

01;03

## Нелинейные осцилляции незаряженной электропроводной капли в однородном внешнем электростатическом поле

© С.О. Ширяева, М.В. Волкова, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 16 июля 2004 г.)

Впервые аналитическими асимптотическими методами найдено решение задачи о нелинейных осцилляциях конечной амплитуды незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в однородном внешнем электростатическом поле в квадратичном приближении по амплитуде начальной деформации равновесной формы и по величине эксцентриситета равновесной сфероидальной деформации капли. Выяснилось, что по сравнению с нелинейными осцилляциями заряженной капли в отсутствие поля кривизна вершин незаряженных капель, нелинейно осциллирующих во внешнем электрическом поле, заметно больше, количество же резонансных ситуаций (в смысле возможности реализации внутреннего резонансного взаимодействия мод) существенно меньше.

**1.** Исследование нелинейных осцилляций заряженной капли, начатое два десятилетия назад и продолжающееся до настоящего времени [1–10], связанное с большим количеством академических, технических и технологических приложений, в которых приходится сталкиваться с заряженной каплей, позволило выявить много физически значимых особенностей реализации осцилляций и неустойчивости капель по отношению к собственному заряду. К сожалению, того же нельзя сказать об исследовании нелинейных осцилляций капли во внешнем электростатическом поле, физическом объекте, также встречающемся в значительном количестве приложений. Это связано с тем, что аналитическое асимптотическое исследование данного объекта существенно более громоздко ввиду наличия нескольких малых параметров. На сегодняшний день не выполнено ни одного нелинейного аналитического асимптотического исследования осцилляций и устойчивости незаряженной капли во внешних полях в квадратичном по амплитуде осцилляций приближении, не говоря уже о более высоких порядках приближений. Очевидно, что искажение равновесной сферической формы капли во внешних силовых полях (электрическое, акустическое, аэродинамическое или поле центробежных сил) должно привести и к изменению характеристик осцилляций, как это отмечено в [3]. Так, в электростатическом поле капля принимает форму, близкую к вытянутому сфероиду. К сожалению, все работы по расчету осцилляций сфероидальных незаряженных капель и заряженных капель в однородном внешнем электростатическом поле выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде осцилляций [11–16].

Отклонение равновесной поверхности сфероидальной капли от равновеликой по объему сферы может рассматриваться в качестве малой стационарной деформации сферической формы. В качестве безразмерного параметра, характеризующего такое отклонение, естественно принять эксцентриситет капли  $e$ . Отношение амплитуды капиллярных осцилляций сфероидальной капли  $\xi$  к

радиусу равновеликой сферы  $R$  образуют второй малый параметр  $\varepsilon \equiv (\xi/R)$ . Расчеты осцилляций сфероидальной капли в первом порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций  $\varepsilon$  в реальности должны учитывать и второй порядок малости по эксцентриситету  $e$  (по величине безразмерной напряженности электростатического поля) [11–16]. Иными словами, вся задача при учете разложений по обоим малым параметрам и сохранении в решении слагаемых  $\sim \varepsilon \cdot e^2$  оказывается в какой-то мере нелинейной.

В асимптотических расчетах, проводимых с использованием нескольких малых параметров, следует четко определять порядки малости параметров по отношению друг к другу. Так, если в рассматриваемой задаче принять, что  $\varepsilon \sim e^2$ , как это было принято в [13,14,16], то при проведении расчетов в приближении  $\sim \varepsilon \cdot e^2$  следует учитывать также слагаемые  $\sim e^2$ , чего в [13,14,16] сделано не было и что делает результаты расчетов в [13,14,16] некорректными.

Если же принять, что  $e^2$  много больше  $\varepsilon$ , как это было сделано в [11,12,15,17], то расчеты порядка  $\varepsilon \cdot e^2$  не требуют учета слагаемых  $\sim e^2$ . Следует, однако, отметить, что в [11,12,15,17] целью проведенных исследований было отыскание и анализ дисперсионных уравнений заряженных сфероидальных капель, а не исследование временной эволюции начальной деформации, что характерно для нелинейных задач. Основным результатом рассмотрений, проведенных в линейном по амплитуде осцилляций и квадратичном по эксцентриситету  $e$  капли приближении ( $\sim \varepsilon \cdot e^2$  при условии  $e^2 \gg \varepsilon$ ), сводится к получению дисперсионного уравнения для трехмерных осцилляций вытянутой сфероидальной заряженной капли, имеющей в пренебрежении взаимодействием мод вид [15]

$$\omega^2 = - \left\{ n(n-1)(n+2)\alpha_n - 3e^2 [n^3 + (2n-1)(n+2)\alpha_n] \kappa_n^m \right\};$$

$$\alpha_n \equiv \left( 1 - \frac{W_q}{(n+2)} \right), \quad W_q \equiv \frac{Q^2}{4\pi R^3 \sigma}, \quad \kappa_n^m \equiv \frac{[n(n+1) - 3m^2]}{3(2n-1)(2n+3)}.$$

В этих выражениях  $n$  — номер моды,  $m$  — азимутальное собственное число. Безразмерный параметр  $W_q$  называется параметром Рэлея и характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду. Критическое значение параметра  $W_q \equiv W_{q*}$  равно четырем [1].

Из приведенного дисперсионного уравнения видно, что частоты осцилляций всех мод сфероидальной капли снижаются с увеличением ее эксцентриситета  $e$ . Приравнявая квадрат частоты нулю, несложно найти критическое значение параметра  $W_{qsph}$ , при котором вытянутая сфероидальная капля претерпевает неустойчивость по отношению к неосесимметричным осцилляциям, в зависимости от значений собственных чисел  $n, m$  и величины эксцентриситета капли  $W_{qsph} = (n + 2)[1 - (e^2 3n^2 \kappa_n^m / ((n - 1)(n + 2)))]$ .

