

01;09

Коллективный эффект Черенкова и аномальный эффект Доплера в ограниченной области пространства

© И.Н. Карташов,¹ М.В. Кузелев,¹ А.А. Рухадзе,² Н. Сепехри Джаван³¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия² Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия³ Zanjan University, Iran

e-mail: kartashov@ph-elec.phys.msu.su

(Поступило в Редакцию 1 июня 2004 г.)

В линейном приближении рассмотрена задача развития неустойчивости, основанной на коллективном эффекте Черенкова или аномальном эффекте Доплера в ограниченной области пространства. Получены пороговые условия возникновения и инкременты развития конвективной и абсолютной неустойчивостей для различных продольных мод колебаний с учетом отражений от границ системы. Промоделирована динамика развития начального возмущения при абсолютной неустойчивости.

1. Основные уравнения и постановка задачи

Коллективный эффект Черенкова является одним из фундаментальных механизмов вынужденного излучения электронных пучков в средах с замедленными волнами. Физическая природа эффекта подробно рассмотрена в обзорах [1,2]. По классификации электродинамики плазмы и плазмоподобных сред коллективный эффект Черенкова относится к взаимодействиям волна–волна [3]. Причем энергия одной из взаимодействующих волн при коллективном эффекте отрицательна. В работе [4] указано на аналогию вынужденного излучения пучка при отрицательной энергии одной из волн с еще одним фундаментальным механизмом излучения — аномальным эффектом Доплера. В литературе по физике плазмы коллективный эффект Черенкова часто рассматривают как одну из многочисленных пучковых неустойчивостей [5,6], что, конечно, верно, хотя при таком подходе фундаментальное значение коллективного эффекта оказывается несколько вне поля зрения. Все же применение методов и терминологии общей теории неустойчивостей, развитой в физике плазмы и родственных ей областях [7–9], при рассмотрении коллективного эффекта Черенкова весьма плодотворно, что мы и попытаемся показать в данной работе.

Исходим из следующих уравнений, описывающих в линейном приближении взаимодействие прямолинейного электронного пучка с некоторой электродинамической системой волноводного типа [10],

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + G_b(\hat{\omega}, \hat{k}) \omega_b^2 \right) A_b = -\omega_b^2 S_b(\hat{\omega}, \hat{k}) A_w,$$

$$D_w(\hat{\omega}, \hat{k}) A_w = -\omega_w^2 S_w(\hat{\omega}, \hat{k}) A_b. \quad (1)$$

Здесь $A_b(t, z)$ — функция, характеризующая состояние электронного пучка; $A_w(t, z)$ — характеризует состояние

электродинамической системы; $D_w(\hat{\omega}, \hat{k})$ — дифференциальный оператор, описывающий динамику электродинамической системы; G_b , S_b и S_w — некоторые безразмерные операторы; ω_w — величина размерности частоты; ω_b — ленгмюровская частота электронов пучка; $\hat{\omega}$ и \hat{k} — операторы частоты и продольного волнового числа

$$\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{k} = -i \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

При написании (1) предполагалось, что электронный пучок движется со скоростью U вдоль электродинамической системы, ориентированной по оси OZ . Например, если безграничный пучок движется в безграничной электронной плазме, то [5] $G_b = S_b = S_w = 1$, $\omega_w = \omega_p$, $D_w(\hat{\omega}, \hat{k}) = -\hat{\omega} + \omega_p^2 + 3\hat{k}^2 V_{Te}^2$, ω_p — ленгмюровская частота электронов плазмы, V_{Te} — их тепловая скорость.

Резонанное взаимодействие электронного пучка с электродинамической системой возможно только при наличии решения у следующей системы:

$$(\omega - kU)^2 - G_b(\omega, k) \omega_b^2 = 0,$$

$$D_w(\omega, k) = 0, \quad (3)$$

где ω и k — частота и волновое число.

Предположим, что система уравнений (3), определяющая на плоскости k, ω резонансную точку, имеет решение $k = k_0$, $\omega = \omega_0$. Интересуясь только резонансным взаимодействием электронного пучка и электродинамической системы, представим решение уравнений (1) в виде

$$A_b(t, z) = \tilde{A}_b(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z),$$

$$A_w(t, z) = \tilde{A}_w(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{A}_w(t, z)$ — амплитуда собственной волны электродинамической системы. Считаем, что выполнены нера-

венства

$$\left| \frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial t} \right| \ll |\omega_0 \tilde{A}_w|, \quad \left| \frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} \right| \ll |k_0 \tilde{A}_w|, \quad (5)$$

означающие медленность амплитуды $\tilde{A}_w(t, z)$. Что касается амплитуды пучковой волны $\tilde{A}_b(t, z)$, то каких-либо предположений о ее медленности пока не делается. Подставляя функции (4) в уравнения (1), учитывая, что в резонансной точке $(\omega_0 - k_0 U)^2 - G_b(\omega_0, k_0) \omega_b^2 = 0$ и $D_w(\omega_0, k_0) = 0$, и используя неравенства (5), получим следующую систему уравнений для амплитуд $\tilde{A}_b(t, z)$ и $\tilde{A}_w(t, z)$ (знак \sim для краткости в дальнейшем опускаем):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 A_b \mp 2i \sqrt{G_b(\omega_0, k_0)} \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) A_b \\ = -\omega_b^2 S_b(\omega_0, k_0) A_w, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) A_w = -i \omega_w^2 S_w(\omega_0, k_0) \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} A_b. \quad (6)$$

Здесь V_g — групповая скорость волны в электродинамической системе невозмущенной электронным пучком. Уравнения (6), являясь довольно общими, описывают два предельных режима вынужденного излучения электронным пучком собственных волн электродинамической системы: режим коллективного эффекта Черенкова и режим одночастичного эффекта [1,2] (а также и режим, переходный между названными эффектами). В режиме коллективного эффекта, который нас здесь только и интересует, выполнено неравенство

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) A_b \right| \ll \left| \sqrt{G_b} \omega_b A_b \right| \quad (7)$$

