01,04

Электромагнитная неустойчивость однородной плазмы применительно к условиям межзвездной среды

© А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория,
196140 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 26 февраля 2004 г. В окончательной редакции 20 сентября 2004 г.)

Рассмотрена электромагнитная неустойчивость однородной плазмы с произвольным распределением скоростей применительно к условиям межзвездной среды на больших масштабах, типичных для газопылевых облаков без заметного магнитного поля. Показано, что на приемлемой шкале времени (месяцы и годы) такие неустойчивости успевают развиться и что требованием устойчивости выделяется узкий класс распределений, близких к сферическим.

Введение

Проблема устойчивости однородной плазмы важна для физики межпланетной или межзвездной среды уже хотя бы потому, что не всякие распределения частиц по скоростям способны реализоваться в природе, даже в бесстолкновительной плазме. Действительно, неустойчивые распределения должны быстро перестраиваться в устойчивые, и это обстоятельство надо учитывать при построении теоретических моделей эволюции среды [1,2]. Примером является изотропизация межзвездной среды при встрече двух потоков [3]. Сами авторы [3] подчеркивают его частный характер — кроме наложения двух потоков возможны и многие другие неизотропные модели. Кроме того, иные пространственно-временны́е масштабы для космических условий заставляют менять точку зрения на саму теорию устойчивости плазмы, сейчас приспособленную в основном к лабораторным приложениям. Как мы увидим далее, выводы в отношении космической плазмы получаются несколько необычными: в частности, для распределения скоростей, центрированного обычным образом, устойчивость сохраняется только при обращении в нуль (а не при подчинении некоторому неравенству) второй гармоники разложения фазовой плотности по сферическим функциям. Физически это означает очень быструю в сравнении с временами общей эволюции изотропизацию диаграммы скоростей.

В теории обычно ограничиваются так называемыми потенциальными неустойчивостями плазмы [4,5], т. е. с возмущениями связывается только их электростатическое поле. Но известна и редко упоминаемая электромагнитная неустойчивость Вайбела [6], в которую вовлечено магнитное поле возмущения. Правда, инкременты такой неустойчивости существенно меньше, чем у потенциальной. Этим объясняется, почему электромагнитную неустойчивость редко учитывают для земных установок: времени для ее развития просто не хватает. Иначе обстоит дело в астрофизике, где запас времени относительно велик, исчисляется годами и более. Зато наблюдательных данных и общих соображений недостаточно для выбора между разными правдоподобными моделями [7,8] и поэтому приходится привлекать критерии устойчивости.

Подчеркнем, что электромагнитная неустойчивость должна сказываться и при умеренных, не релятивистских скоростях частиц; только волновые числа k при этом вместе с инкрементами оказываются малыми. Это легко продемонстрировать уже на элементарном примере, приводимом в [5]. Дисперсионное уравнение Вайбела для случая двух дискретных потоков с плотностями n_0 каждый и скоростями $(0, 0, -V_0)$ и $(0, 0, V_0)$ при ориентации волнового вектора вдоль оси x имеет вид

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2V_0^2}{\omega^2}\right) = 0, \qquad (1)$$

где введена ленгмюровская частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2), как и далее, e и m — заряд и масса частицы данного сорта, c — скорость света, ω — частота колебаний. Записав решение уравнения (1) в виде

$$\omega^2 = -\frac{4\omega_p^2k^2V_0^2}{2\omega_p^2 + k^2c^2 + \sqrt{(2\omega_p^2 + k^2c^2)^2 + 8\omega_p^2k^2V_0}},$$

имеем в пределе малых k

$$\omega \approx ikV_0, \qquad (3)$$

что согласуется с приведенным в [5] заключением о неустойчивости системы.

Обратим внимание, что в асимптотическую формулу (3) скорость света не входит. Как мы увидим ниже, это положение является общим для широкого класса нерелятивистских распределений скоростей: электромагнитные эффекты формально релятивистские, но в пределе $k \to 0$ параметр c исчезает. Другое дело, что в примере Вайбела неустойчивость распространяется на все значения k, а в более сглаженных примерах есть критическое k, которое как раз и стремится к нулю при уменьшении средней скорости в сравнении со скоростью света. К оценке критического k мы еще вернемся в заключении статьи.

Далее, для формального удобства и лучшей связи с имеющейся литературой [9] мы начинаем с модели N дискретных пучков, переход от которой к непрерывному распределению тривиален. Сперва все-таки допускаем для возможного дальнейшего обобщения любые скорости частиц V, а затем ограничиваемся приближением $V \ll c$ с целью выделить и изучить электромагнитную неустойчивость.