При  $n = 2$  и  $m = 0$  легко получается выражение для критического значения параметра  $W$  для основной моды осесимметричных осцилляций, определяющего устойчивость всей капли  $W_{qsph} = 4[1 - (2e^2/7)]$ .

Согласно [17], для капли, имеющей форму сплюснутого сфероида, все выше записанные выражения остаются справедливыми, если при квадрате эксцентриситета поменять знак. В частности, критическое значение параметра  $W$  для сплюснутой сфероидальной капли примет вид

$$W_{qsph} = (n + 2) \left[ 1 + e^2 \frac{[n(n + 1) - 3m^2]n^2}{(n - 1)(n + 2)(2n - 1)(2n + 3)} \right].$$

Из этого выражения видно, что сплюснутая заряженная сфероидальная капля устойчива по отношению к осесимметричным виртуальным возмущениям и неосесимметричным с азимутальным собственным числом, удовлетворяющим условию  $m^2 \leq (n(n + 1)/3)$ . При выполнении противоположного условия  $m^2 > (n(n + 1)/3)$  неосесимметричные моды с соответствующими азимутальными числами неустойчивы. Например, сплюснутая заряженная сфероидальная капля неустойчива по отношению к виртуальным деформациям  $\sim P_2^2, P_3^3$  и т.д.

Сказанное относится и к несфероидальным искажениям равновесных форм капель в электромагнитном подвесе [18], для которых расчеты спектра осцилляций проводились в приближении  $\varepsilon \cdot \beta$ , где  $\beta$  — малый безразмерный параметр, характеризующий равновесную деформацию капли в магнитном поле;  $\varepsilon$  — безразмерная амплитуда осцилляций.

В настоящей работе в предположении, что  $\varepsilon \sim e^2$ , проводится анализ нелинейных осцилляций незаряженной капли в однородном электростатическом поле с сохранением слагаемых  $\sim \varepsilon \cdot e^2$  и  $\sim e^2$ .

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности нелинейно осциллирующей незаряженной капли, находящейся в однородном электростатическом поле  $E_0$ . Примем, что жидкость является идеальной несжимаемой идеально проводящей с плотностью  $\rho$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ .

В отсутствие внешнего поля капля имеет сферическую форму радиуса  $R$ . наличие слабого электростатического поля  $E_0$  в окружающем каплю пространстве приводит к малому искажению равновесной формы капли, которую в сферических координатах можно записать в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r(\theta) = R + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos(\theta)),$$

определяя амплитуды  $a_n$  ( $|a_n| \ll R$ ) из условия баланса давлений на равновесной поверхности. Следует учесть, что поскольку давление электрического поля  $p_E$  привело к искажению равновесной сферической формы капли, то, следовательно, оно должно иметь тот же порядок малости, что и вызванное им искажение,  $p_E \sim E_0^2 \sim a_n$ . Записывая давление сил поверхностного натяжения  $p_\sigma^{(eq)}$  и давление электрического поля  $p_E^{(eq)}$  с точностью до слагаемых  $\sim a_n$

$$p_\sigma^{(eq)} \approx \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - n(n + 1)) a_n P_n(\cos(\theta)) + O(a_n^2),$$

$$p_E^{(eq)} \approx \frac{9E_0^2}{8\pi} \cos(\theta) + O(a_n^2)$$

$$= \frac{3E_0^2}{8\pi} (2P_2(\cos(\theta)) + P_0(\cos(\theta))) + O(a_n^2)$$

и составляя баланс давлений, получим

$$r(\theta) \approx R \left( 1 + \frac{3E_0^2 R}{16\pi\sigma} P_2(\cos(\theta)) \right) + O(E_0^4).$$

Если сравнить это выражение с уравнением сфероидальной поверхности, записанной с точностью до  $\sim e^2$

$$r_{sph} \approx R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\cos(\theta)) \right) + O(e^4),$$

то несложно заметить, что равновесную форму поверхности незаряженной капли в слабом электростатическом поле можно считать сфероидом с точностью до слагаемых  $\sim e^2$ , эксцентриситет которого связан с напряженностью поля соотношением  $e^2 = (9E_0^2 R / 16\pi\sigma)$ . Следует отметить, что безразмерная комбинация физических величин  $W_E \equiv E_0^2 R / \sigma$  называется параметром Тейлора и характеризует устойчивость капли по отношению к поверхностному заряду, индуцированному в электропроводной капле внешним однородным электростатическим полем  $E_0$ . Критическая для реализации такой неустойчивости величина параметра  $W_E \equiv W_{E*}$  равна  $\approx 2.62$  [12].

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  равновесная слабо сфероидальная капля с эксцентриситетом  $e$  претерпевает осесимметричное возмущение  $\xi(\theta, t)$  фиксированной амплитуды  $\varepsilon$ , существенно меньшей радиуса капли. Зададимся целью найти спектр возникающих капиллярных осцилляций капли (форму капли) при  $t > 0$ .

Примем, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени, и уравнение, описывающее ее поверхность, в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых  $\rho = \sigma = R = 1$ , имеет вид (за всеми величинами оставляем прежние обозначения)

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t) = 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\cos(\theta)) + \xi(\theta, t);$$

$$e^2 = \frac{9E_0^2}{16\pi}; \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Вызванное искажением равновесной поверхности движение жидкости в капле будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ; само поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  при этом определяется через градиент потенциала  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}(\psi(\mathbf{r}, t))$ . Принимая, что скорости гидродинамических движений жидкости в капле много меньше скорости распространения электромагнитных взаимодействий, электрическое поле в окрестности капли будем считать электростатическим и станем описывать его с помощью потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , с которым напряженность поля  $\mathbf{E}$  связана известным соотношением  $\mathbf{E} = -\text{grad}(\Phi)$ .

