

Квазиодномерное баллистическое кольцо в скрещенных высокочастотных электрических полях

© Э.Г. Федоров, Э.М. Эпштейн, Г.М. Шмелев

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет,
400074 Волгоград, Россия
e-mail: eduard-f@mail.ru

(Поступило в Редакцию 7 июня 2004 г.)

Рассмотрена динамика электрона в квазиодномерном баллистическом кольце в двух взаимно-перпендикулярных высокочастотных электрических полях, лежащих в плоскости кольца. Рассчитаны средние дипольный момент и интенсивность излучения кольца. Определено условие возникновения спонтанного нарушения симметрии, в результате которого система может приобретать постоянную составляющую дипольного момента.

Развитие технологии изготовления мезоскопических структур стимулирует экспериментальные и теоретические исследования низкоразмерных одноэлектронных систем, в частности квазиодномерных колец (см., например, [1,2]). Большинство работ по этой проблеме посвящено квантовым явлениям. Однако, как было показано ранее [3–9], квазиодномерные кольца обладают также интересными классическими электродинамическими свойствами. В данной работе мы исследуем отклик электрона в квазиодномерном кольце на две внешние плоские электромагнитные (ЭМ) волны, поляризованные перпендикулярно друг другу и распространяющиеся вдоль нормали к плоскости кольца (электрические векторы волн лежат в плоскости кольца).

Рассмотрим плоское кольцо радиуса R (ширина кольца мала по сравнению с его радиусом), представляющее собой квантовую яму между двумя concentрическими потенциальными барьерами. Движение электрона вдоль радиуса кольца квантовано, а вдоль окружности — классическое. Будем также считать, что длина свободного пробега электрона велика по сравнению с $2\pi R$ (баллистическое движение), а длины волн существенно превышают диаметр кольца. При этом в дипольном приближении на электроны действуют только электрические поля волн

$$\mathbf{E} = \{E_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1), E_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)\}. \quad (1)$$

Предполагается, что до включения внешних полей (в момент времени $t = 0$) электрон обладает энергией W , совершая вращательное движение вдоль окружности кольца. Уравнение движения электрона в кольце имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \Omega_1^2 \sin \varphi \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \Omega_2^2 \cos \varphi \sin(\omega_2 t + \alpha_2) = 0, \quad (2)$$

где $\Omega_{1,2}^2 = |e|E_{1,2}/(mR)$, e и m — заряд и эффективная масса электрона; $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2} \pm \pi$; φ — угловая координата, отсчитываемая от оси Ox (параллельной полю \mathbf{E}_1).

Считаем поле \mathbf{E} высокочастотным ($\omega_{1,2} \gg \omega_{\text{slow}}$, ω_{slow} — частота „медленной“ составляющей движения электрона, см. ниже). Для определения характера „медленного“ движения электрона воспользуемся методом усреднения Капицы [10], в соответствии с которым полагаем $\varphi = \Phi + \xi$, где Φ и ξ описывают соответственно „медленное“ движение и малые высокочастотные осцилляции. „Медленное“ движение подчиняется уравнению $mR^2 \ddot{\Phi} = -\partial U_{\text{eff}}/\partial \Phi$,

$$U_{\text{eff}} = mR^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Omega_1^2}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_2^2}{\omega_2} \right)^2 \right] \sin^2 \Phi + \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{2} A \left[\Phi \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right) \sin 2\Phi \right] \right\}, \quad (3)$$

где U_{eff} — эффективная потенциальная энергия, $A = 0$ при $\omega_1 \neq \omega_2$ и $A = (1/2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ при $\omega_1 = \omega_2$.

Рассмотрим ряд частных случаев, следующих из выражения (3).

1. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то из (3) получаем

$$U_{\text{eff}} = \frac{mR^2}{4} \left[\left(\frac{\Omega_1^2}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_2^2}{\omega_2} \right)^2 \right] \sin^2 \Phi. \quad (4)$$

В случае $\Omega_1^2/\omega_1 > \Omega_2^2/\omega_2$ потенциальная энергия (4) имеет минимумы при $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi$, а в случае $\Omega_1^2/\omega_1 < \Omega_2^2/\omega_2$ — при $\Phi = \pm\pi/2$.

2. Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то из (3) получаем

$$U_{\text{eff}} = \frac{mR^2}{4\omega^2} \left[(\Omega_1^4 - \Omega_2^4) \sin^2 \Phi - \Omega_1^2 \Omega_2^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin 2\Phi \right], \quad (5)$$

что в случае $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ имеет вид

$$U_{\text{eff}} = -\frac{mR^2}{4\omega^2} \Omega^4 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin 2\Phi. \quad (6)$$

Потенциальная энергия (6) при $\alpha_1 - \alpha_2 \neq \pm\pi/2$ имеет минимумы при $\Phi = \pi/4$ и $\Phi = 5\pi/4$.

