03;11

Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн

© В.В. Дудко, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: vladimi2000@mail.ru

(Поступило в Редакцию 3 августа 2004 г.)

Рассмотрено взаимодействие вязкого газа с колеблющейся поверхностью. Учтено изотермическое скольжение, использованы максвелловские граничные условия.

В последнее время наблюдается интерес к исследованию сдвиговых волн в газах [1]. В указанной работе был проведен анализ сдвиговых волн в объеме газа без учета взаимодействия с поверхностью. В настоящей работе рассматривается процесс генерации сдвиговых волн в газах колеблющихся в собственной плоскости твердой поверхностью. Проводится учет влияния изотермического скольжения [2] на параметры генерируемых волн.

Рассмотрим задачу: газ заполняет полупространство $x > 0$ над неограниченной плоской поверхностью. Поверхность совершает гармонические колебания вдоль оси Y (т. е. в своей плоскости) с частотой ω. Скорость движения поверхности много меньше средней скорости теплового движения молекул газа. Требуется описать поведение газа и силу, действующую на поверхность. Скорость движения поверхности описывается выражением $u = A\exp(-i\omega t)$. Скорость газа у поверхности $(x = 0)$ должна удовлетворять граничному условию

$$V_y = c_m\lambda\,\frac{\partial v}{\partial x} + A\exp(-i\omega t), \qquad (1)$$

где c_m — коэффициент изотермического скольжения [2–4]; λ — средняя длина свободного пробега молекул, определяемая равенством

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}\,\frac{\eta}{\rho}\ [2].$$

Здесь η — динамическая вязкость газа, ρ — плотность газа, m — масса молекул газа, T — температура, k — постоянная Больцмана. Движение газа будет описываться уравнением Навье–Стокса [5]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\mathbf{v},$$

где $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость.

Очевидно, что скорость газа $\mathbf{v}$ направлена вдоль оси Y и не зависит от y, потому $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0$, а так как $v_x = 0$, то $\partial p/\partial x = 0$, а значит, $p = \mathrm{const}$. Процесс изотермический, так что $T = \mathrm{const}$.

Обозначим $v_y = v$. Тогда уравнение Навье–Стокса примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$v = a\exp(-kx - i\omega t). \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$k = (1 - i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \qquad (4)$$

Подставляя решение (3) в граничное условие (1), получим $a = -c_m\lambda k a + u_0$. Отсюда находим $a = u_0/(1 + c_m\lambda k)$, или, учитывая соотношение (4),

$$a = \frac{u_0}{1 + c_m\lambda(1 - i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}.$$

Введем обозначение $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Эта величина — глубина проникновения возмущений, вызванных колебанием пластины, в глубь газа [5]. Задача рассматривается в гидродинамическом приближении со скольжением. Поэтому требуется выполнение условия $\lambda \ll \delta$. Отсюда следует, что частота колебания плоскости должна удовлетворять условию: $\omega \ll 2\nu/\lambda^2$. Амплитуду a можно представить

$$a = \frac{u_0}{1 + \frac{c_m\lambda}{\delta}(1 - i)} = u_0\,\frac{1 + \frac{c_m\lambda}{\delta} + i\,\frac{c_m\lambda}{\delta}}{1 + 2\,\frac{c_m\lambda}{\delta} + 2\left(\frac{c_m\lambda}{\delta}\right)^2}.$$

С учетом малости величины λ/δ последнее выражение приводится к виду

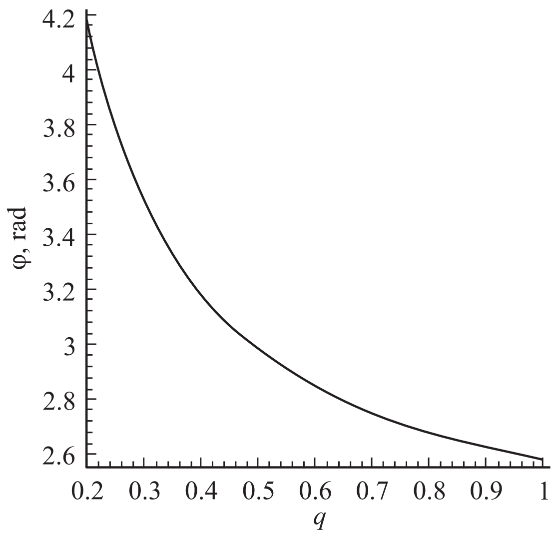
$$a \approx u_0\left(1 - \frac{c_m\lambda}{\delta} + i\,\frac{c_m\lambda}{\delta}\right).$$

