01;07

Ковариантные дисперсионные уравнения и тензорные эволюционные операторы для оптических волноводов

© А.В. Новицкий, Л.М. Барковский

Белорусский государственный университет,
220080 Минск, Белоруссия
e-mail: Barkovsky@bsu.by

(Поступило в Редакцию 30 декабря 2003 г.)

Операторный подход применен к решению уравнений Максвелла для последовательности круглых слоев, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости которых зависят от радиальной координаты. Это позволяет известный метод стратификации обобщить на цилиндрические структуры. Выводятся операторные дисперсионные уравнения для градиентных и многослойных ступенчатых изотропных круглых волокон. Получены численные решения дисперсионного уравнения для многослойного волновода, диэлектрическая проницаемость слоев которого имеет периодическую повторяемость.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется влиянию поляризационных эффектов на работу оптических волоконных коммуникационных систем. Наиболее важными поляризационными эффектами являются поляризационно-модовая дисперсия, которая вызвана быстрым и случайно изменяющимся двулучепреломлением в оптическом волокне, и поляризационно зависимые потери. Поляризационно-модовая дисперсия является причиной случайного изменения поляризационного состояния света, а это сильно влияет на характеристики сигнала на выходе оптического волокна [1,2]. В ряде работ по волоконной оптике интенсивно обсуждаются свойства волоконных оптических гироскопов [3,4] и лазеров [5,6]. В [4] исследуется волоконный гироскоп на основе кольцевого интерферометра с контуром из световода с сильным линейным двулучепреломлением. Такие гироскопы обладают высокой чувствительностью и могут использоваться в навигации. В [6] теоретически рассматривается два различных режима генерации кольцевого двунаправленного волоконного лазера с фарадеевским вращателем. Представляет интерес разработка методов измерения показателя преломления жидкости по величине потерь света в изогнутом цилиндрическом световоде [7].

Операторые методы интенсивно развиваются в последнее время в оптике сложных сред. Тензоры отражения и пропускания света [8,9], тензорный показатель преломления [10] и оператор скоростей электромагнитных волн [11] обобщают соответствующие скалярные величины с учетом векторной природы света (спина фотона [12]). Такие операторы описывают суперпозицию собственных волн, распространяющихся с определенными скоростями и поляризациями. В рамках ковариантного формализма, разработанного Ф.И. Федоровым [13,14], уравнения Максвелла и дисперсионные уравнения записываются в компактной форме, удобной для аналитических и численных расчетов слоистых бианизотропных структур. При этом важную роль играют эволюционный оператор и тензор импеданса. В [15] эти величины применяются к решению задач волноводного распространения, отражения и пропускания света. Из математической структуры векторных уравнений поля следует, что эволюционный оператор является блочной матрицей. Для планарных волноводов получаются операторные дисперсионные уравнения [9], которые включают в себя тензоры импеданса оболочек волновода и эволюционный оператор сердцевины. Известно обобщение матрицы импеданса на случай сферически-слоистых анизотропных сред, которые моделируют ионосферу Земли [16].

В настоящей работе мы применяем операторный метод для определения мод в круглых волокнах. Электромагнитное поле описывается с помощью систем дифференциальных уравнений первого порядка. Класс сред, для которых применимы эти системы уравнений, ограничен тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости с радиальной неоднородностью. Такой метод давно используется при анализе планарных волноводов [17] и сводится к многослойной ступенчатой аппроксимации (этот подход называют также методом стратификации [18]). В [9] он был обобщен на случай неоднородных бианизотропных слоев волновода. Предложенный метод для получения дисперсионных уравнений демонстрируется на примере изотропного круглого волновода. Исследуются дисперсионные уравнения для многослойных ступенчатых и градиентных волноводов.

Эволюционные решения для круглых цилиндрических волноводов

Рассмотрим распространение электромагнитных волн с гармонической зависимостью напряженностей полей $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ от времени. В цилиндрической системе координат (r,φ,y) уравнения Максвелла имеют вид

$$\left(\mathbf{b}^{\times}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_r^{\times}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_{\varphi}^{\times}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathbf{H}(\mathbf{r})=-ik\varepsilon(r)\mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

$$\left(\mathbf{b}^{\times}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_r^{\times}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_{\varphi}^{\times}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r})=ik\mu(r)\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_r(\varphi)$, $\mathbf{e}_{\varphi}(\varphi)$, $\mathbf{b}$ — базисные векторы, направленные по радиусу, по касательной к окружности и по образующей цилиндра; $k=\omega/c$ — волновое число в вакууме; ω — частота волны; $\mathbf{b}^{\times}$ — тензор, дуальный вектору $\mathbf{b}$ $((\mathbf{b}^{\times})_{ik}=\varepsilon_{ijk}b_j)$ [10,14].

В (1) мы полагаем, что тензоры диэлектрической $\varepsilon(r)$ и магнитной $\mu(r)$ проницаемости зависят лишь от радиальной координаты r. Это возможно для тех ε и μ, которые составлены из тензоров, не зависящих от аксиальной координаты φ: единичного тензора $\mathbf{1}$, диады $\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$ и дуального тензора $\mathbf{b}^{\times}$. Таким образом, мы выделяем следующие виды тензоров диэлектрической (аналогично магнитной) проницаемости: 1) $\varepsilon=\varepsilon(r)\mathbf{1}$, изотропная среда; 2) $\varepsilon=\varepsilon_1(r)(\mathbf{1}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{b})+\varepsilon_2(r)\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$, одноосный кристалл, оптическая ось которого направлена вдоль вектора $\mathbf{b}$; 3) $\varepsilon=\varepsilon_1(r)\mathbf{1}+\chi(r)\mathbf{b}^{\times}$, гиротропная среда; 4) $\varepsilon=\varepsilon_1(r)(\mathbf{1}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{b})+\varepsilon_2(r)\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}+\chi(r)\mathbf{b}^{\times}$.