3. При $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi/2$ (эллиптически поляризованная ЭМ волна) выражение (3) принимает вид

$$U_{\text{eff}} = \frac{mR^2}{4\omega^2} (\Omega_1^4 - \Omega_2^4) \sin^2 \Phi. \quad (7)$$

4. Если $\Omega_1^2/\omega_1 = \Omega_2^2/\omega_2$, то из (3) следует, что при выполнении условий $\omega_1 \neq \omega_2$ и/или $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi/2$ реализуется ситуация $U_{\text{eff}} = 0$.

Используя выражение для потенциальной энергии (4), получаем уравнение „медленного“ (усредненного по высокочастотным осцилляциям) движения электрона

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Omega_1^2}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_2^2}{\omega_2} \right)^2 \right] \sin 2\Phi = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения движения (8) с начальными условиями $\Phi_0 = \Phi(0)$, $\dot{\Phi}_0 = \dot{\Phi}(0) = R^{-1}(2W/m)^{1/2}$ имеет вид

$$\Phi = \Psi + \lambda, \quad (9)$$

$$\Psi = \begin{cases} \arcsin \{ q \operatorname{sn} [\omega_0 t + \\ + F(\arcsin(q^{-1} \sin(\Phi_0 - \lambda)), q), q] \}, & q < 1, \\ \arcsin \{ \operatorname{th} [\omega_0 t + F(\Phi_0 - \lambda, 1)] \}, & q = 1, \\ \arcsin \{ \operatorname{sn} [q\omega_0 t + F(\Phi_0 - \lambda, q^{-1}), q^{-1}] \}, & q > 1, \end{cases} \quad (10)$$

где $\lambda = 0$ при $\Omega_1^2/\omega_1 > \Omega_2^2/\omega_2$ и $\lambda = \pi/2$ при $\Omega_1^2/\omega_1 < \Omega_2^2/\omega_2$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left| \left(\frac{\Omega_1^2}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_2^2}{\omega_2} \right)^2 \right|}, \quad (11)$$

$$q^2 = \frac{\dot{\Phi}_0^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\Phi_0 - \lambda)), \quad (12)$$

$\operatorname{sn}(\chi, k)$ — эллиптический синус; $F(\chi, k)$ — эллиптический интеграл 1-го рода [11].

Основная частота „медленного“ движения электрона равна

$$\omega_{\text{slow}} = \omega_0 \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{1}{K(q)}, & q < 1, \\ 0, & q = 1, \\ \frac{q}{K(q^{-1})}, & q > 1, \end{cases} \quad (13)$$

где $K(\chi)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода [11].

Дипольный момент (относительно центра окружности кольца) и интенсивность излучения кольца, соответствующие одному электрону, определяются как [12]

$$\mathbf{P} = eR \{ \cos \Phi, \sin \Phi \}, \quad (14)$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{P}}^2 = \frac{2}{3c^3} (eR)^2 (\dot{\Phi}^4 + \ddot{\Phi}^2). \quad (15)$$

Подстановкой (9) в (15) находим интенсивность излучения кольца

$$I = \frac{2}{3c^3} (eR)^2 \omega_0^4 \begin{cases} q^4 + q^2(1 - 2q^2) \operatorname{sn}^2 [\omega_0 t + \\ + F(\arcsin(q^{-1} \sin(\Phi_0 - \lambda)), q), q], & q < 1, \\ \operatorname{sech}^2 [\omega_0 t + F(\Phi_0 - \lambda, 1)], & q = 1, \\ q^4 + (1 - 2q^2) \operatorname{sn}^2 [q\omega_0 t + \\ + F(\Phi_0 - \lambda, q^{-1}), q^{-1}], & q > 1. \end{cases} \quad (16)$$

Средняя интенсивность излучения есть

$$\langle I \rangle = \frac{2}{3c^3} (eR)^2 \omega_0^4 G(q), \quad (17)$$

где функция $G(q)$ имеет вид

$$G(q) = \begin{cases} q^4 + (1 - 2q^2) \left[1 - \frac{E(q)}{K(q)} \right], & q < 1, \\ 0, & q = 1, \\ q^4 + q^2(1 - 2q^2) \left[1 - \frac{E(q^{-1})}{K(q^{-1})} \right], & q > 1 \end{cases} \quad (18)$$

$E(\chi)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода [11].