Математическая формулировка решаемой задачи имеет вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0 r \cos(\theta); \quad (4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad (5)$$

$$\Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + p_E = p_\sigma; \quad (6)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t); \quad (7)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3\pi},$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (8)$$

$$\int_V \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (9)$$

$$\oint_V (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) ds = 0,$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (10)$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\cos(\theta)) + \xi_1 P_1(\cos(\theta)) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\cos(\theta)),$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = 0; \quad \sum_{i \in \Xi} h_i = 1. \quad (11)$$

Поскольку условия (8), (9) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и в начальный, то при  $t = 0$  они определяют амплитуды нулевой  $\xi_0$  и первой  $\xi_1$  мод в разложении начального возмущения  $\xi(\theta)$  в ряд по полиномам Лежандра, т.е. амплитуды нулевой и первой мод не могут быть произвольны, но будут определяться видом начальной деформации.

В выражениях (6)–(11) введены обозначения:  $\Delta p$  — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия;

$$P_E = \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2$$

— давление электрического поля;  $p_\sigma = \text{div}_S \mathbf{n}$  — давление сил поверхностного натяжения ( $\text{div}_S$  — поверхностная дивергенция);  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности (1);  $\Phi_S(t)$  — постоянное вдоль всей поверхности капли значение электрического потенциала;  $\varepsilon$  — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли, являющаяся малым параметром задачи;  $h_i$  — коэффициенты, определяющие парциальный вклад  $i$ -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение;  $\Xi$  — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод;  $\xi_0$  и  $\xi_1$  — константы, определяемые из условий (8) и (9) в начальный момент времени, с точностью до слагаемых порядка малости  $\sim \varepsilon \cdot e^2$  и  $\sim \varepsilon^2$  равные

$$\xi_0 \approx - \sum_{i \in \Xi} \left[ \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{(2i+1)} + \varepsilon \cdot e^2 \frac{2}{15} h_i \cdot \delta_{i,2} \right] + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi_1 \approx - \sum_{i \in \Xi} \left[ \varepsilon^2 \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} + \varepsilon \cdot e^2 \frac{9}{35} h_i \cdot \delta_{i,3} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (12)$$

Для удобства дальнейших разложений и чтобы иметь возможность в конечных выражениях без труда выделить слагаемые, обязанные своим происхождением сфероидальности равновесной формы, введем формальный параметр  $\beta$ :  $e^2 \approx \beta \cdot \varepsilon$ . Поскольку, согласно принятому предположению,  $e^2 \sim \varepsilon$ , то очевидно, что  $\beta \sim 1$ . Этот параметр нужен только для того, чтобы указывать, что, будучи умноженным на  $\varepsilon$ , он может быть записан как  $e^2$ . Кроме того, напомним, что при отыскании равновесной формы капли в поле было получено соотношение между эксцентриситетом и напряженностью электрического поля, имеющее в безразмерных переменных вид

$$e^2 = \frac{9}{16\pi} E_0^2.$$

3. Для отыскания решения поставленной задачи воспользуемся методом многих масштабов, как это делалось в задачах этого типа в [1–10, 12–14, 16, 18]. Искомые функции  $\xi(\theta, t)$ ,  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  представим в виде разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и будем считать зависящими не просто от времени  $t$ , а от разных его масштабов, определенных через малый

параметр  $\varepsilon$ :  $T_m \equiv \varepsilon^m t$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Ограничиваясь рассмотрением поставленной задачи в квадратичном приближении, в рамках которого можно определить зависимости искомым величин лишь от двух временных масштабов  $T_0$  и  $T_1$ , запишем

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \psi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon^{1/2} (\Phi^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0)) O(\varepsilon^{5/2}). \end{aligned} \quad (13)$$

Разложение для потенциала электрического поля ведется по полувцелым степеням параметра  $\varepsilon$ , поскольку  $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$ . Компонента потенциала  $\Phi^{(0)}(r, \theta)$  определяет равновесную слабо сфероидальную форму капли в поле

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = \left(\frac{16\pi}{9}\beta\right) \frac{1}{r^2} (1 - r^3) \cos(\theta), \quad (14)$$

а добавка  $\Phi^{(1)}(r, \theta, T_0)$  связана с искажением равновесной поверхности капли.

Для входящих в динамическое граничное условие (6) давлений электрического поля  $p_E$  и сил поверхностного натяжения  $p_\sigma$  примем следующие разложения:

$$\begin{aligned} p_E &= p_E^{(eq)} + \varepsilon^2 p_E^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^3), \\ p_\sigma &= p_\sigma^{(eq)} + \varepsilon p_\sigma^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (15)$$

где компоненты

$$p_E^{(eq)} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla \Phi^{(0)})^2 \Big|_{r=r(\theta)} \quad \text{и} \quad p_\sigma^{(eq)} = \text{div}_S \overline{n^{(eq)}} \Big|_{r=r(\theta)}$$

не зависят от возмущения  $\xi(\theta, t)$ , а являются давлениями на равновесной сфероидальной поверхности капли, т.е. удовлетворяют равновесному балансу давлений

$$r = r(\theta) : \quad \Delta p + p_E^{(eq)} = p_\sigma^{(eq)} \quad (16)$$

и, следовательно, взаимно компенсируются.