Основные уравнения

Итак, принимаем модель однородной плазмы, состоящей из потоков с номерами $i = 1, 2, \dots, N$ с соответствующими векторами скоростей потоков $V_i(u_i, v_i, w_i)$, пространственными плотностями n_i, массами частиц m_i и зарядами e_i. Кроме того, имеется фон с плотностью пространственного заряда обратного знака

$$d = -\sum_i n_i e_i.$$

Рассматриваем в линейном приближении распространение волны, считая, что ось z направлена вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$. Все локальные характеристики возмущения будут содержать множитель $\exp(\lambda t + ikz)$ (t — время, λ — инкремент).

Если бы не было возмущения, каждая частица двигалась бы по инерции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{V}_i t, \tag{4}$$

где вектор $\mathbf{r}_{0i}(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i})$ отмечает некоторое начальное положение частицы.

Фактически надо учитывать малое возмущение в виде электрического $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$. Закон эволюции вектора скорости отдельной частицы раскрывается, если написать сначала известное уравнение эволюции импульса

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = e_i\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_i \times \mathbf{H}}{c}\right) \tag{5}$$

и учесть алгебраические связи между скоростью и импульсом

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}},$$

$$\sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

Согласно сказанному выше, в выражении для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно сразу отделить зависимость от координаты и времени

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} e^{\lambda t + ikz}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{h} e^{\lambda t + ikz}.$$

Линеаризация (5) дает

$$\frac{d\delta\mathbf{p}_i}{dt} = e_i\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{V}_i \times \mathbf{h}}{c}\right) e^{\lambda t + ikz}, \tag{7}$$

причем символ δ в (7), как и далее, означает возмущение данной величины.

В правой части (7) координата z относится, однако, к положению частицы в данный момент, т.е. должна раскрываться согласно (4), а поправка за возмущение в самих выражениях (4) давала бы уже эффект второго порядка малости. С учетом этих замечаний интегрирование (7) от некоторого удаленного в прошлом момента дает

$$\delta\mathbf{p}_i = e_i\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{V}_i \times \mathbf{h}}{c}\right) \int_{-\infty}^{t} e^{ik(z_{0i} + w_i t) + \lambda t} dt$$

$$= e_i\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{V}_i \times \mathbf{h}}{c}\right) \frac{e^{\lambda t + ikz}}{\lambda + ikw_i}. \tag{8}$$

В правой части (8) мы вернулись к выражению искомой величины через то значение z-координаты, которое частицы имела бы в отсутствие возмущения. При этом подразумевается $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, поскольку мы интересуемся только неустойчивыми возмущениями. Переход к возмущению скорости, согласно (6), дает

$$\delta\mathbf{V}_i = \frac{e_i\sqrt{1 - \frac{V_i^2}{c^2}}}{m_i(\lambda + ikw_i)} e^{\lambda t + ikz}\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{V}_i \times \mathbf{h}}{c} - \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{V}_i}{c^2}\right] \tag{9}$$

и после еще одного интегрирования по t, когда временно раскрывается z, согласно (4), получаем

$$\delta\mathbf{r}_i = \frac{e_i\sqrt{1 - \frac{V_i^2}{c^2}}}{m_i(\lambda + ikw_i)^2} e^{\lambda t + ikz}\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{V}_i \times \mathbf{h}}{c} - \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{V}_i}{c^2}\right]. \tag{10}$$

Полный ток в каждой точке мы должны искать в форме

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}\, e^{\lambda t + ikz},$$

тогда и обратно

$$\mathbf{j} = \frac{ke^{-\lambda t}}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \mathbf{J}\, e^{-ikz} dz.$$

Ток $\mathbf{J}$ состоит из вкладов $e_i n_i \mathbf{V}_i$ от каждой частицы данного потока, просуммированных еще по индексу i. При разложении $e_i n_i \mathbf{V}_i \exp(-ikz)$ члены нулевого приближения должны в сумме уничтожаться: в невозмущенном состоянии никаких токов нет. Остается

$$\delta\mathbf{j} = \mathbf{j} = \frac{ke^{-\lambda t}}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} e_i \int_0^{2\pi/k} (\delta\mathbf{V}_i - ik\mathbf{V}_i \delta z) e^{-ikz}\, dz$$