Отсюда находится разность фаз колебаний поверхности и поверхностного (см. рисунок) слоя газа

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{c_m\lambda}{\delta}, \\ \cos\varphi = 1 - \dfrac{c_m\lambda}{\delta}, \end{cases} \qquad \varphi \approx \mathrm{arctg}\,\frac{c_m\lambda}{\delta} \approx \frac{c_m\lambda}{\delta}.$$

Таким образом, разность фаз пропорциональна числу Кнудсена задачи. Скорость движения газа определяется выражением

$$v(x,t) = u_o\left(1 - \frac{c_m\lambda}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{1 - i}{\delta}\,x - i\omega t + i\,\frac{c_m\lambda}{\delta}\right).$$



Зависимость разности фаз φ от коэффициента аккомодации тангенциального импульса при $\lambda/\delta = 0.2$.

Сила трения, действующая со стороны газа на единицу площади поверхности и направленная вдоль оси Y, будет равна

$$\sigma_{xy} = -\nu\rho \frac{\partial v_y}{\partial x}\Big|_{x=0} = \nu\rho u_0 \frac{1-i}{\delta}\left(1 - \frac{c_m\lambda}{\delta}\right)\exp\left(-i\omega t + \frac{ic_m\lambda}{\delta}\right).$$

Коэффициент c_m зависит от характера рассеяния молекул газа на поверхности твердого тела, т. е. от кинетических граничных условий [2,6]. Наиболее часто используются аккомодационные [2] и зеркально-диффузные [6] кинетические граничные условия. Для первых имеется аналитическое решение задачи об изотермическом скольжении для БГК модели интеграла столкновений [2]

$$c_m = \frac{2 - 0.8534q}{q}. \qquad (5)$$

Здесь q — коэффициент аккомодации тангенциального импульса. Для зеркально-диффузных граничных условий аналитического решения нет. Однако получено численное решение этой задачи [7] и имеется решение на основе регулярно приближенного метода [8]. Отметим, что результаты, полученные для коэффициента изотермического скольжения c_m, полученные для случая аккомодационных и зеркально-диффузных граничных условий, отличаются незначительно [9]. Поэтому мы будем использовать для коэффициента изотермического скольжения выражение (5).

Выражение для силы трения можно преобразовать к виду

$$\sigma_{xy} = \sqrt{2}\,\frac{\nu\rho}{\delta}\,u_0\left(1 - \frac{c_m\lambda}{\delta}\right)\exp[-i(\omega t - \varphi)],$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi + \frac{c_m\lambda}{\delta}. \qquad (6)$$

Из формулы (6) следует, что изотермическое скольжение приводит к уменьшению амплитуды силы, действующей со стороны газа на поверхность. Кроме того, происходящее изотермическое скольжение вносит вклад в сдвиг фазы между скоростью поверхности и силой, действующей на нее со стороны газа. Этот эффект позволяет при проведении соответствующих экспериментов определить величины коэффициентов изотермического скольжения для различных газов и поверхностей. Учитывая зависимость c_m от q (5), можно получить соответствующее значение q. Отметим, что, несмотря на большое практическое значение коэффициента аккомодации тангенциального импульса, экспериментальное определение этой величины наталкивается на серьезные трудности [6].

Список литературы

[1] *Cercignani C.* // J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 1985. Vol. 36. July.

[2] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 248 с.

[3] *Ивченко И.Н., Яламов Ю.И.* // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1968. № 6. С. 139–143.

[4] *Савков С.А., Юшканов А.А.* // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1986. № 5. С. 149–152.

[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 736 с.

[6] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

[7] *Siewert C.E., Sharipov F.* // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. N 12. P. 4123–4129.

[8] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107–1118.

[9] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 2004. № 2. С. 193–208.