Подставляя разложения (13), (15) в систему (2)–(11), можно получить набор краевых задач разных порядков малости для определения функций  $\xi^{(m)}$ ,  $\psi^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ) и  $\Phi^{(1)}$ . Очевидно, что линейным уравнениям (2) должна удовлетворять каждая из функций  $\psi^{(m)}$ ,  $\Phi^{(1)}$ .

Решения уравнений (2) для функций первого и второго порядков малости, удовлетворяющие условиям (3), (4), запишем в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(T_0, T_1) r^n P_n(\cos(\theta)) \quad (m = 1, 2); \\ \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(1)}(T_0) r^{-(n+1)} P_n(\cos(\theta)). \end{aligned} \quad (17)$$

Последовательные поправки к равновесной поверхности капли также представим в виде разложений по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1) P_n(\cos(\theta)) \quad (m = 1, 2). \quad (18)$$

4. Система уравнений для определения коэффициентов 1-го порядка  $D_n^{(1)}(T_0, T_1)$  и  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$  в решениях для гидродинамического потенциала  $\psi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)$  и возмущения поверхности капли  $\xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)$  получается из граничных условий (5), (6), (8), (9) после группировки при первой степени параметра  $\varepsilon$  слагаемых, связанных с искажением равновесной формы капли.

Напомним, что при разложении по порядкам малости динамического граничного условия (6) необходимо учитывать соотношение (16). В силу этого система граничных условий первого порядка малости для  $D_n^{(1)}(T_0, T_1)$  и  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ , полученная из (5), (6), ничем не будет отличаться от аналогичной системы для коэффициентов 1-го порядка в задаче о колебаниях незаряженной сферической капли в отсутствие внешнего поля

$$r = 1 : \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + p_\sigma^{(1)}(\xi) = 0, \quad \text{где}$$

$$p_\sigma^{(1)}(\xi) \equiv -(2 + \Delta_\theta) \xi^{(1)}; \quad \Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

а) После несложных преобразований получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) &= 0; \\ \omega_n^2 &= n(n-1)(n+2). \end{aligned} \quad (19)$$

Решением уравнений (19) являются гармонические функции по времени  $T_0$  (для  $n \geq 2$ ) с коэффициентами, зависящими от времени  $T_1$ ,

$$\begin{aligned} M_n^{(1)}(T_0, T_1) &= A_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.}; \\ A_n^{(1)}(T_1) &= a_n^{(1)}(T_1) \exp(i \cdot b_n^{(1)}(T_1)). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь и далее аббревиатура к.с. обозначает слагаемые, комплексно-сопряженные к выписанным;  $a_n^{(1)}(T_1)$  и  $b_n^{(1)}(T_1)$  — вещественные функции, зависимость которых от времени  $T_1$  может быть определена только при рассмотрении задачи следующего порядка малости.

Из условий (8), (9), записанных в линейном по малой величине  $\varepsilon$  приближении, следует, что

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0. \quad (21)$$

Отметим, что выражения (21) не противоречат (19) для  $n = 0$  и  $n = 1$ .

б) Уравнения для определения коэффициентов  $F_n^{(1)}(T_0)$  в решении (17) получаются из условий (7) и (10) путем группировки слагаемых  $\sim \varepsilon^{3/2}$ , обязанных своим происхождением искажению  $\xi(\theta, t)$  равновесной сфероидальной формы,

$$r = 1 : \quad \Phi^{(1)} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)};$$

$$\int_0^\pi \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right] \sin(\theta) d\theta = 0.$$

Подставляя сюда выражения для  $\Phi^{(0)}$  и  $\Phi^{(1)}$ , несложно получить

$$F_n^{(1)}(T_0) = \sqrt{16\pi\beta} \left[ K_{1,n+1,n} M_{n+1}^{(1)}(T_0) + K_{1,n-1,n} M_{n-1}^{(1)}(T_0) \right], \quad (n > 0); \quad (22)$$

$$F_0^{(1)}(T_0) = 0; \quad \Phi_S^{(1)} = 0; \quad K_{lmn} = [C_{l0m0}^{n0}]^2.$$

$C_{l0m0}^{n0}$  — коэффициенты Клебша–Гордана.

5. а) Система граничных условий второго порядка малости, полученная из (5), (6), будет содержать как слагаемые, квадратичные по возмущению поверхности  $\xi(\theta, t)$ , так и слагаемые, учитывающие взаимодействие возмущения  $\xi(\theta, t)$  со сфероидальностью равновесной формы капли,

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} = -\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} \left( \xi^{(1)} + \frac{\beta}{3} P_2(\cos(\theta)) \right) - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} + p_\sigma^{(2)}(\xi) = p_E^{(2)}(\xi) - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \left( \xi^{(1)} + \frac{\beta}{3} P_2(\cos(\theta)) \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right);$$

где

$$p_\sigma^{(2)}(\xi) = - (2 + \Delta_\theta) \xi^{(2)} + 2\xi^{(1)}(1 + \Delta_\theta) \xi^{(1)} - 2 \frac{\beta}{2} P_2(\cos(\theta)) \cdot (4 - \Delta_\theta) \xi^{(1)};$$

$$p_E^{(2)}(\xi) = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( (\nabla \Phi^{(0)})^2 \right) \cdot \xi^{(1)} + 2 \nabla \Phi^{(0)} \cdot \nabla \Phi^{(1)} \right].$$