или

$$\delta\mathbf{j} = \sum_{i=1}^{N} n_i \frac{e_i^2}{m_i}\left\{\left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{V}_i\times\mathbf{h}}{c} - \frac{(\mathbf{V}_i\cdot\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{V}_i}{c^2}\right]L - ik\mathbf{V}_i\left[\varepsilon_z + \frac{(\mathbf{V}_i\times\mathbf{h})_z}{c} - \frac{w_i(\mathbf{V}_i\cdot\boldsymbol{\varepsilon})}{c^2}\right]L^2\right\} \times\sqrt{1-\frac{V_i^2}{c^2}} \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0). \tag{11}$$

Данный вывод имеет некоторые преимущества наглядности: непосредственно видно происхождение множителя $L = 1/(\lambda + ikw)$. Получить искомый ток можно и путем линеаризации гидродинамических уравнений для каждого потока. Это, как и следовало ожидать, приводит в точности к той же вышенаписанной формуле (11) для $\delta\mathbf{j}$. Заметим, что если считать k и λ величинами одного порядка малости, то возникающий ток обратно пропорционален k.

Формула (11) должна комбинироваться с уравнениями Максвелла, но в данном случае $H_z = 0$, и если использовать обозначения с волновым вектором $\mathbf{k}(0, 0, k)$, то

$$\frac{\lambda}{c}\,\mathbf{h} = i(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{k}), \quad \frac{\lambda}{c}\,\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{4\pi}{c}\,\delta\mathbf{j} + i(\mathbf{h}\times\mathbf{k}) = 0. \tag{12}$$

В соответствии с намеченной программой рассмотрим предельный случай длинных волн $k \to 0$. Пусть k и λ — величины одного порядка малости. Возникающий ток, вообще говоря, обратно пропорционален k и для соблюдения уравнений (12) соотношение между k и λ должно подбираться таким, чтобы правая часть (11) после подстановки $\mathbf{h}$ из первого уравнения (12), а именно

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i e_i^2}{m_i}\left[\frac{\mathbf{R}_i}{\lambda + i\mathbf{k}\mathbf{V}_i} - i\mathbf{V}_i\,\frac{k\mathbf{R}_i}{(\lambda + i\mathbf{k}\mathbf{V}_i)^2}\right], \tag{13}$$

где

$$\mathbf{R}_i = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{i}{\lambda}\big(\mathbf{V}_i\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{k})\big) - \frac{(\mathbf{V}_i\cdot\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{V}_i}{c^2},$$

представила бы собой нулевой вектор (с точностью до относительно малых поправок).

Как уже было упомянуто, на данном этапе мы пренебрежем специфической релятивистской поправкой, т.е. последними членами в выражении $\mathbf{R}_i$. Ограничимся некоторым специальным классом распределений по скоростям, а именно предполагаем все частицы однотипными, кроме того, 1) вращательную симметрию $f(u, v, w) = \tilde{f}(\rho, w)$ $(\rho = \sqrt{u^2+v^2})$ и 2) экваториальную плоскость симметрии $f(u, v, -w) = f(u, v, w)$.

В указанной конкретной постановке оказывается предпочтительнее отождествить ось z с осью симметрии диаграммы скоростей, тогда волновой вектор $\mathbf{k}$ будет стоять наклонно. Плоскость, проходящую через ось симметрии и волновой вектор, можно без ограничения общности считать плоскостью Oxz. Соответственно имеем компоненты волнового вектора $(k\sin\sigma, 0, k\cos\sigma)$, где σ — угол между волновым вектором и осью симметрии. В формуле (13) мы переходим от сумм к интегралам (для частиц одного сорта) и расписываем эти уравнения по компонентам. При этом в y-компоненте остаются только члены с ε_y и его сокращение дает

$$\iiint\left\{1 - \frac{k^2v^2}{\big[\lambda + ik(u\sin\sigma + w\cos\sigma)\big]^2}\right\} f\,du\,dv\,dw = 0 \qquad (\varepsilon_y \neq 0). \tag{14}$$

Для ε_x и ε_z получается система двух взаимно зацепленных уравнений

$$A\varepsilon_x + B\varepsilon_z = 0, \quad B\varepsilon_x + C\varepsilon_z = 0, \tag{15}$$