и уравнения (6) записываются в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) A_b = \mp \frac{1}{2} i \omega_b \frac{S_b(\omega_0, k_0)}{\sqrt{G_b(\omega_0, k_0)}} A_w, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) A_w = -i \omega_w^2 S_w(\omega_0, k_0) \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} A_b. \end{aligned} \quad (8)$$

Верхний знак здесь берется при резонансе электродинамической волны с быстрой волной пучка, а нижний — в случае резонанса между электродинамической и медленной пучковой волнами. Коллективный эффект Черенкова есть резонансное взаимодействие электродинамической волны именно с медленной волной пучка, энергия которой отрицательна. Поэтому, выбирая в (8) нижний знак (плюс) и переопределяя амплитуду A_b , запишем уравнения (8) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) A_b = i a^2 A_w, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) A_w = -i A_b, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$a^2 = \frac{1}{2} \omega_b \omega_w^2 \frac{S_b(\omega_0, k_0) S_w(\omega_0, k_0)}{\sqrt{G_b(\omega_0, k_0)}} \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} > 0 \quad (10)$$

— параметр, содержащий всю информацию о конкретной физической природе рассматриваемой системы (вывод уравнений (9) для различных вакуумных и плазменных систем см. в [6]).

В дальнейшем коллективный эффект Черенкова рассматривается в ограниченной области пространства $0 < z < L$. Поэтому необходим учет отражения излучаемой пучком электромагнитной волны от границ $z = 0$ и $z = L$. Обозначим через B_w амплитуду электромагнитной волны, распространяющейся навстречу излучаемой волне с амплитудой A_w . Считая, что волна B_w с электронным пучком не взаимодействует, запишем следующее очевидное уравнение для ее амплитуды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) B_w = 0. \quad (11)$$

Уравнения (9), (11) должны быть дополнены условиями на амплитуды волн на границах $z = 0$ и $z = L$. Эти условия существенно зависят от знака групповой скорости V_g . Если $V_g > 0$, то говорят о взаимодействии пучка с попутной волной электродинамической системы, случай $V_g < 0$ относится к взаимодействию со встречной волной. При $V_g > 0$ уравнения (9), (11) дополняются следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} A_b(t, 0) = 0, \quad A_w(t, 0) = \kappa_1 B_w(t, 0), \\ B_w(t, L) = \kappa_2 A_w(t, L). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь κ_1 — коэффициент отражения электромагнитной волны от границы $z = 0$, κ_2 — коэффициент отражения от границы $z = L$. Первое условие в (12) означает, что на границу $z = 0$ электронный пучок приходит без возмущений (считаем, что скорость пучка $U > 0$, т.е. пучок распространяется в положительном направлении оси Z).

При $V_g < 0$ граничные условия имеют иной вид

$$\begin{aligned} A_b(t, 0) = 0, \quad B_w(t, 0) = \kappa_1 A_w(t, 0), \\ A_w(t, L) = \kappa_2 B_w(t, L). \end{aligned} \quad (13)$$

Решению граничных задач (9), (11), (12) и (9), (11), (13) посвящено дальнейшее рассмотрение. В работе [11] получено решение граничных задач для уравнений (9) в несколько иной постановке и без учета волны, описываемой уравнением (11).

2. Коллективный эффект Черенкова на попутной волне ($V_g > 0$)

Рассмотрение начнем со случая $V_g > 0$, когда излучаемая волна распространяется в ту же сторону,

что и пучок, — возбуждение попутной волны в ограниченной области пространства. Представляя решения уравнений (9), (11) в экспоненциальной форме $\sim \exp(-i\omega t + ikz)$, получим следующие дисперсионные уравнения:

$$\begin{aligned} D_1(\omega, k) &\equiv (\omega - kU)(\omega - kV_g) + a^2 = 0, \\ D_2(\omega, k) &\equiv (\omega + kV_g) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что входящие в уравнения (14) ω и k не являются „истинными“ частотой и волновым числом: в соответствии с формулами (4) они определяют отклонения от резонансных значений ω_0 и k_0 .

Используя (14), запишем общее решение уравнений (9), (11) в виде (без общего множителя $\exp(-i\omega t)$)

$$\begin{aligned} A_w(z) &= A \exp(ik_1(\omega)z) + B \exp(ik_2(\omega)z), \\ A_b(z) &= -\frac{a^2}{(\omega - k_1U)} A \exp(ik_1(\omega)z) \\ &\quad - \frac{a^2}{(\omega - k_2U)} B \exp(ik_2(\omega)z), \\ B_w(z) &= C \exp(ik_3(\omega)z), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{1}{2} \omega \left(\frac{1}{V_g} + \frac{1}{U} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \omega^2 \left(\frac{1}{V_g} - \frac{1}{U} \right)^2 - \frac{a^2}{V_g U}}, \\ k_3 &= -\frac{\omega}{V_g} \end{aligned} \quad (16)$$

— решения дисперсионных уравнений (14) относительно волновых чисел k .

Попутно установим условие, при котором излучение пучка можно действительно считать коллективным эффектом Черенкова. Для этого подставим решение (15) в неравенство (7) и получим следующее искомое условие:

$$a \ll \sqrt{G_b \frac{V_g}{U}} \omega_b. \quad (17)$$

означающее, что плотность электронного пучка должна быть достаточно велика ($a \sim \sqrt{\omega_b}$).¹

Подставляя решения (15) в граничные условия (12) и исключая произвольные постоянные A , B и C , получим следующее характеристическое уравнение для определения частоты ω :

$$\begin{aligned} \exp(ik_3L) &= \kappa_1 \kappa_2 \left[\frac{\omega_0 - k_1U}{(k_2 - k_1)U} \exp(ik_1L) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega - k_2U}{(k_1 - k_2)U} \exp(ik_2L) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку в общем случае уравнение (18) решается только численно, рассмотрим два предельных случая. При $a = 0$, т.е. когда электронного пучка нет, уравнение (18) сводится к следующему:

$$\kappa_1 \kappa_2 \exp\left(2i \frac{\omega}{V_g} L\right) = 1. \quad (19)$$

Обозначая $\kappa_1 \kappa_2 = |\kappa_1 \kappa_2| \exp(-i\phi)$, из (19) имеем

$$\omega = -i \frac{V_g}{2L} \ln \frac{1}{|\kappa_1 \kappa_2|} + \phi \frac{V_g}{2L}. \quad (20)$$

Мнимая часть (20) является обычным декрементом затухания электромагнитных колебаний, „вытекающих“ из области $0 < z < L$ через полупрозрачные ($|\kappa_1 \kappa_2| < 1$) границы $z = 0$ и $z = L$.