Подставляя в эти уравнения решения более низких порядков малости (14), (17), (18), (20)–(22), после громоздких преобразований получим уравнение относительно искомых коэффициентов 2-го порядка малости  $M_n^{(2)}(T_0)$

$$\frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 \cdot M_n^{(2)}(T_0) = \left[ -2i \cdot \omega_n \frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} + \beta \cdot G1(n) \cdot A_n^{(1)}(T_1) \right] \exp(i \cdot \omega_n T_0) + \beta \left[ G2(n) \cdot A_{n+2}^{(1)} \exp(i \cdot \omega_{n+2} T_0) + G3(n) \cdot A_{n-2}^{(1)} \exp(i \cdot \omega_{n-2} T_0) \right] + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\gamma_{lmn} + \omega_l \cdot \omega_m \cdot \eta_{lmn}) \cdot A_l^{(1)} \cdot A_m^{(1)} \times \exp(i \cdot (\omega_l + \omega_m) T_0) + (\gamma_{lmn} - \omega_l \cdot \omega_m \cdot \eta_{lmn}) \times A_l^{(1)} \cdot \overline{A_m^{(1)}} \exp(i \cdot (\omega_l - \omega_m) T_0) \right\} + (\text{к. с.});$$

$$G1(n) \equiv \frac{n}{3} \left[ (3n(n+1) - 10) K_{2,n,n} + 12(n K_{1,n-1,n} K_{1,n,n-1} + (n+2) K_{1,n+1,n} K_{1,n,n+1}) - 8 \right];$$

$$G2(n) \equiv \frac{1}{3} \left[ (n^3 + 3n^2 - 10n - 8) K_{2,n+2,n} + 12n(n+2) K_{1,n+1,n} K_{1,n+2,n+1} \right];$$

$$G3(n) \equiv \frac{n}{3} \left[ (5n^2 - 21n + 14) K_{2,n-2,n} + 12n K_{1,n-1,n} K_{1,n-2,n-1} \right];$$

$$\gamma_{lmn} = K_{lmn} \left[ \omega_m^2 (n-m+1) + 2n(m(m+1)-1) \right] + \alpha_{lmn} \cdot \frac{1}{m} \omega_m^2;$$

$$\eta_{lmn} = K_{lmn} \left( \frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{lmn} \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{n}{2l} \right);$$

$$\alpha_{lmn} = -\sqrt{l(l+1)m(m+1)} C_{l0m0}^{n0} C_{l(-1)m1}^{n0}. \quad (23)$$

Напомним, что коэффициенты Клебша–Гордана отличны от нуля, только если нижние индексы удовлетворяют соотношениям

$$|l-m| \leq n \leq (l+m);$$

$$(l+m+n) = 2g, \quad (g = 1, 2, 3, \dots). \quad (24)$$

Для того чтобы решение уравнения (23) не содержало секулярных (т.е. неограниченно нарастающих со временем) членов, необходимо, чтобы в функции неоднородности (правой части (23)) не было слагаемых, пропорциональных  $\exp(i \cdot \omega_n T_0)$ , т.е. описывающих периодическое внешнее воздействие с частотой  $\omega_n$ , равной частоте собственных колебаний  $n$ -й моды. Это возможно, если потребовать выполнения условия

$$-2i \cdot \omega_n \frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1} + \beta \cdot G1(n) \cdot A_n^{(1)}(T_1) = 0, \quad (25)$$

позволяющего определить зависимость амплитуд 1-го порядка малости от медленного временного масштаба  $T_1$ . Выражая в (25)  $A_n^{(1)}(T_1)$  через действительные функции  $a_n^{(1)}(T_1)$ ,  $b_n^{(1)}(T_1)$  и требуя обращения в нуль действительной и мнимой частей уравнения, несложно получить

$$a_n^{(1)}(T_1) = a_n^{(0)}, \quad b_n^{(1)}(T_1) = -\frac{\beta}{2\omega_n} G1(n) \cdot T_1 + b_n^{(0)}, \quad (26)$$

где  $a_n^{(0)}$  и  $b_n^{(0)}$  — константы, определяемые из начальных условий.

Решения (26) позволяют записать для амплитуд  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$  вместо (20) выражение, учитывающее зависимость от обоих временных масштабов,

$$M_n^{(1)}(t) = 2a_n^{(0)} \cos \left[ \left( \omega_n - \frac{e^2}{2\omega_n} G1(n) \right) \cdot t + b_n^{(0)} \right]. \quad (27)$$

Решая уравнения (23) с учетом соотношения (25), для амплитуд  $M_n^{(2)}(T_0)$  ( $n \leq 2$ ) получим

$$M_n^{(2)}(T_0) = A_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) + \beta \left[ \mu_{n+2} A_{n+2}^{(1)} \exp(i\omega_{n+2} T_0) + \mu_{n-2} A_{n-2}^{(1)} \exp(i\omega_{n-2} T_0) \right] + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \lambda_{lmn}^{(+)} A_l^{(1)} A_m^{(1)} \exp(i(\omega_l + \omega_m) T_0) + \lambda_{lmn}^{(-)} A_l^{(1)} A_m^{(1)} \exp(i(\omega_l - \omega_m) T_0) \right\} + (\text{к. с.}), \quad (28)$$

где

$$\mu_{n+2} = \frac{G2(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n+2}^2)}, \quad \mu_{n-2} = \frac{G3(n)}{(\omega_n^2 - \omega_{n-2}^2)},$$

$$\lambda_{lmn}^{(\pm)} = \frac{(\gamma_{lmn} \pm \omega_l \cdot \omega_m \cdot \eta_{lmn})}{[\omega_n^2 - (\omega_l \pm \omega_m)^2]}.$$

Заметим, что поскольку рассматриваемое квадратичное по  $\varepsilon$  приближение позволяет определить зависимость коэффициентов  $M_n^{(2)}$  лишь от временного масштаба  $T_0$ , то в (28) достаточно принять, что  $A_n^{(2)} = a_n^{(2)} \exp(i \cdot b_n^{(2)})$ ,  $a_n^{(2)}$  и  $b_n^{(2)}$  — действительные константы, а для коэффициентов  $A_j^{(1)}$  не следует учитывать их зависимость от времени  $T_1$ , т.е.  $A_j^{(1)} = a_j^{(0)} \exp(i \cdot b_j^{(0)})$ .