где

$$A = \iiint\left\{\frac{\lambda + ik(w\cos\sigma - u\sin\sigma)}{\lambda + ik(u\sin\sigma + w\cos\sigma)} - \frac{k^2u^2}{\big[\lambda + ik(u\sin\sigma + w\cos\sigma)\big]^2}\right\} f\,du\,dv\,dw,$$

$$B = -\iiint\left\{\frac{ik(w\sin\sigma + u\cos\sigma)}{\lambda + ik(u\sin\sigma + w\cos\sigma)} + \frac{k^2uw}{\big[\lambda + ik(u\sin\sigma + w\cos\sigma)\big]^2}\right\} f\,du\,dv\,dw,$$

$$C = \iiint\left\{\frac{\lambda + ik(u\sin\sigma - w\cos\sigma)}{\lambda + ik(u\sin\sigma + w\cos\sigma)} - \frac{k^2w^2}{\big[\lambda + ik(w\cos\sigma + u\sin\sigma)\big]^2}\right\} f\,du\,dv\,dw.$$

Анализ основных уравнений

Заметим, что, согласно нашим условиям 1 и 2, одновременное изменение знака у u, v, w не затрагивает величины f. Но оно превращает значения A, B, C в комплексно-сопряженные, т. е. эти величины вещественны при вещественном λ. При $\lambda \to \infty$ левая часть (14) стремится к пределу

$$\iiint f\,du\,dv\,dw = \nu > 0$$

(ν — пространственная плотность населения частиц данного сорта). Аналогично в том же пределе $A = C = \nu$, $AC - B^2 = \nu^2 > 0$. По непрерывности уравнение (14) и уравнение $AC - B^2 = 0$ обязательно имеют корни $\lambda > 0$, свидетельствующие о неустойчивости, если соответственно или левая часть (14), или выражение $AC - B^2$

при малом λ отрицательны. Этим даются достаточные признаки неустойчивости плазмы. Их более точное раскрытие начнем с (14). Для некоторой наглядности сперва рассмотрим класс распределений, сосредоточенных на единичной сфере. В силу наших условий симметрии поверхностная плотность F на этой сфере, разложенная по сферическим функциям, представляется в виде

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \qquad (16)$$

(сумма только по четным n). В формуле (16) и далее используются обычные координаты на сфере: θ — угол от оси w, μ — азимут в экваториальной плоскости (u, v). Удобно повернуть систему координат так, чтобы новыми компонентами скорости стали

$$u_1 = u\cos\sigma - w\sin\sigma, \qquad v_1 = v,$$

$$w_1 = u\sin\sigma + w\cos\sigma. \qquad (17)$$

Применение преобразования (17) к (16) сводится к использованию известной теоремы сложения сферических функций. В результате левая часть (14) приобретает вид

$$M = \iint \left[1 - \frac{k^2\sin^2\theta_1\sin^2\mu_1}{(\lambda + ik\cos\theta_1)^2}\right] \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Bigg[P_n(\cos\theta_1)P_n(\cos\sigma) + 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!}P_n^{(\nu)}(\cos\theta_1) \times P_n^{(\nu)}(\cos\sigma)\cos\nu\mu_1\Bigg]\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\mu_1, \qquad (18)$$

где θ_1, μ_1 — опять координаты на сфере, но связанные уже с новой полярной осью w_1, а $P_n^{(\nu)}$ — обычное обозначение присоединенной функции Лежандра.

Интегрирование по μ_1 в правой части (18) элементарно, в результате остаются только члены $\nu = 0$ и $\nu = 2$:

$$M = \pi\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Bigg\{P_n(\cos\sigma) \times \int_0^{\pi}\left[2 - \frac{k^2\sin^2\theta}{(\lambda + ik\cos\theta)^2}\right]P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta + \frac{\sin^2\sigma P_n''(\cos\sigma)}{(n+2)(n+1)n(n-1)} \times \int_0^{\pi}\frac{k^2\sin^5\theta}{(\lambda + ik\cos\theta)^2}P_n''(\cos\theta)\,d\theta\Bigg\}. \qquad (19)$$

Нас интересует предел выражения (19) при $\lambda \to 0$. Интегрирование по частям прежде всего дает

$$I_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta P_n(\cos\theta)}{(\lambda + ik\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{i}{k}\left(\frac{1}{\lambda + ik} - \frac{1}{\lambda - ik}\right) - \frac{i}{k}\int_{-1}^{1}\frac{P_n'(t)}{\lambda + ikt}\,dt$$

и в пределе $\lambda = 0$

$$I_n = \frac{2}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n'(t)}{t}\,dt.$$

Используя рекуррентную формулу [10, с. 180, формула (13)], находим

$$\int_0^1\frac{P_n'(t)}{t} = 1 - (n+1)\int_0^1\frac{P_{n+1}(t)}{t}\,dt = 1 - \frac{1}{P_n(0)}$$