Пусть теперь выполнено неравенство

$$|\omega|^2 \frac{(U - V_g)^2}{UV_g} \ll a^2. \quad (21)$$

Тогда, разлагая функции $k_{1,2}(\omega)$ в окрестности нуля и подставляя их в уравнение (18), имеем

$$\omega = \left(\frac{L}{V_g} + \frac{L}{W_g} \right)^{-1} \left[i \ln \left(|\kappa_1 \kappa_2| \operatorname{ch} \left(\frac{a}{\sqrt{UV_g}} L \right) \right) + \phi \right]. \quad (22)$$

Здесь

$$W_g = \left(\frac{\partial k_{1,2}}{\partial \omega} (0) \right)^{-1} = \frac{2UV_g}{U + V_g} \quad (23)$$

— так называемая групповая скорость волн при усилении [7–9]. При выполнении неравенства

$$|\kappa_1 \kappa_2| \operatorname{ch} \left(\frac{a}{\sqrt{UV_g}} L \right) > 1 \quad (24)$$

мнимая часть частоты (22) положительна, что означает неустойчивость системы. Известно, что коллективный эффект Черенкова на попутной волне является конвективной неустойчивостью, при которой любые финитные возмущения сносятся по движению пучка и в каждой фиксированной точке пространства при $t \rightarrow \infty$ из-за сноса затухают [7–9]. Наличие границ препятствует сносу возмущений и при выполнении порогового условия (24) приводит к их нарастанию в любой точке z на отрезке $[0, L]$.

Следует отметить, что коллективный эффект Черенкова, так же как и ряд других пучковых неустойчивостей, представляет значительный интерес для многих разделов физики, в том числе и СВЧ электроники. Так, коллективный эффект Черенкова² на попутной волне при определенных условиях лежит в основе работы усилителей (ламп) бегущей волны (ЛБВ) [12,13]. Неравенство (24) есть условие самовозбуждения усилителя, т.е. перехода в режим генерации. Плазменные генераторы бегущей волны на коллективном вынужденном эффекте Черенкова рассмотрены в работах [10,14,15].

¹ Неравенства (5) сводятся к более слабому, чем (17), условию $a \ll \sqrt{V_g/U} \omega_0$ (обычно $\omega_b \ll \omega_0$).

² В вакуумной СВЧ электронике в этом случае говорят о большом высокочастотном пространственном заряде пучка.

3. Коллективный эффект Черенкова на встречной волне ($V_g < 0$)

Перейдем теперь к случаю $V_g < 0$, когда излучаемая волна распространяется в сторону, противоположную направлению движения пучка, — возбуждение встречной волны в ограниченной области пространства. Формулы (14)–(16) справедливы и в этом случае, но с заменой V_g на $-V_g$. Рассмотрение начнем с простого частного случая — граница $z = L$ абсолютно прозрачна для электромагнитного излучения. Подставляя решение (15) в граничные условия (13) при $\kappa_2 = 0$, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\exp(i(k_1 - k_2)L) = \frac{\omega - k_2 U}{\omega - k_1 U}. \quad (25)$$

Уравнение (25) целесообразно проанализировать отдельно для самого простого случая равных скоростей $|V_g| = U$. При этом (25) сводится к виду

$$\exp(2ik_0 L) = \frac{\omega + k_0 U}{\omega - k_0 U}, \quad k_0 = \frac{1}{U} \sqrt{\omega^2 + a^2}. \quad (26)$$

Легко показать, что уравнение (26) имеет нулевые решения $\omega = 0$ при

$$2a \frac{L}{U} = \pi(2n + 1); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Несложно также показать, что других действительных решений, кроме $\omega = 0$, у уравнения (26) нет. Найдем частоту при условии, что равенство (27) при $n = 0$ слегка нарушено. Полагая

$$\frac{a}{U} = \frac{\pi}{2L} + \delta, \quad |\delta| \ll 1/L, \quad (28)$$

для частоты имеем

$$\omega \approx i \frac{2}{\pi} a (\sqrt{1 + \pi L \delta} - 1). \quad (29)$$

Частота (29) чисто мнимая, причем $\text{Im } \omega > 0$ только при $\delta > 0$. Отсюда и из (28) следует пороговое условие возникновения неустойчивости, обусловленной коллективным эффектом Черенкова на встречной волне в системе конечной длины

$$a > \frac{\pi U}{2L}. \quad (30)$$

При $\pi L \delta \ll 1$ выражение (29) можно представить в виде

$$\omega = iaL\delta = ia \frac{L}{U} \left(a - \frac{\pi U}{2L} \right). \quad (31)$$

В общем случае даже простейшее уравнение (26) решается только численно. Введем безразмерные частоту x и параметр плотности пучка σ