Из условий (8), (9) во 2-м порядке малости по  $\varepsilon$ , рассматривая слагаемые, возникшие из-за искажения  $\xi(\theta, t)$  равновесной сфероидальной поверхности, получим выражения для нелинейных поправок к амплитудам нулевой и первой мод

$$M_0^{(2)}(T_0) = -\frac{2}{15} \beta M_2^{(1)}(T_0) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} [M_n^{(1)}(T_0)]^2,$$

$$M_1^{(2)}(T_0) = -\frac{9}{35} \beta M_3^{(1)}(T_0) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9n}{(2n-1)(2n+1)} M_{n-1}^{(1)}(T_0) M_n^{(1)}(T_0). \quad (29)$$

б) Начальные условия (11) после подстановки в них разложений (13) превратятся в систему уравнений для функций 1-го и 2-го порядков малости

$$t = 0: \quad \xi^{(1)}(\theta, t) = \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\cos(\theta)); \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_0} = 0;$$

$$\xi^{(2)}(\theta, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \xi_0 P_0(\cos(\theta)) + \xi_1 P_1(\cos(\theta)) \right];$$

$$\frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} = -\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1},$$

позволяющую определить действительные константы  $a_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$ ,  $a_n^{(2)}$  и  $b_n^{(2)}$  в решениях (27), (28).

Удовлетворяя начальным условиям в первом приближении по  $\varepsilon$ , получим  $a_n^{(0)} = \frac{1}{2} h_i \cdot \delta_{n,i}$ ;  $b_n^{(0)} = 0$  ( $i \in \Xi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а во втором по  $\varepsilon$  приближении находим

$$a_n^{(2)} = -\frac{\beta}{2} \sum_{i \in \Xi} h_i (\mu_{n+2} \cdot \delta_{i,n+2} + \mu_{n-2} \cdot \mu_{i,n-2}) - \frac{1}{4} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j (\lambda_{ijn}^{(+)} + \lambda_{ijn}^{(-)}); \quad b_n^{(2)} = 0,$$

где  $\delta_{n,i}$  — символ Кронекера.

Используя эти выражения, запишем амплитуды 1-го и 2-го порядков малости в решении (18) для формы поверхности колеблющейся капли в окончательном виде

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{n,i} \cdot h_i \cos \left[ \left( \omega_n - \frac{e^2}{2\omega_n} G1(n) \right) \cdot t \right];$$

$$M_0^{(2)}(t) = -\sum_{i \in \Xi} \left[ \frac{2}{15} \beta \cdot \delta_{i,2} h_i \cos(\omega_i t) + \frac{h_i^2}{(2i+1)} (\cos(\omega_i t))^2 \right];$$

$$M_1^{(2)}(t) = -\sum_{i \in \Xi} \left[ \frac{9}{35} \beta \cdot \delta_{i,3} \cos(\omega_i t) + \frac{9i \cdot h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_{i-1} t) \cos(\omega_i t) \right] \quad (\forall n \geq 2)$$

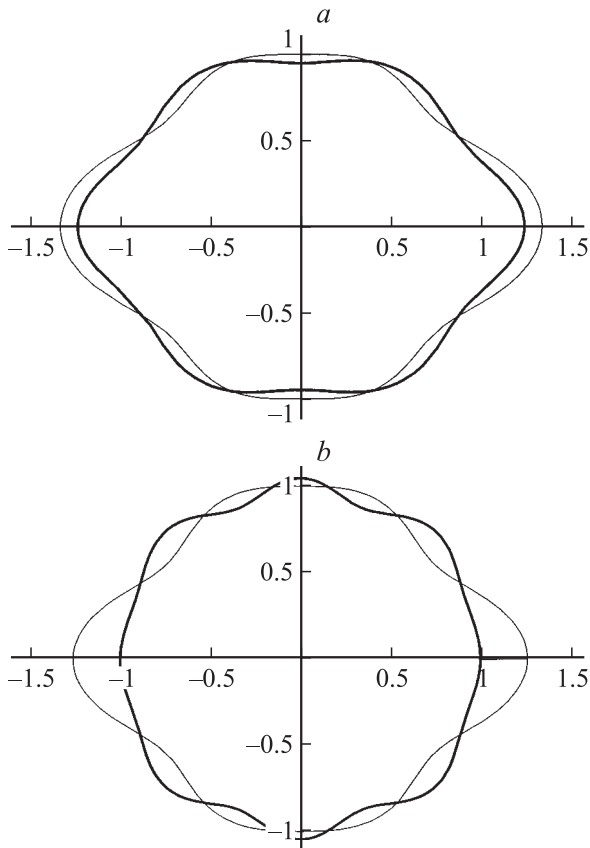
$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{i \in \Xi} h_i \cdot \beta \left\{ \delta_{i,n+2} \mu_{n+2} [\cos(\omega_{n+2} t) - \cos(\omega_n t)] + \delta_{i,n-2} \mu_{n-2} [\cos(\omega_{n-2} t) - \cos(\omega_n t)] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_i h_j \left\{ \lambda_{ijn}^{(+)} [\cos((\omega_i + \omega_j) t) - \cos(\omega_n t)] + \lambda_{ijn}^{(-)} [\cos((\omega_i - \omega_j) t) - \cos(\omega_n t)] \right\}. \quad (30)$$

Таким образом, используя (1), (13), (18), для формы поверхности колеблющейся незаряженной капли, находящейся во внешнем однородном электрическом поле, получим аналитическое выражение

$$r(\theta, t) = 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\cos(\theta)) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\cos(\theta)) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\cos(\theta)) + O(\varepsilon^3), \quad (31)$$

в котором амплитудные коэффициенты  $M_n^{(i)}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) определяются по (30).