(мы все время считаем n четным). Следовательно,

$$I_n = \frac{2}{k^2P_n(0)} \qquad (\lambda = 0).$$

Другие сходные интегралы, встречающиеся в правой части (19), сводятся к указанному

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta P_n(\cos\theta)}{(\lambda + ik\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{4}{k^2} \quad (n = 0); \qquad \frac{2}{k^2P_n(0)} \quad (n \geq 2)$$

при $\lambda \to 0$. Далее,

$$K_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta}{(\lambda + ik\cos\theta)^2}P_n''(\cos\theta)\,d\theta = \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)\left[2tP_n'(t) - n(n+1)P_n(t)\right]}{(\lambda + ikt)^2}\,dt,$$

и остается найти вспомогательный интеграл (интегрированием по частям)

$$\int_{-1}^{1}\frac{t(1-t^2)P_n'(t)}{(\lambda + ikt)^2}\,dt = \frac{2}{k^2P_n(0)},$$

так что

$$K_n = -\frac{2(n+2)(n-1)}{k^2P_n(0)} \qquad (n \geq 2).$$

Итого,

$$M = -2\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{P_n(0)}\left[P_n(\cos\theta) + \frac{\sin^2\sigma P_n''(\cos\sigma)}{n(n+1)}\right] = -4\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{P_n(0)}(\cos\sigma)P_n'(\cos\sigma). \qquad (20)$$

Достаточный признак отрицательности M получаем, взяв от правой части (20) интеграл с весовым множителем $\sin^2\sigma$. Тогда

$$\int_0^\pi \sin^3\sigma\cos\sigma P_n'(\cos\sigma)\,d\sigma = \frac{4}{5} \quad (n=2);0 \quad (n\geq 4)$$

и

$$\int_0^\pi \sin^3\sigma\cos\sigma\cdot M(\sigma)\,d\sigma = \frac{32\pi}{5}c_2. \tag{21}$$

При $c_2<0$ в силу формулы (21) функция $M(\sigma)$ не может быть всюду положительной. Найдется такое σ, для которого $M(\sigma)<0$, а это означает неустойчивость. Итак, достаточным признаком неустойчивости является отрицательность соответствующего коэффициента разложения фазовой плотности по сферическим функциям

$$\int_0^\pi F\cdot P_2(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta<0. \tag{22}$$

Перейдем теперь к выражению $AC-B^2$. Легко проверяется (в сущности это тоже проявление поворота системы координат), что

$$AC-B^2=A_1C_1-B_1^2, \tag{23}$$

где

$$A_1=A\cos^2\sigma-2B\sin\sigma\cos\sigma+C\sin^2\sigma,$$
$$B_1=(A-C)\sin\sigma\cos\sigma+B(\cos^2\sigma-\sin^2\sigma),$$
$$C_1=A\sin^2\sigma+2B\sin\sigma\cos\sigma+C\cos^2\sigma; \tag{24}$$

из явных выражений для A, B, C получаются сначала в том же предположении об ограничении распределения скоростей единичной сферой. В частности,

$$A_1=\iint\left[1-\frac{k^2u_1^2}{(\lambda+ikw_1)^2}\right]F\sin\theta\,d\theta\,d\mu.$$

После раскрытия u_1, w_1 и F получаем выражение, отличающееся от (18) только заменой $\sin^2\mu_1$ на $\cos^2\mu_1$, а затем в правой части (19) надо просто изменить знак последнего члена. Таким образом,

$$A_1=2\pi\sum_{n=2}^\infty\frac{c_n}{P_n(0)}\left[\frac{\sin^2\sigma P_n''(\cos\sigma)}{n(n+1)}-P_n(\cos\sigma)\right]$$
$$=4\pi\sum_{n=2}^\infty\frac{c_n}{(2n+1)P_n(0)}\left(\frac{n+1}{n}P_{n-1}'(\cos\sigma)\right.$$
$$\left.-\frac{n}{n+1}P_{n+1}'(\cos\sigma)\right) \quad (\lambda=0). \tag{25}$$

Для C_1 получаем выражение

$$C_1=\lambda^2\iint\frac{F\sin\theta}{(\lambda+ikw_1)^2}\,d\theta\,d\mu=\frac{4\pi\lambda^2}{k^2}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_nP_n(\cos\sigma)}{P_n(0)} \tag{26}$$

