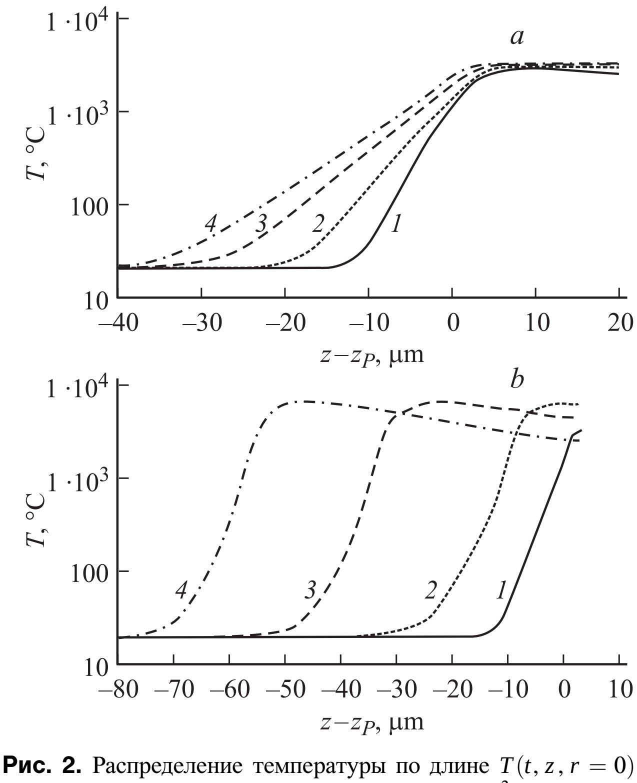

Рис. 2. Распределение температуры по длине $T(t, z, r = 0)$ в различные моменты времени для $I_0 = 1\,$MW/cm^2, $P = 0.5\,$MW, $r_0 = 4\,\mu$m (a) и $I_0 = 4\,$MW/cm^2, $P = 4\,$MW, $r_0 = 4\,\mu$m (b). t, μs: a — 10 (*1*), 38 (*2*), 66 (*3*), 80 (*4*); b — 10 (*1*), 90 (*2*), 170 (*3*), 210 (*4*).

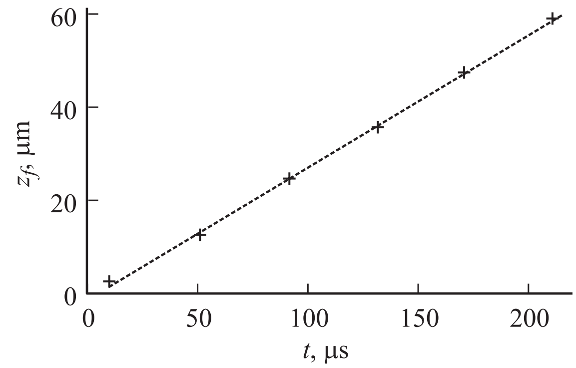

Рис. 3. Зависимость координаты z_f фронта тепловой волны пробега от времени t. Координата фронта z_f определяется как точка, в которой $T(t, z_f, r = 0) = T_P = 2000\,$K. Пунктир — $z_f(t) = v_f t + \text{const}$, где $v_f = 0.29\,$m/s. $I_0 = 4\,$MW/cm^2, $P = 4\,$MW, $r_0 = 4\,\mu$m.

Скорость фронта v_f ТВП определялась по зависимости от времени координаты фронта $z(t)$, определяемой равенством $T(t, r = 0, z_f) = T_P$ (рис. 2,3). Зависимость $z_f(T)$ с хорошей точностью следовала линейной зависимости $z_f(t) = v_f t + \text{const}$, и по наклону $z_f(t)$ находилась v_f. Результаты расчетов представлены на рис. 4. Там же приведены экспериментальные данные [15].