$$x = \frac{\omega}{a}, \quad \sigma = 2a \frac{L}{U}. \quad (32)$$

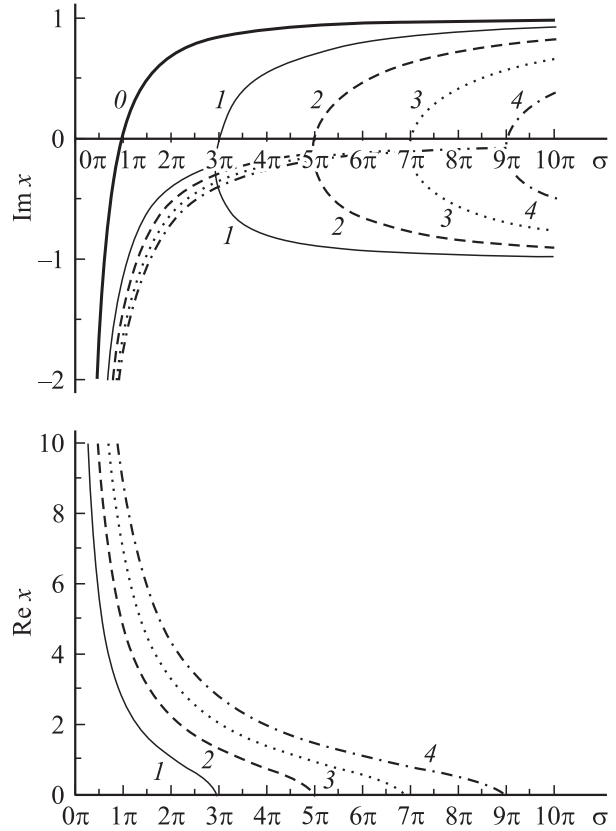


Рис. 1. Зависимость безразмерной частоты x от параметра плотности пучка σ в отсутствие отражений, $\kappa = 0$.

В новых переменных уравнение (26) запишется в виде

$$\exp(i\sigma \sqrt{1 + x^2}) = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{x - \sqrt{1 + x^2}}. \quad (33)$$

На рис. 1 представлены зависимости безразмерной частоты x от параметра плотности пучка σ . Имеется бесконечное множество продольных мод колебаний. Пороги развития неустойчивости для каждой из мод, как уже указывалось выше, $\sigma = \pi(2n + 1)$. Частота моды $n = 0$ является чисто мнимой, при изменении σ от 0 до бесконечности мнимая частота $\text{Im } x$ этой моды изменится от $-\infty$ до 1. Остальные моды $n = 1, 2, 3, \dots$ на начальном участке изменения σ также имеют растущую $\text{Im } x$, а кроме того, не равную нулю действительную часть частоты $\text{Re } x$ (точнее, имеется два решения с одинаковой $\text{Im } x$ и противоположными $\text{Re } x$; на рис. 1 показаны только $\text{Re } x \geq 0$). У порога неустойчивости каждой из мод $n = 1, 2, 3, \dots$ $\text{Re } x$ обращается в нуль, а при дальнейшем увеличении σ оба решения имеют уже $\text{Re } x = 0$ и различные значения $\text{Im } x$ — растущее к 1 и убывающее к -1 .

В переменных (32) решение (29) дается формулой

$$x = i \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{\pi}{2}(\sigma - \pi)} - 1 \right). \quad (34)$$

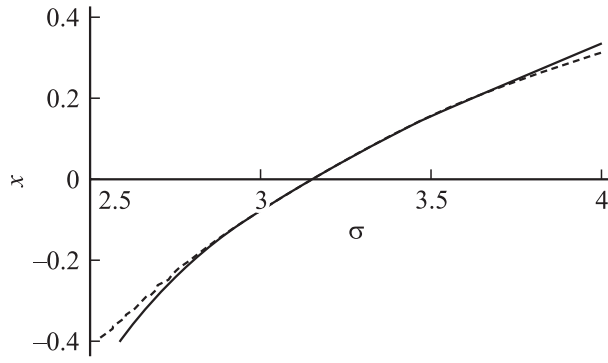


Рис. 2. Зависимость безразмерного инкремента $\text{Im } x$ от параметра плотности пучка σ вблизи порога развития неустойчивости. Сплошная линия — аналитическое решение (34), пунктир — численное решение уравнения (33).

На рис. 2 представлен результат сравнения (около порога неустойчивости) аналитического решения ((34) — сплошная линия, с численным решением уравнения (33) — пунктир). Наблюдается хорошее совпадение результатов.

Обсудим физический смысл порогового уравнения (30). Напомним, что коллективный эффект Черенкова на встречной волне является абсолютной неустойчивостью, при которой возмущения неограниченно нарастают в любой точке пространства [7–9]. При $V_g < 0$ и $|V_g| = U$ собственные частоты, определяемые из первого дисперсионного уравнения (14), даются формулами

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 U^2 - a^2}. \quad (35)$$

Следовательно, неустойчивость имеется только в следующей области волновых чисел:

$$|k| < \frac{a}{U}. \quad (36)$$

В системе протяженностью L длина волны возмущений не может превосходить значения $\lambda_{\max} = 4L$, а значит, минимальное волновое число дается соотношением

$$k_{\min} = \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} = \frac{\pi}{2L}. \quad (37)$$

Из (36) и (37) следует, что неустойчивость в конечной системе возможна при условии

$$k_{\min} = \frac{\pi}{2L} < \frac{a}{U}, \quad (38)$$

что совпадает со стартовым условием (30). Таким образом, порог (30) обусловлен невозможностью развития абсолютной неустойчивости в конечной системе при ее малой длине. Затухание же волн в такой системе (мнимая часть частоты, как видно из (29) и рис. 1, может быть отрицательной) связано, конечно, с вытеканием излучения через границы $z = 0$, $z = L$.

Перейдем к рассмотрению более общего случая $|V_g| \neq U$, но по-прежнему при $\kappa_2 = 0$. Вводя обозначения

$$\xi = \frac{U}{|V_g|}, \quad \chi_0 = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{1}{4} \omega^2 (1 + \xi)^2 + \xi a^2}, \quad (39)$$

представим уравнение (25) в виде

$$\exp(2i\chi_0 L) = \frac{\omega(1 + \xi)/2 + \chi_0 U}{\omega(1 + \xi)/2 - \chi_0 U}. \quad (40)$$

Как и (26), уравнение (40) имеет решения $\omega = 0$, если $2\chi_0 L = \pi(2n + 1)$ (см. (27)). Отсюда следует пороговое условие возникновения неустойчивости на продольной моде $n = 0$, обобщающее условие (30),

$$a > \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{|V_g|U}}{L}. \quad (41)$$

Выражение для частоты вблизи порога на моде $n = 0$ дается формулой (см. (31))

$$\omega = ia \frac{2L}{(|V_g| + U)} \sqrt{\frac{U}{|V_g|}} \left(a - \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{|V_g|U}}{L} \right). \quad (42)$$

Вводя аналоги величин (32)

$$x = \frac{\omega}{a}, \quad \sigma = 2a \frac{L}{\sqrt{|V_g|U}}, \quad \mu = \frac{1 + \xi}{2\sqrt{\xi}}, \quad (43)$$

преобразуем уравнение (40) к следующему:

$$\exp(i\sigma \sqrt{1 + \mu^2 x^2}) = \frac{\mu x + \sqrt{1 + \mu^2 x^2}}{\mu x - \sqrt{1 + \mu^2 x^2}}. \quad (44)$$

Заменой $\mu x \rightarrow x$ уравнение (44) сводится к (33), поэтому ничего нового в сравнении с приведенным на рис. 1 численные решения уравнения (44) не содержат.