с точностью до членов порядка λ^3 и выше. Наконец,

$$B_1=-ik\lambda\iint\frac{u_1F\sin\theta}{(\lambda+ikw_1)^2}\,d\theta\,d\mu$$
$$=-2\pi ik\lambda\sum_{n=2}^\infty\frac{c_n}{n(n+1)}\sin\sigma\cdot P_n'(\cos\sigma)$$
$$\times\int\frac{\sin^3\theta P_n'(\cos\theta)}{(\lambda+ik\cos\theta)^2}\,d\theta.$$

Вспомогательный интеграл можно вычислить интегрированием по частям при $\tau=i\lambda/k$

$$\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)P_n'(t)}{(t-\tau)^2}\,dt=-n(n+1)\pi iP_n(0) \quad (\lambda=0).$$

Таким образом,

$$B_1=2\pi^2\frac{\lambda}{k}\sum_{n=2}^\infty c_nP_n(0)\sin\sigma P_n'(\cos\sigma). \tag{27}$$

Найденных выше выражений (25)–(27) достаточно для определения главного члена $A_1C_1-B_1^2$, пропорционального λ^2. Заметим, что B_1 выписано нами только для полноты, фактически его выражение не нужно ниже.

Оценим среднее значение произведения A_1C_1 с весовой функцией $\sin^3\sigma$. На основании формул (25), (26) и рекуррентной формулы $(2n+1)P_n(x)=P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)$ имеем

$$\int_0^\pi\sin^3\sigma A_1C_1d\sigma$$
$$=\int_{-1}^1(1-x^2)\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\alpha_n\alpha_m\big(P_{m+1}'(x)-P_{m-1}'(x)\big)$$
$$\times\left(\frac{n+1}{n}P_{n-1}'(x)-\frac{n}{n-1}P_{n+1}'(x)\right)dx,$$

где

$$\alpha_n=\frac{c_n}{(2n+1)P_n(0)},$$

и тогда применение свойства ортогональности для присоединенных функций Лежандра дает

$$\int_0^\pi\sin^3\sigma\cdot A_1C_1d\sigma=-\sum_{n=2}^\infty\frac{2(2n+1)(2n^2+2n-3)}{(2n+3)(2n-1)}\alpha_n^2$$
$$+\sum_{n=2}^\infty\frac{2n(n+2)}{2n+5}\alpha_n\alpha_{n+2}+\sum_{n=0}^\infty\frac{2(n+1)(n+3)}{2n+3}\alpha_n\alpha_{n+2}. \tag{28}$$

Для нахождения оценки с нужной стороны применяем ко всем смешанным произведениям $\alpha_n\alpha_{n+2}$ с $n \geq 2$ элементарное неравенство $2\alpha_n\alpha_{n+2} \leq \alpha_n^2 + \alpha_{n+2}^2$. Получается

$$\int_0^\pi \sin^3\sigma \cdot A_1C_1 d\sigma$$
$$\leq -4\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^2\left(4n^2+8n-9-\frac{16}{n}\right)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\alpha_n^2$$
$$-\frac{79}{63}\alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_2. \qquad (29)$$

У нас всегда $c_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$. Если $\alpha_2 < 0$, $c_2 > 0$, то правая часть (29) отрицательна и прежнее рассуждение показывает, что при каком-то σ должно быть $A_1C_1 < 0$, тем более $A_1C_1 - B_1^2 < 0$, т.е. достаточным признаком неустойчивости является неравенство, противоположное (22). Соответственно необходимым признаком устойчивости в целом является равенство

$$\int_0^\pi F \cdot P_2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = 0. \qquad (30)$$

Некоторые общие замечания

До сих пор мы использовали в качестве примера распределения, сосредоточенные на сфере. Надо теперь установить, в какой степени результаты переносятся на общие распределения.

При $\lambda = 0$ от частицы с вектором скорости $(\xi u, \xi v, \xi w)$ вклад в левую часть (14) получается тот же, что от частицы со скоростями u, v, w, поскольку предельные переходы $\lambda \to 0$ и $\lambda/\xi \to 0$ эквивалентны. Поэтому обобщение условия неустойчивости (22) можно написать сразу:

$$\int_0^\infty \int_0^\pi f(V,\theta) \cdot P_2(\cos\theta) \cdot V^2 \sin\theta\, d\theta\, dV < 0. \qquad (31)$$

Несколько сложнее обстоит дело с разложениями A, B, C по степеням λ. При замене u, v, w на $(\xi u, \xi v, \xi w)$ происходит соответственно превращение $A(\lambda) \to A(\lambda/\xi)$ (и то же с B и C), так что разложение в ряд

$$A = A^{(0)} + \lambda A^{(1)} + \lambda^2 A^{(2)} + \ldots$$

превращается в

$$A^{(0)} + \lambda\frac{A^{(1)}}{\xi} + \lambda^2\frac{A^{(2)}}{\xi^2} + \ldots.$$