На рис. 1, а, 3, а приведены результаты расчетов по (31) форм нелинейно осциллирующих незаряженных электропроводных капель в однородном электростатическом поле  $E_0$  (при  $W_E \approx 0.5 \cdot W_{E^*}$ ) для различных



**Рис. 1.** Контур нелинейно осциллирующей капли в начальный момент времени (тонкая линия) и по прошествии времени, равного периоду осцилляций основной моды (жирная линия), когда начальная деформация задана суперпозицией четвертой и шестой мод при  $h_4 = h_6 = 0.5$ ;  $\varepsilon = 0.25$ : *a* — незаряженная капля в однородном внешнем электростатическом поле, *b* — заряженная капля.

начальных деформаций: в начальный момент времени  $t = 0$  — тонкая кривая, в момент  $t = (2\pi/\omega_2)$ , т.е. к концу периода осцилляций основной ( $n = 2$ ) моды капли, — жирная кривая. На рис. 1, *b*, 3, *b* для сравнения приведены результаты расчетов согласно [5] форм нелинейно осциллирующих заряженных (при  $W_q \approx 0.5 \cdot W_{q^*}$ ) капель при тех же начальных деформациях в те же моменты времени. Из сравнения приведенных рисунков несложно видеть, что кривизна вершин, а вместе с тем и напряженность поля, и вероятность зажигания коронного разряда у поверхности нелинейно осциллирующих капель [19] увеличиваются с ростом номеров мод, определяющих начальную деформацию капли. При прочих равных условиях (когда параметры Рэлея и Тейлора равны примерно половинам от своих критических значений) кривизна вершин у незаряженных капель в однородном электростатическом поле больше, чем у заряженных капель в отсутствие поля.

6. Из выражений (30), (31) для амплитудных коэффициентов нелинейных поправок к амплитуде  $M_n^{(2)}$  и вида коэффициентов  $\lambda_{ijn}^{(\pm)}$  (см. (28)) видно, что нелинейные

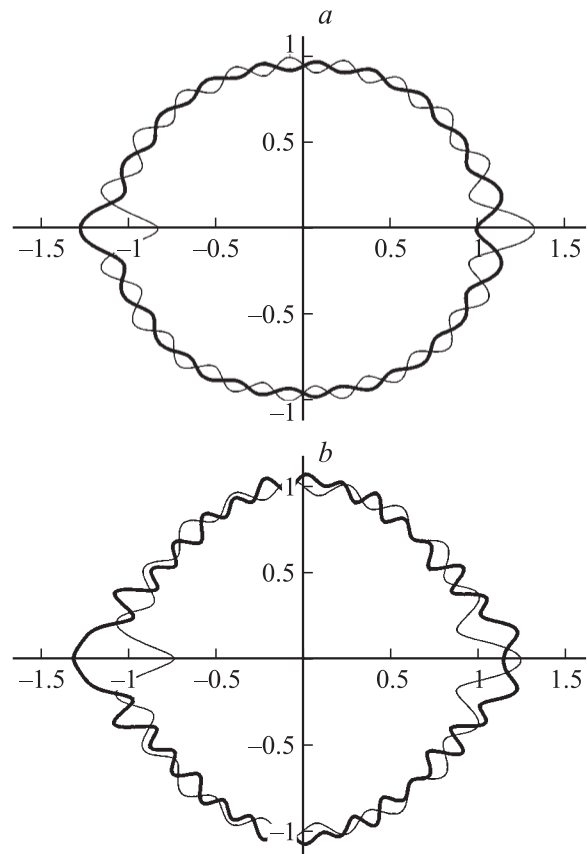
добавки к амплитуде осцилляций  $M_n^{(2)}$  имеют резонансный вид: при выполнении условия  $\omega_n^2 - (\omega_l \pm \omega_m)^2 = 0$  (частоты определяется соотношением (19)) они расходятся, что означает наличие внутреннего резонансного взаимодействия  $n$ -й,  $l$ -й и  $m$ -й мод [6,8]. Расчеты показывают, что при  $n, l, m < 100$  существует только две резонансные ситуации:  $n = 8, l = m = 5$  и  $n = 16, l = m = 10$ . Оба этих резонанса являются вырожденными и реализуются при нелинейных осцилляциях незаряженной сферической капли [20]. Очевидно, что в расчетах третьего порядка малости по амплитуде осцилляций частоты в резонансном условии  $\omega_n^2 - (\omega_l \pm \omega_m)^2 = 0$  будут определяться с учетом поправок на влияние внешнего поля (с учетом поправок на сфероидальность) соотношениями вида