Учтем теперь отражение от продольных границ системы. Подставляя решение (15) в общие граничные условия (13) при $\kappa_{1,2} \neq 0$, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\exp(i(k_1 - k_2)L) = \frac{\omega - k_2 U}{\omega - k_1 U} + \kappa_1 \kappa_2 \frac{(k_2 - k_1)U}{(\omega - k_1 U)} \exp(i(k_3 - k_2)L). \quad (45)$$

Заметим, что при нулевой плотности пучка ($a = 0$) из уравнения (45), как это и должно быть, следует решение (20). Как и при нулевом отражении, случай различных скоростей волн сводится к случаю $|V_g| = U$, рассмотрением которого мы здесь и ограничимся. Кроме того, считаем для простоты, что $\kappa_1 \kappa_2 = \kappa > 0$, где κ — положительная вещественная постоянная.³ Используя

³ Аргумент величины $\kappa_1 \kappa_2$ определяет изменения фаз волн при отражениях и дает несущественную поправку к действительной части частоты, не влияя на ее мнимую часть.

величины (32), преобразуем уравнение (45) к виду, удобному для дальнейшего анализа,

$$\exp(i\sigma\sqrt{1+x^2}) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} - \kappa \frac{2\sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \exp\left(i\frac{\sigma}{2}\sqrt{1+x^2}\right) \exp\left(i\frac{\sigma}{2}x\right). \quad (46)$$

Сначала определим пороги развития неустойчивости. Для этого, полагая в уравнении (46) $x = 0$, сведем его к виду

$$\exp(i\sigma) = -1 + 2\kappa \exp(i\sigma/2). \quad (47)$$

Последнее уравнение, поскольку $\kappa^2 \leq 1$, преобразуется к следующему:

$$\cos(\sigma/2) = \kappa. \quad (48)$$

Если расположить корни уравнения (48) относительно σ в порядке возрастания, то получатся пороговые условия развития неустойчивости на продольных модах $n = 0, 1$ и т.д. соответственно. Для моды $n = 0$ пороговое условие записывается в виде

$$a > \frac{U}{L} \arccos(\kappa). \quad (49)$$

При $\kappa = 0$ неравенство (49) переходит в (30). Вблизи порога (49), учитывая неравенства $x \ll 1$ и $(\sigma - 2\arccos \kappa) \ll 1$, из уравнения (46) для безразмерной частоты получаем

$$x \approx i \frac{\sigma/2 - \arccos \kappa}{1 + \frac{\kappa \arccos \kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}}. \quad (50)$$

На рис. 3 и 4 представлены зависимости безразмерной частоты x от параметра плотности пучка σ при $\kappa = 0.5$ и 1 соответственно. Как видно из рисунка, происходит перезамыкание мнимых частей верхних ветвей мод $n = 1$ и 2, $n = 3$ и 4 и т.д. Нижние ветви указанных мод имеют одинаковые $\text{Im } x$ и противоположные $\text{Re } x$. При увеличении κ до единицы значения σ , соответствующие порогу $x = 0$, стремятся к $0, 4\pi, 8\pi$ и т.д. (рис. 4).

Определенный интерес представляет динамика формирования (установления) продольной моды при коллективном эффекте Черенкова на встречной длине. Пусть в начальный момент времени $\tau = \omega_0 t = 0$ на фоне невозмущенного электронного пучка задается уединенный импульс электромагнитного поля

$$A_w(\xi, 0) = \begin{cases} A_0 \sin^2\left(\frac{\xi}{2n_\lambda}\right), & \xi = k_0 z \in [0, 2\pi n_\lambda], \\ 0, & \xi \notin [0, 2\pi n_\lambda], \end{cases} \quad (51)$$

где $n_\lambda = 6$ — безразмерный пространственный размер импульса (в длинах волн), $A_0 = 1^{-4}$ — его амплитуда.

Зададим параметр плотности пучка (отнесенный к ω_0) $a = 0.01$, скорости (отнесенные к ω_0/k_0) $U = |V_g| = 1$,

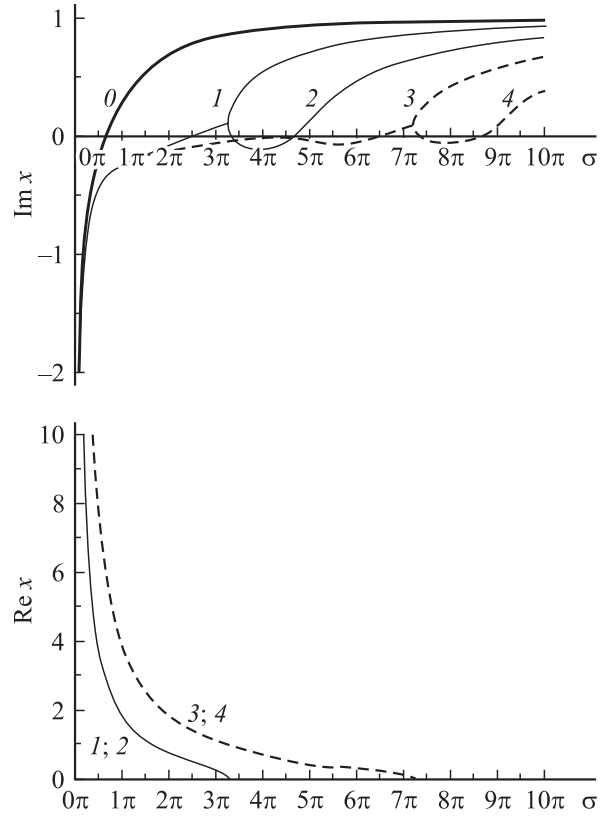


Рис. 3. Зависимость безразмерной частоты x от параметра плотности пучка σ при $\kappa = 0.5$.