Скорость ТВП. В теории горения для скорости распространения пламени было получено выражение, пропорциональное квадратному корню из удельной мощности энерговыделения [19]. Оно используется в теории распространения разрядов [2] и может быть в данном случае записано в виде

$$v_f = \sqrt{k\alpha_P I_0/(T_P - T_0)}\;/\;(\rho c_P). \qquad (3)$$

В работах [7,8] предложено несколько иное выражение для скорости фронта ТВП, которое можно записать в виде

$$v_f = v_{f0}\cdot\left(\sqrt{(I_0/I_{\text{ch}}) + 1} - 1\right). \qquad (4)$$

Здесь $V_{f0} = k\alpha_P/2\rho c_P$ — характеризует линейное нарастание скорости с ростом интенсивности в слабых полях; $I_{\text{ch}} = k\alpha_P(T - T_0)/4$ характеризует интенсивность лазерного излучения, при которой линейная зависимость переходит в корневую. Для параметров расчетов, представленных на рис. 4, имеем $v_{f0} = 0.034\,$m/s, $I_{\text{ch}} = 5.8\cdot 10^{-3}\,$MW/cm^2.

Выражение (4) при $I_0 \gg I_{\text{ch}}$ переходит в выражение (3). В выражении (4) учтены затраты энергии на разогрев смеси, которыми пренебрегается при получении (3). Проведенные нами расчеты скорости фронта v_f в отсутствие охлаждения согласуются с расчетами по

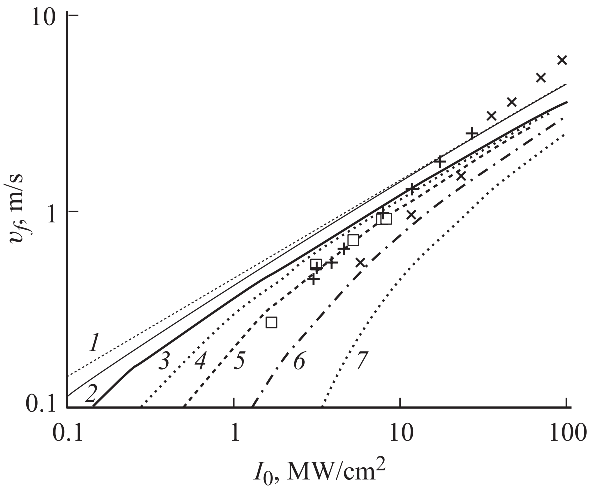

Рис. 4. Зависимость скорости распространения фронта ТВП от интенсивности лазерного излучения. Кривые — результаты расчетов при различных радиусах кора, значки — экспериментальные значения. *1* — корневая зависимость (3), *2* — зависимость (4); *3–7* — расчет при $r_0 = 50, 20, 10, 4, 2\,\mu$m соответственно. Использовались экспериментальные данные для SiO_2–GeO_2 волноводов внешним диаметром $125\,\mu$m [12]. $\times$ — $\Delta n = 0.04$ — разница показателей преломления в центре и на периферии; $d = 3.3\,\mu$m — диаметр сердцевины, заполненной излучением; $+$ — $\Delta n = 0.009$, $d = 5.75\,\mu$m; $\square$ — $\Delta n = 0.0015$, $d = 11.05\,\mu$m.

формуле (4), когда интенсивность много больше пороговой (см. ниже). Впрочем, в рассматриваемых условиях результаты, получаемые на основе выражений (3) и (4), близки (рис. 4). Более существенным оказывается влияние охлаждения.

Пороговые интенсивности. В серии расчетов была определена пороговая интенсивность I_{th} для различных значений r_0 (рис. 5). При $I_0 < I_{\text{th}}$ волна прогрева не возникает. Оценку порогового значения

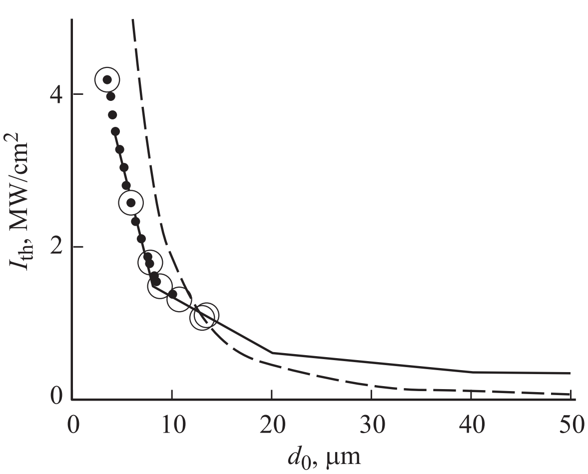

Рис. 5. Зависимость пороговых значений интенсивности от диаметра сердцевины световода d_0. Значки — экспериментальные данные [12], сплошная кривая — результаты расчетов, штриховая — оценка (5).