$$\sqrt{n(n-1)(n+2)} - \frac{e^2}{2\sqrt{n(n-1)(n+2)}} G1(n)$$

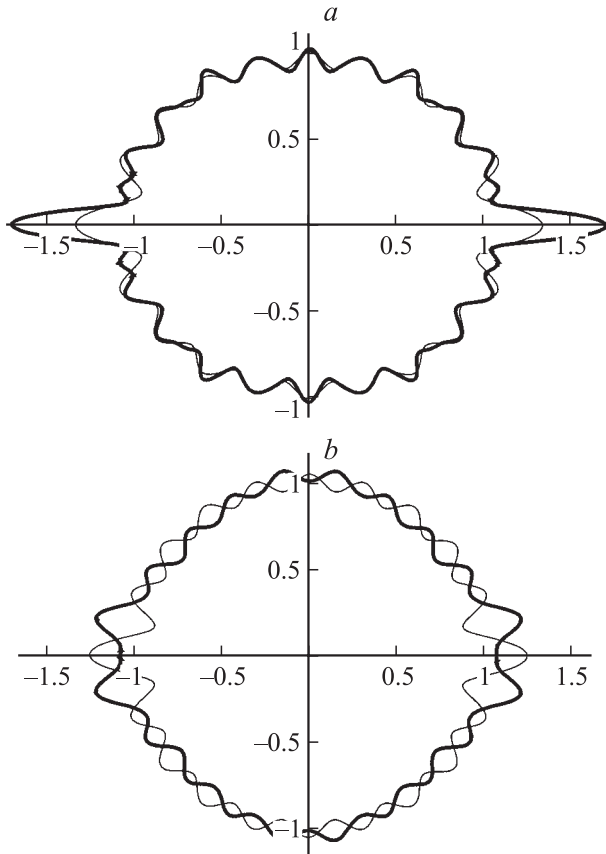
(см. (27)), или, что то же самое,

$$\sqrt{n(n-1)(n+2)} - \frac{9E_0^2}{32\pi\sqrt{n(n-1)(n+2)}} G1(n).$$

В такой ситуации количество резонансов резко возрастает, но исследование подобной ситуации целесообразно проводить при выполнении расчетов в третьем порядке малости.



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1, когда начальная деформация задана одной девятнадцатой модой при  $h_{19} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.25$ .



**Рис. 3.** То же, что на рис. 1, когда начальная деформация задана двадцатой модой при  $h_{20} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.25$ .

7. Все приведенное выше рассмотрение проделано в предположении, что величина квадрата эксцентриситета капли, обусловленного наличием внешнего электрического поля, имеет тот же порядок малости, что и амплитуда ее поверхностных колебаний,  $e^2 \sim \varepsilon$ . Однако следует отметить, что эти параметры являются независимыми. Более того, например, для внутриоблачных капель грозовых облаков характерная вытянутость составляет десятые доли радиуса, т.е. может рассматриваться как величина нулевого порядка малости. Если рассматривать поставленную задачу в предположении  $e^2 \gg \varepsilon$ , то компоненту давления электрического поля

$$p_E^{(2)}(\xi) = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( (\nabla \Phi^{(0)})^2 \right) \cdot \xi^{(1)} + 2 \nabla \Phi^{(0)} \cdot \nabla \Phi^{(1)} \right]$$

следует принять имеющей 1-й порядок малости и учитывать в системе граничных условий для амплитуд 1-го порядка

$$r = 1 : \quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} - p_E^{(2)}(\xi) + p_\sigma^{(1)}(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае вместо (19) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(t) - n \frac{3E_0^2}{4\pi} \left[ A(n) \cdot M_{n-2}^{(1)}(t) + C(n) \cdot M_{n+2}^{(1)}(t) \right] = 0, \quad (32)$$

в котором частота определяется выражением

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &\equiv n \left[ (n-1)(n+2) - \frac{3E_0^2}{4\pi} B(n) \right] \\ &\equiv n \left[ (n-1)(n+2) - \frac{4e^2}{3} B(n) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

В (32) и (33) введены следующие обозначения:

$$A(n) \equiv -4 \cdot K_{2,n-2,n} + 3n \cdot K_{1,n-1,n} K_{1,n-2,n-1};$$

$$B(n) \equiv -4 \cdot K_{2,n,n} + 3 \left( n K_{1,n-1,n} K_{1,n,n-1} + (n+2) K_{1,n+1,n} K_{1,n,n+1} \right) - 2;$$

$$C(n) \equiv -4 \cdot K_{2,n+2,n} + 3(n+2) \cdot K_{1,n+1,n} K_{1,n+2,n+1}.$$

Если в уравнении (32) пренебречь взаимодействием мод, т.е. опустить слагаемые  $\sim M_{n-2}^{(1)}(t)$  и  $M_{n+2}^{(1)}(t)$ , то выражение (33) будет являться дисперсионным уравнением задачи о колебаниях поверхности незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле, полученным в предположении  $e^2 \gg \varepsilon$ .

### Заключение

Расчеты нелинейных осцилляций незаряженной капли электропроводной жидкости в однородном внешнем электростатическом поле  $E_0$  показали их качественное сходство с ранее исследованными [1–10] нелинейными осцилляциями заряженной капли. Обнаруженное количественное различие связано с влиянием сфероидальности равновесной формы капли в поле  $E_0$ . Наиболее существенное различие между сравниваемыми физическими объектами, обнаруженное в расчетах второго порядка малости по амплитуде осцилляций, проявляется в существенном снижении количества резонансных ситуаций для нелинейных осцилляций незаряженной капли в  $E_0$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00760).

### Список литературы

- [1] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid. Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [2] Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. (London). 1985. Vol. A401. P. 67–88.
- [3] Natarayan R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. (London). 1987. Vol. A410. P. 209–227.



- [4] *Feng Z.C.* // J. Fluid. Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [5] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
- [6] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
- [7] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 19–30.
- [8] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
- [9] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
- [10] *Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
- [11] *Cheng K.J.* // Phys. Lett. 1985. Vol. A112. N 11. P. 392–396.
- [12] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [13] *Feng Z.C.* // Quant. Appl. Math. 1990. Vol. 47. N 3. P. 555–567.
- [14] *Feng Z.C., Beard K.V.* // Proc. R. Soc. (London). 1990. Vol. 430. P. 133–150.
- [15] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
- [16] *Feng Z.C., Beard K.V.* // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 227. P. 429–447.
- [17] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 10–14.
- [18] *Bratz A., Egry I.* // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 298. P. 341–359.
- [19] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [20] *Tsatoropolos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.