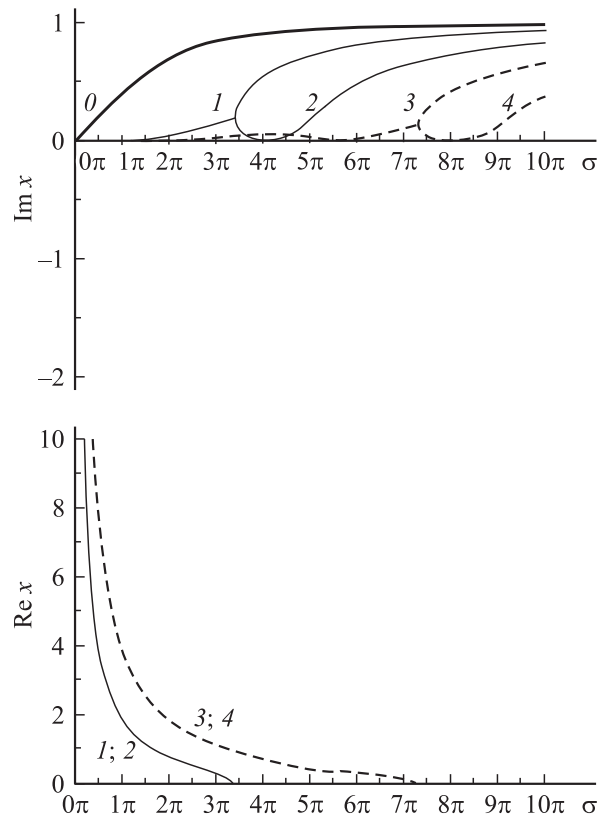


Рис. 4. Зависимость безразмерной частоты x от параметра плотности пучка σ при $\kappa = 1$.

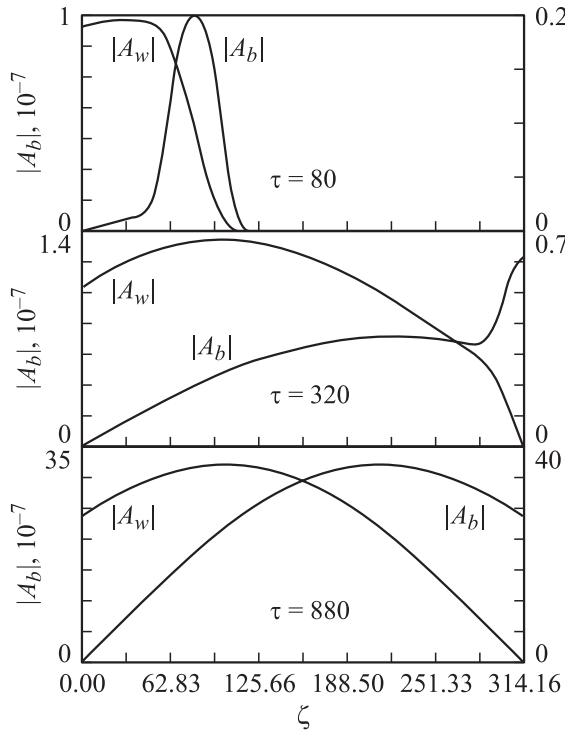


Рис. 5. Динамика установления колебаний при абсолютной неустойчивости в отсутствие отражений для $a = 0.01$, $U = |V_g| = 1$.

общий коэффициент отражения $\kappa = 0$ и длину системы в 50 длин волн. Этим значениям соответствует $\sigma = 2\pi$, и, таким образом, неустойчивой является только продольная мода с $n = 0$ (согласно рис. 1, $\text{Im } x \approx 0.7$). Динамика импульса при заданных параметрах представлена на рис. 5. Импульс электродинамической волны A_w распространяется в отрицательном направлении оси Oz . Влетающий через сечение $z = 0$ электронный пучок модулируется и, распространяясь в положительном направлении оси Oz , возбуждает волну A_w . В результате развития абсолютной неустойчивости на нулевой продольной моде и перемещения волнового пакета с выносом излучения через неотражающие границы системы устанавливается следующая стационарная форма колебаний (сами же значения амплитуд экспоненциально нарастают $\sim \exp(\text{Re } x \tau) \approx \exp(0.007\tau)$): модуляция пучка A_b с увеличением z растет, достигая максимума в некоторой внутренней точке системы, а затем убывает к правой границе; амплитуда электромагнитной волны при $z = L$ ввиду отсутствия отражения имеет нулевую амплитуду и увеличивается в глубь системы, достигая максимума в промежуточной точке, а затем уменьшается к границе $z = 0$. Немонотонное поведение A_w и A_b связано с тем, что наиболее сильное взаимодействие электромагнитной волны с пучком имеет место в глубине системы (на левой границе $A_b = 0$, на правой $A_w = 0$). К моменту $\tau \sim 800-900$, а это всего несколько обратных инкрементов, распределение амплитуд совершенно „не помнит“