интенсивности I_{th1} излучения можно получить, приравняв поглощаемую мощность эффективному $\alpha_P \cdot I_{\text{th1}}$ теплоотводу $\big(6(T_P - T_0)\cdot k\big)/r_0^2$. В результате имеем

$$I_{\text{th1}} = \frac{6(T_P - T_0)\cdot k}{r_0^2 \alpha_P}. \qquad (5)$$

В численных расчетах пороговое значение определялось по значению скорости 0.1 m/s. Сопоставление формулы (5) с результатами численных расчетов и измерений пороговых значений интенсивности [12] проведено на рис. 5. Видно, что в рассмотренном диапазоне данных оценка отличается от расчетов примерно в два раза. В то же время результаты двумерного расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Заключение

Проведенные расчеты показали, что тепловая волна поглощения, бегущая по сердцевине световода, хорошо описывается нестационарным двумерным уравнением теплопроводности и стационарным уравнением для интенсивности лазерного излучения. Скорость ТВП при интенсивностях, намного превышающих пороговое значение, хорошо описывается известной из теории горения формулой и пропорциональна квадратному корню из интенсивности света. Пороговое значение интенсивности лазерного излучения по порядку величины оценивается из сравнения нагрева с теплоотводом. Полученное на основе расчетов пороговое значение интенсивности хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Вычисленные зависимости скорости волны от интенсивности света и пороговые значения интенсивности согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Авторы благодарны Е.М. Дианову за постановку задачи, А.С. Бирюкову и И.А. Буфетову за обсуждение результатов, а также А.А. Фролову за предоставление результатов измерений в оцифрованном виде.

Список литературы

[1] *Аскарьян Г.А., Прохоров А.М., Чантурия Г.Ф., Шипуло Г.П.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 6. С. 2180–2182. Прохоров А.М. Квантовая электроника. Избранные труды. М.: ИздАТ, 1996. С. 87–90.

[2] *Зеликин Н.В., Каск Н.Е., Радченко В.В., Федоров Г.М., Федорович О.В., Чопорняк Д.Б.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 4. Вып. 21. С. 1296–1299.

[3] *Каск Н.Е., Корниенко Л.С.* // Изв. АН СССР. 1982. Т. 46. № 6.

[4] *Райзер Ю.П.* Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974. 308 с.

[5] *Kashyap R.* // Proc. Intenat. Conf. Lasers'87, Lake Tahoe (Nevada), 1987. P. 859–866.

[6] *Kashyap R., Blow K.J.* // Electron. Lett. 1988. Vol. 24. N 1. P. 47–49.

[7] *Hand D.P., Russel P.St.J.* // Opt. Lett. 1988. Vol. 13. N 9. P. 767–769.
[8] *Hand D.P., Russel P.St.J.* // 14th ECOC. 1988. Pt 1. P. 111–114.
[9] *Kashyap R., Sayles A., Cornwell G.F.* // Proc. SPIE. Vol. 2965. P. 586–591.
[10] *Driscoll T.J., Calo J.M., Lawandy N.M.* // Opt. Lett. 1991. Vol. 16. N 13. P. 1046–1048.
[11] *Dianov E.M., Mashinsky V.M., Myzina V.A., Sidorin Y.S., Streltsov A.M., Chickolini A.V.* // Sov. Lightwave Commun. 1992. N 2. P. 293–299.
[12] *Дианов Е.М., Буфетов И.А., Фролов А.А., Плотниченко В.Г., Машинский В.М., Чурбанов М.Ф., Снопатин Г.Е.* // Квантовая электрон. 2002. Т. 32. № 6. С. 476–478.
[13] *Davis D.D., Mettler S.C., DiGiovanni D.J.* // Proc. SPIE. 1997. Vol. 2714. P. 202–210.
[14] *Davis D.D., Mettler S.C., DiGiovanni D.J.* // Proc. SPIE. 1997. Vol. 2966. P. 592–606. Opt. Lett. 2003. Vol. 28. N 12. P. 974–976.
[15] *Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М.* и др. Физические величины / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. IBSN 5-283-04013-5.
[16] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М., 1978.
[17] *Sytsko Yu.I., Yakovlenko S.I.* // Laser Physics. 1996. N 6(5). P. 989–996.
[18] *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
[19] *Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А.* // Журн. физ. хим. 1938. Т. 12. Вып. 1. С. 100–105. Зельдович Я.Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика. М.: Наука, 1984. С. 226–232.