При $q \ll 1$ электрон совершает малые колебания, при этом $G(q) \cong q^2/2$, в результате из (17) следует, что

$$\langle I \rangle = \frac{1}{3c^3} (eR)^2 \omega_0^4 q^2. \quad (19)$$

При $q \gg 1$ (в случае $\omega_0^2 \ll \dot{\Phi}_0^2$) имеем $q^2 \cong \dot{\Phi}_0^2/\omega_0^2$, поэтому $G(q) \cong q^4$, $(\omega_0 q)^4 \cong \dot{\Phi}_0^4$ и из (17) получаем

$$\langle I \rangle = I_0 = \frac{2}{3c^3} (eR)^2 \dot{\Phi}_0^4, \quad (20)$$

что совпадает с выражением для излучения электрона, движущегося по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью [12], соответствующей энергии $W = R^2 \dot{\Phi}_0^2 m/2$.

Анализируя зависимость $\langle I \rangle$ от q , рассмотрим q как функцию от $\dot{\Phi}_0^2/\omega_0^2$ или как функцию от Φ_0

$$\langle I \rangle = I_0 \frac{G(q)}{q^4} \left[1 + M(q) + \frac{1}{4} M^2(q) \right], \quad (\Phi_0 = \text{fix}), \quad (21)$$

где

$$M(q) = \frac{(1 - \cos 2(\Phi_0 - \lambda))}{q^2 - (1/2)(1 - \cos 2(\Phi_0 - \lambda))}$$

и

$$\langle I \rangle = I_0 \frac{G(q)}{q^4} \left[1 + B(q) + \frac{1}{4} B^2(q) \right], \quad (\dot{\Phi}_0^2/\omega_0^2 = \text{fix}), \quad (22)$$

где $B(q) = 2(q^2 \omega_0^2 / \dot{\Phi}_0^2 - 1)$.

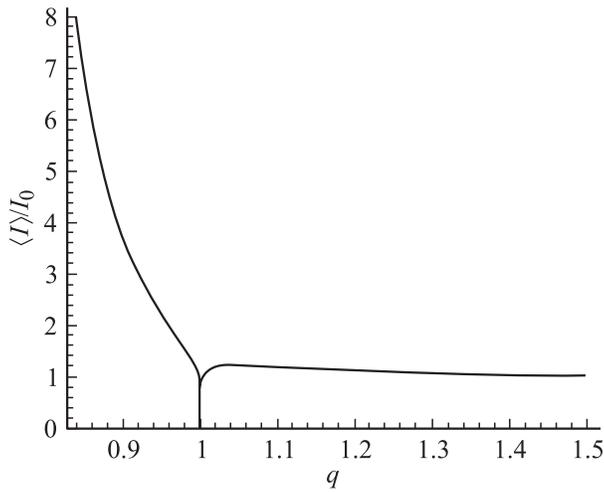


Рис. 1. Зависимость $\langle I \rangle / I_0$ от $q = q(\Phi_0^2 / \omega_0^2)$ при $\Phi_0 = \pi/4$.

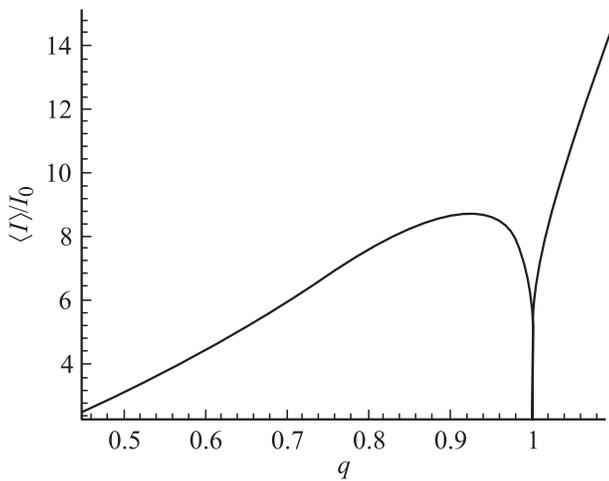


Рис. 2. Зависимость $\langle I \rangle / I_0$ от $q = q(\Phi_0)$ при $\Phi_0 / \omega_0 = 0.45$.

На рис. 1, 2 представлены зависимости $\langle I \rangle / I_0$ от q при $\Omega_1^2 / \omega_1 > \Omega_2^2 / \omega_2$, построенные по формулам (21) и (22) соответственно.