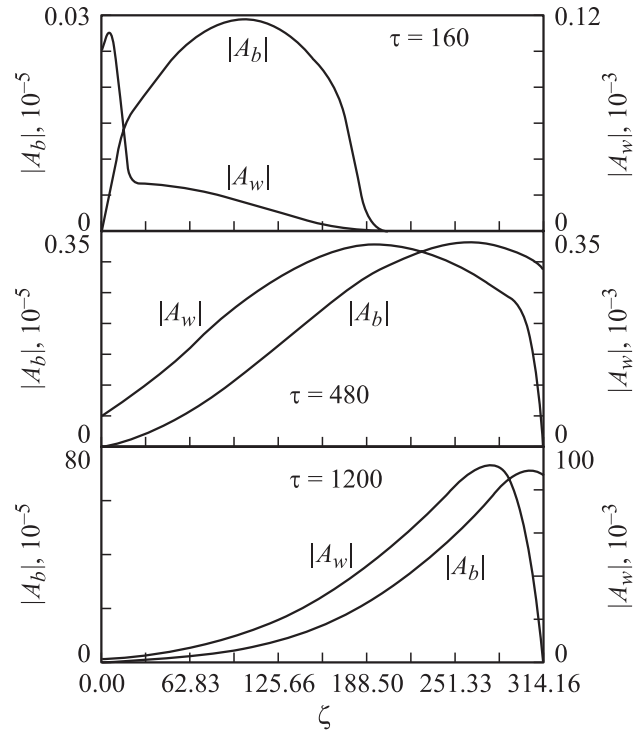


Рис. 6. Динамика установления колебаний при абсолютной неустойчивости в отсутствие отражений для $a = 0.01$, $U = 1$, $|V_g| = 0.1$.

структуру начального возмущения (51). Аналогичная картина наблюдается и в случае малой групповой скорости электромагнитной волны $|V_g| = 0.1$ (рис. 6). Ввиду малой скорости сноса электромагнитных возмущений максимум амплитуды A_w „прижат“ к правой границе системы.

На рис. 7 представлена динамика развития импульса (51) при абсолютной неустойчивости для тех же параметров, что и на рис. 5, но с коэффициентами отражения $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0.5$, т.е. $\kappa = 0.5$. Начальный импульс A_w , распространяясь в отрицательном направлении, полностью отражается от границы $z = 0$ ($\tau = 80$). Отраженный импульс B_w без взаимодействия с пучком распространяется вправо до границы $z = L$ ($\tau = 320$), отражается от нее с коэффициентом отражения $\kappa_2 = 0.5$. Отраженный от $z = L$ импульс A_w распространяется влево к границе $z = 0$ и т.д. Одновременно за счет черенковского взаимодействия пучка с волной A_w амплитуды электромагнитной волны A_w и модуляции пучка A_b растут. К моменту времени $\tau = 1200$ (всего несколько безразмерных обратных инкрементов) устанавливается следующая картина: амплитуды колебаний экспоненциально растут, а пространственное распределение амплитуд с течением времени уже не меняется. Причем распределение амплитуд A_w и A_b аналогично представленному на рис. 5, 6, а амплитуда B_w с увеличением z экспоненциально убывает, что связано с запаздыванием переноса возмущений.

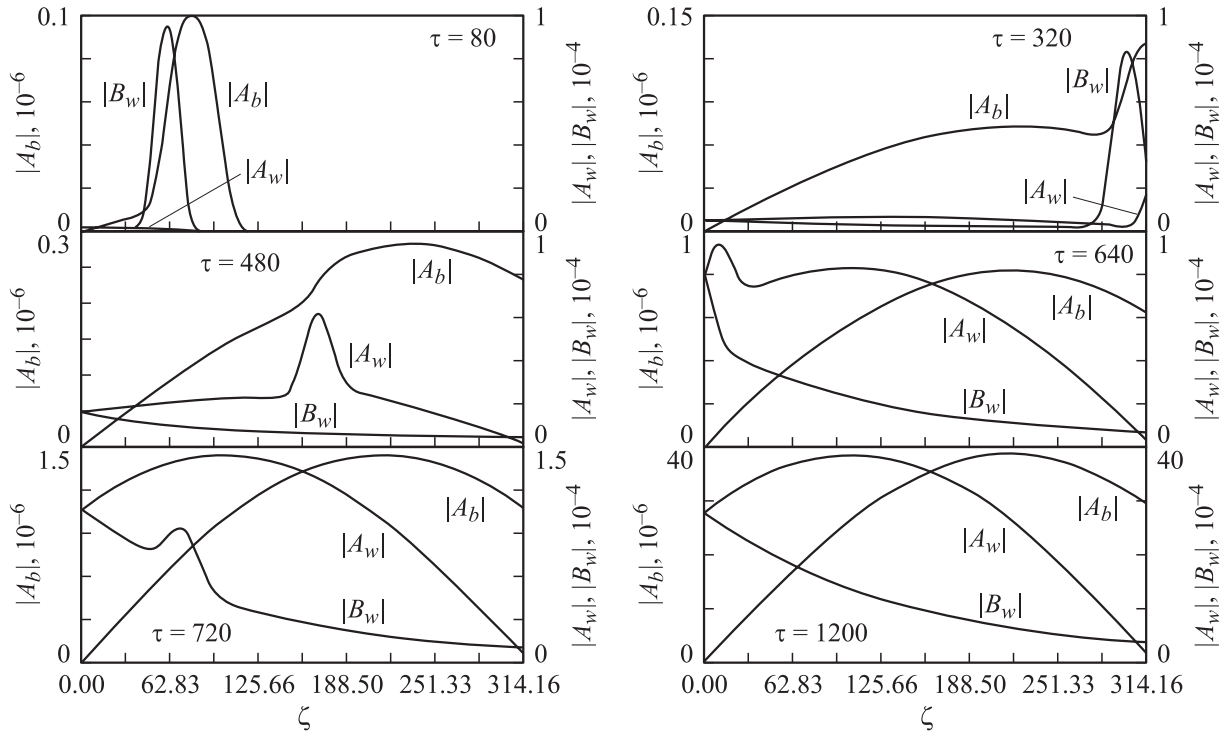


Рис. 7. Динамика установления колебаний при абсолютной неустойчивости для $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0.5$, $a = 0.01$, $U = |V_g| = 1$.