Поэтому в формулах (25)–(27) выражения коэффициентов c_n будут различаться в зависимости от того, при каких степенях λ они стоят. В формулах (20) и (25), согласно уже сказанному,

$$c_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\infty \int_0^\pi f(V,\theta) \cdot P_n(\cos\theta) \cdot V^2 \sin\theta\, d\theta\, dV. \qquad (32)$$

Но в C_1 имеется множитель λ^2, поэтому вместо c_n надо использовать несколько другие коэффициенты:

$$\bar{c}_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\infty \int_0^\pi f(V,\theta) \cdot P_n(\cos\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta\, dV. \qquad (33)$$

Наконец, в B_1 содержится множитель λ, так что в правой части (27) используются коэффициенты

$$\hat{c}_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\infty \int_0^\pi f(V,\theta) \cdot P_n(\cos\theta) \cdot V \sin\theta\, d\theta\, dV. \qquad (34)$$

Признак неустойчивости, дополнительный к (31), в некоторых случаях удается построить достаточно просто.

1) Распределения с независимостью угловых переменных от V, т.е.

$$f(V,\theta) = f_1(V) f_2(\theta). \qquad (35)$$

Подстановка (35) в (32)–(34) приводит во всех трех случаях к интегралам

$$\int_0^\pi f_2(\theta) \cdot P_n(\cos\theta)\sin\theta \cdot d\theta; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (36)$$

с различными коэффициентами, не зависящими от n. Следовательно, в сравнении с анализом для единичной сферы в A_1 и C_1 войдут только эти постоянные коэффициенты, очевидно не меняющие дела. Для устойчивости необходимо соблюдение равенства, совершенно аналогичного (30), а именно обращения (36) в нуль при $n = 2$, или в терминах исходной функции f

$$\int_0^\infty \int_0^\pi f(V,\theta) \cdot P_2(\cos\theta)\sin\theta \cdot d\theta = 0. \qquad (37)$$

2) Распределения с отсутствующими высшими гармониками, точнее

$$f(V,\theta) = \varphi_0(V) + P_2(\cos\theta) \cdot \varphi_2(V).$$

Тогда, естественно, $c_n = \bar{c}_n = \hat{c}_n$ при $n \geq 4$. В (25) и (26) остаются только первые члены

$$A_1 = \frac{4\pi c_2}{5}\cos 2\sigma, \quad C_1 = \frac{4\pi\lambda^2}{k^2}\left[\bar{c}_0 - 2\bar{c}_2 P_2(\cos\sigma)\right].$$

Выражение A_1C_1 принимает при некоторых σ отрицательные значения, кроме двух случаев: а) $c_2 = 0$, б) $\bar{c}_2 = 2\bar{c}_0$, $c_2 < 0$.

В случае б заведомо имеет место неустойчивость по признаку (31), поскольку левая часть (31) с точностью до положительного коэффициента совпадает с c_2. Устойчивость возможна только в случае а, $c_2 = 0$, что совпадает с (37). Кроме того, даже при $c_2 = 0$ результат вычисления $A_1C_1 - B_1^2$ будет отрицательным, если $\hat{c}_2 \neq 0$. Итак, необходимыми условиями устойчивости в рассматриваемом случае 2 являются $c_2 = \hat{c}_2 = 0$, или

$$\int_0^\infty V^2\varphi_2(V)\,dV = \int_0^\infty V\varphi_2(V)\,dV = 0. \tag{38}$$

3) Почти сферические распределения

$$f(V,\theta) = \varphi_0(V) + \kappa\psi(V,\theta)$$

при $\kappa \to 0$. Все c_n, $\bar{c}_n$, $\hat{c}_n$ с $n \geq 2$ будут пропорциональны κ. В $A_1C_1 - B_1^2$ при $\kappa \to 0$ старшим членом оказывается

$$\frac{4\pi c_2}{5}\cos 2\sigma\,\frac{4\pi\lambda^2}{k^2}\,c_0$$

первого порядка по κ. Он оказывается знакопеременным при $c_2 \neq 0$ и тождественным нулем при $c_2 = 0$. Как и в предыдущем случае, заключаем, что равенства (38) — это необходимые условия устойчивости в некоторой области $0 < \kappa < \kappa_0$.