Средний дипольный момент $\langle \mathbf{P} \rangle$ кольца находим, подставляя (9) в (14) и усредняя полученное выражение по периоду $T_{\text{slow}} = 2\pi / \omega_{\text{slow}}$. При $q > 1$ имеем $\langle \mathbf{P} \rangle = \{0, 0\}$. При $q < 1$ реализуются два случая:

$$\langle \mathbf{P} \rangle = eR \left\{ \pm \frac{\pi}{2K(q)}, 0 \right\}$$

для $\Omega_1^2 / \omega_1 > \Omega_2^2 / \omega_2$ и

$$\langle \mathbf{P} \rangle = eR \left\{ 0, \pm \frac{\pi}{2K(q)} \right\}$$

для $\Omega_1^2 / \omega_1 < \Omega_2^2 / \omega_2$. Этот эффект имеет следующее объяснение. Под действием электрических полей падающих на кольцо ЭМ волн „медленное“ движение электрона представляет собой внутриямное движение в

потенциале с двумя ямами (см. (4)). При $q > 1$ энергия электрона превышает высоту потенциального барьера между ямами и электрон преодолевает барьер. При $q < 1$ электрон совершает колебательное движение в пределах одной из ям. Таким образом, при $q = 1$ возникает спонтанное нарушение симметрии, в результате которого рассматриваемая система может приобретать постоянную составляющую дипольного момента (оптическое выпрямление) [3].

Если кольцо содержит N электронов, то выражения для \mathbf{P} и $\langle \mathbf{P} \rangle$ умножаются на N , а выражения для I и $\langle I \rangle$ — на N^2 (при одинаковых Φ_0 и Φ_0 для всех электронов).

Сделаем численные оценки. Полагая $R = 5 \cdot 10^{-5}$ см, $m = 0.1m_e$ (m_e — масса свободного электрона), $W = 2 \cdot 10^{-3}$ эВ, $\omega_1 = 10^{13}$ с $^{-1}$, $\omega_2 = 10^{14}$ с $^{-1}$, $E_1 = 1.5 \cdot 10^4$ В/см, $E_2 = 3 \cdot 10^3$ В/см, имеем $\Omega_1 \approx 2.30 \cdot 10^{12}$ с $^{-1}$, $\Omega_2 \approx 1.03 \cdot 10^{12}$ с $^{-1}$, $\omega_0 \approx 3.73 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$, $\Phi_0 / \omega_0 \approx 0.45$, $\Omega_1^2 / \omega_1 > \Omega_2^2 / \omega_2$. При $\Phi_0 = \pi/4$ и указанных выше значениях остальных параметров получаем $q \approx 0.84$ (см. (12)), $\omega_{\text{slow}} \approx 2.82 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$ (см. (13)). Таким образом, из (21) или (22) следует, что $\langle I \rangle / I_0 \approx 8.06$. Для выбранных здесь значений частот ЭМ волн условие $\omega_{1,2} \gg \omega_{\text{slow}}$ применимости метода усреднения Капицы выполняется. При частоте столкновений электронов $\nu = 5 \cdot 10^9$ с $^{-1}$ имеем $2\pi\nu \ll \omega_{\text{slow}}$, что оправдывает использованное в работе бесстолкновительное приближение при описании динамики электронов в кольце.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 02-02-16238).

Список литературы

- [1] Lorke A., Luyken R.J., Govorov A.O. et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. N 10. P. 2223–2226.
- [2] Баграев Н.Т., Буравлев А.Д., Иванов В.К. и др. // ФТП. 2000. Т. 34. Вып. 7. С. 846–856.
- [3] Epshtein E.M., Shmelev G.M. and Maglevanny I.I. // J. Phys. A. 2000. Vol. 33. P. 6017–6022.
- [4] Epshtein E.M., Shmelev G.M. // Physica Scripta. 2000. Vol. 62. P. 216–218.
- [5] Шмелев Г.М., Эпштейн Э.М., Сыродоев Г.А. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 125–126.
- [6] Epshtein E.M., Maglevanny I.I., Shmelev G.M. // Phys. Low-Dim. Struct. 2000. Vol. 3/4. P. 109–116.
- [7] Epshtein E.M., Shmelev G.M., Maglevanny I.I. // Phys. Low-Dim. Struct. 2001. Vol. 1/2. P. 137–144.
- [8] Шмелев Г.М., Эпштейн Э.М. // ФТТ. 2001. Т. 43. Вып. 12. С. 2213–2214.
- [9] Epshtein E.M., Shmelev G.M. // arXiv: cond-mat/0312025.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
- [11] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.