Заметим, что коллективный эффект Черенкова на встречной волне при определенных условиях лежит в основе работы генераторов (ламп) обратной волны (ЛОВ) [12,13]. В обычных ЛОВ реализуются случаи малого или умеренного высокочастотного пространственного заряда пучка [16], что по используемой здесь терминологии соответствует одночастичному эффекту Черенкова. В настоящей работе рассмотрен противоположный предел. Методы вакуумной СВЧ электроники, применяемые при изучении генераторов обратных волн, отличаются от используемых нами, поэтому результаты настоящей работы дают дополнительную существенную информацию по физике абсолютных неустойчивостей в ограниченной области пространства. Плазменные генераторы обратной волны на коллективном вынужденном эффекте Черенкова могут быть реализованы на базе плазменно-пучковых волноводов в конечном внешнем магнитном поле, рассмотренных в работах [17,18].

4. Аномальный эффект Доплера в ограниченной области пространства

Пусть моноэнергетический электронный пучок, движущийся вдоль оси OZ , пронизывает диэлектрический слой $0 < z < L$, ориентированный перпендикулярно направлению распространения пучка. Пусть также имеется внешнее магнитное поле B , направленное по движению пучка. Предполагая, что характеризующие систе-

му величины не зависят от поперечных координат x и y , запишем следующую систему линейного приближения для поперечных компонент скорости электронов $V_{\perp} = V_x + iV_y$ и поперечных компонент векторного потенциала электромагнитного поля $A_{\perp} = A_x + iA_y$:

$$\frac{\partial V_{\perp}}{\partial t} + U \frac{\partial V_{\perp}}{\partial z} + i\omega_B V_{\perp} = -\frac{e}{mc} \left(\frac{\partial A_{\perp}}{\partial t} + U \frac{\partial A_{\perp}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial z^2} = \frac{mc}{e} \frac{\omega_b^2}{\varepsilon} V_{\perp}. \quad (52)$$

Здесь $\omega_B = eB/mc$ — электронная циклотронная частота, $c_0 = c/\sqrt{\varepsilon}$, ε — диэлектрическая проницаемость. Поясним, что уравнения (52) описывают возмущения с циркулярной поляризацией; для определенности считаем, что $\omega_B > 0$.

Исследуем взаимодействия электромагнитной и электронной циклотронной волн. Резонансное их взаимодействие осуществляется при $\omega = \omega_0$ и $k = k_0$, определяемых из системы

$$\omega = kU - \omega_B, \quad \omega = \pm kc_0. \quad (53)$$

Из (53) имеем

$$\omega_0 = \omega_B \frac{c_0}{U - c_0} \quad \text{и} \quad \omega_0 = -\omega_B \frac{c_0}{U + c_0}. \quad (54)$$

Два знака в (53), а также две частоты (54) означают, что электронный пучок может взаимодействовать как с попутной электромагнитной волной, так и с волной, которая распространяется ему навстречу.

Представляя решение системы уравнений (52) в виде, аналогичном (4), получим из (52) следующие уравнения для медленных амплитуд (сохраняем те же обозначения, что и в (52))

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z}\right) V_{\perp} &= ia^2 A_{\perp}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z}\right) A_{\perp} &= -iV_{\perp}. \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь

$$V_g = \frac{k_0 c_0^2}{\omega_0} = \pm c_0, \quad a^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_b^2}{\varepsilon} \frac{\omega_B}{\omega_0}. \quad (56)$$

Уравнения (55) имеют тот же вид, что и рассмотренные выше уравнения (9), но только при условии, что параметр a^2 из (56) положительный (см. (10)). Поэтому исследуем знак этого параметра. При $c_0 > U$ обе частоты (54) отрицательны, тогда $a^2 < 0$. При этом уравнения (55) имеют только устойчивые решения. Результат понятен, поскольку при „досветовом“ движении излучение обусловлено нормальным эффектом Доплера [1,2]. Энергетическим источником излучения при нормальном эффекте является запас энергии поперечного движения электрона, в рассматриваемом случае это $m|V_{\perp}|^2/2$. Значит, при нормальном эффекте Доплера амплитуда $|A_{\perp}|$ растет, только когда амплитуда $|V_{\perp}|$ уменьшается. Если $V_{\perp}(t, 0) = 0$, то излучения не будет вообще.

При $c_0 < U$ первая часть в (54) положительна. При этом $a^2 > 0$ и уравнения (55) имеют нарастающие решения: инкремент нарастания есть $\omega = ia$. Это и есть излучение „сверхсветового“ пучка при аномальном эффекте Доплера [1,2,4]. Если рассматривается взаимодействие пучка и электромагнитной волны на первой частоте (54), то во втором уравнении (55) следует взять $V_g = c_0 > 0$. Следовательно, аномальный эффект Доплера в слое диэлектрика описывается в точности так же, как и коллективный эффект Черенкова на попутной волне, подробно рассмотренный в разделе 2 настоящей работы. В связи с этим какие-либо дополнительные разъяснения по поводу аномального эффекта Доплера мы здесь опускаем. Заметим только, что в специальных замедляющих системах — периодических структурах, плазменных волноводах в конечном внешнем магнитном поле аномальный эффект Доплера может развиваться и на встречной волне. Очевидно, что результаты раздела 3 настоящей работы переносятся и на этот случай практически без изменений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект Е02-3.2-447), Минпромнауки (проект „Ведущие научные школы“ № НШ-1962.2003.2), программы „Университеты России“ (проект № УР.01.03.073) и РФФИ (проект № 04-02-17240).

Список литературы

- [1] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Проблемы теоретической физики и астрофизики. К 70-летию В.Л. Гинзбурга. М.: Наука, 1989. С. 70–92.
- [2] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // УФН. 1987. Т. 152. С. 285.
- [3] Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
- [4] Незлин М.В. // УФН. 1976. Т. 120. С. 481.
- [5] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988. 424 с.
- [6] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
- [7] Электродинамика плазмы // Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 719 с.
- [8] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
- [9] Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
- [10] Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ электроника. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544 с.
- [11] Горбунов Л.М. // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 1386.
- [12] Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
- [13] Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. М.: Физматлит, 2003. Т. 1. 496 с.
- [14] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 3. С. 231–254.
- [15] Кузелев М.В., Лоза О.Т., Рухадзе А.А. и др. // Физика плазмы. 2001. Т. 27. № 8. С. 710–733.
- [16] Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 7. С. 1037–1052.
- [17] Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 6. С. 544.
- [18] Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 1. С. 60–65.