В итоге требование отсутствия электромагнитной неустойчивости очень сильно ограничивает класс допустимых распределений. При некоторых дополнительных предположениях, как мы только что видели, для устойчивости должно выполняться условие типа равенства (что несколько необычно в подобных задачах), а именно должна отсутствовать так или иначе определенная вторая зональная гармоника. В этом отношении электромагнитная неустойчивость сильнее электростатической, поскольку последняя проявляет себя уже при значительном отклонении распределения от сферической симметрии: в виде обособления двух пучков и т. д.

Заметим, что полная устойчивость сферически симметричного распределения (с $\partial f/\partial V < 0$) была заранее ясна из энергетических соображений: любое возмущение, согласно теореме Лиувилля, в этом случае увеличивает кинетическую энергию системы [11].

Сходные результаты были получены в ряде работ других авторов. Наиболее близок к нашим результат [12] для эллипсоидального распределения скоростей. Дисперсионное уравнение и выводы о неустойчивости совпадают, но модель [12] носит более частный характер (отдельное сфероидальное распределение). В [13] рассмотрена несколько иная модель: суперпозиция двух гауссовых распределений, также показывающая неустойчивость при достаточной общей анизотропии скоростей. В указанных работах речь идет о технических приложениях, поведение плазмы в связи с задачами астрофизики изучалось мало. Имея это в виду, мы в недавней работе [14] рассмотрели противоположный по отношению к настоящему исследованию ультрарелятивистский случай. Конкретно там использовалась модель с трехосным эллипсоидальным распределением скоростей, которая опять-таки оказалась неустойчивой, за естественным исключением сферического распределения скоростей.

Используемое приближение для электромагнитной неустойчивости работает только для достаточно длинных волн. Оценить критическую длину можно уже из соображений размерности, которые видны полностью даже в простом примере (1), а именно мы фактически предполагаем

$$k \ll \frac{\omega_p}{c}, \tag{39}$$

где ω_p определяется формулой (2). Например, при более или менее характерных для межзвездной среды значениях $n_e = 0.1\,\mathrm{cm}^{-3}$ [15] получаем критическую длину согласно формуле (39) $\lambda^* \sim 2\pi/k \sim 100\,\mathrm{km}$, так что любые характерные длины в условиях межзвездного пространства заведомо много больше λ^* и наше приближение работает. Инкремент же, согласно (3), — порядка времени пересечения волны типичной частицей, т. е. неустойчивость развивается в определенных астрофизических ситуациях, например на длинах $10^{-4}\,\mathrm{pC}$ и менее, достаточно быстро (за время порядка полмесяца).

Заметим, что скорости частиц у нас все время предполагались нерелятивистскими. В многокомпонентных системах со скоростями частиц разного порядка могут развиваться некоторые дополнительные явления, в частности из-за ощутимого иногда переноса заряда в системе космических лучей [16].

Подчеркнем еще раз, что электромагнитная неустойчивость накладывает сильные ограничения на возможность выбора анизотропных моделей распределения скоростей в межзвездной среде.

Автор искренне признателен В.А. Антонову за постоянный интерес и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Каплан С.А., Пикельнер С.Б.* Межзвездная среда. М.: Физматгиз, 1963. 531 с.

[2] *Spitzer L., Jr.* // Annual Rev. Astron. Astrophys. 1990. Vol. 28. P. 71–101.

[3] *Heinz S., Sunyaev R.* // Astron. and Astrophys. 2002. Vol. 390. P. 751–766.

[4] Электродинамика плазмы / Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 719 с.

[5] *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. М.: Атомиздат, 1975. 272 с.

[6] *Weibel E.S.* // Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 2. P. 83–84.

[7] *Лютый В.М.* // Астрофизика и космическая физика / Под ред. Р.А. Сюняева. М.: Наука, 1982. С. 66–87.

[8] *Дибай Э.А.* // Активные ядра и звездная космогония / Под ред. Д.А. Мартынова. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 6–33.

[9] *Иванов А.А.* Физика сильно неравновесной плазмы. М.: Атомиздат. 1977. 352 с.

[10] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
[11] *Дэвидсон Р.* // Основы физики плазмы / Под ред. А.А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 443–502.
[12] *Sudan R.N.* // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 153–160.
[13] *Михайловский А.Б.* // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1972. Вып. 6. С. 70–138.
[14] *Баранов А.С.* // Физика плазмы. 2003. Т. 29. С. 956–960.
[15] *Мартынов Д.Я.* Курс общей астрофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
[16] *Антонов В.А., Баранов А.С.* // Астрон. журн. 2002. Т. 79. С. 387–391.