Принимая во внимание инвариантность напряженностей полей относительно координат y и φ, производим разделение переменных

$$\begin{pmatrix}\mathbf{H}(\mathbf{r})\\ \mathbf{E}(\mathbf{r})\end{pmatrix}=\exp(i\beta y+i\nu\varphi)\begin{pmatrix}\mathbf{H}(r,\varphi)\\ \mathbf{E}(r,\varphi)\end{pmatrix},$$

где β — продольное волновое число (постоянная распространения моды), ν — целое число.

Учитывая, что компоненты H_y, H_{φ}, H_r вектора $\mathbf{H}(r,\varphi)$ и аналогично компоненты поля $\mathbf{E}(r,\varphi)$ не зависят от угла φ, т.е. можно записать $\mathbf{H}(r,\varphi)=H_y(r)\mathbf{b}+$ $+H_{\varphi}(r)\mathbf{e}_{\varphi}(\varphi)+H_r(r)\mathbf{e}_r(\varphi)$, уравнения (1) принимают вид

$$\mathbf{e}_r^{\times}\frac{d\mathbf{H}}{dr}+\left(i\beta\mathbf{b}^{\times}+\frac{i\nu}{r}\mathbf{e}_{\varphi}^{\times}+\frac{1}{r}\mathbf{b}\otimes\mathbf{e}_{\varphi}\right)\mathbf{H}=-ik\varepsilon(r)\mathbf{E},$$

$$\mathbf{e}_r^{\times}\frac{d\mathbf{E}}{dr}+\left(i\beta\mathbf{b}^{\times}+\frac{i\nu}{r}\mathbf{e}_{\varphi}^{\times}+\frac{1}{r}\mathbf{b}\otimes\mathbf{e}_{\varphi}\right)\mathbf{E}=ik\mu(r)\mathbf{H}. \quad (2)$$

Таким образом, уравнения Максвелла мы свели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно r для векторных функций $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$. Координата φ входит в векторы $\mathbf{e}_{\varphi}$ и $\mathbf{e}_r$, которые определяют поляризацию электромагнитных волн. Видим, что независимость компонент напряженностей полей от угла φ выполняется. Система уравнений (2) соответствует четырем обыкновенным дифференциальным уравнениям и двум алгебраическим уравнениям. Алгебраические уравнения позволяют исключить две из шести компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Удобно оставить составляющие напряженностей полей, лежащие в плоскости, касательной к поверхности круглого цилиндра (мы будем называть их тангенциальными составляющими). Эти компоненты непрерывны на круглой цилиндрической границе раздела двух сред. Итак, тангенциальные составляющие напряженностей полей запишем в виде $\mathbf{E}_t=I\mathbf{E}$, $\mathbf{H}_t=I\mathbf{H}$, где $I=\mathbf{1}-\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r=-\mathbf{e}_r^{\times 2}$ — проекционный оператор на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{e}_r$. Вводя вектор $\mathbf{u}=(\beta/k)\mathbf{e}_{\varphi}-\nu/(kr)\mathbf{b}$ и учитывая соотношения $\mathbf{uH}=\mathbf{e}_r\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{uE}=-\mathbf{e}_r\mu\mathbf{H}$, которые следуют из (2), мы получаем связь между полными и тангенциальными составляющими напряженностей полей [8]

$$\begin{pmatrix}\mathbf{H}(r)\\ \mathbf{E}(r)\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(r)\\ \mathbf{E}_t(r)\end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r\mu/\mu_r & -\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{u}/\mu_r\\ \mathbf{e}_r\otimes\mathbf{u}/\varepsilon_r & \mathbf{1}-\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r\varepsilon/\varepsilon_r\end{pmatrix}, \quad (3)$$

где V — матрица восстановления, $\varepsilon_r=\mathbf{e}_r\varepsilon\mathbf{e}_r$, $\mu_r=\mathbf{e}_r\mu\mathbf{e}_r$.

Используя (3), из (2) выводим систему уравнений для $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(r)\\ \mathbf{E}_t(r)\end{pmatrix}=ikM(r)\begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(r)\\ \mathbf{E}_t(r)\end{pmatrix}, \quad M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$A=\frac{i}{kr}\mathbf{e}_{\varphi}\otimes\mathbf{e}_{\varphi}+\frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{e}_r^{\times}\varepsilon\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{u}-\frac{1}{\mu_r}\mathbf{e}_r^{\times}\mathbf{u}\otimes\mathbf{e}_r\mu I,$$

$$B=-\frac{1}{\mu_r}\mathbf{e}_r^{\times}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\frac{1}{\varepsilon_r}I\bar{\tilde{\varepsilon}}\mathbf{e}_r^{\times},$$

$$C=\frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{e}_r^{\times}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}-\frac{1}{\mu_r}I\bar{\tilde{\mu}}\mathbf{e}_r^{\times},$$

$$D=\frac{i}{kr}\mathbf{e}_{\varphi}\otimes\mathbf{e}_{\varphi}+\frac{1}{\mu_r}\mathbf{e}_r^{\times}\mu\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{u}-\frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{e}_r^{\times}\mathbf{u}\otimes\mathbf{e}_r\varepsilon I. \quad (5)$$

В выражениях (4), (5) M — блочная матрица, блоки A, B, C и D которой — планальные тензоры (для планального тензора A выполняется $A\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_rA=0$); $\bar{\tilde{\varepsilon}}$ — тензор, взаимный к транспонированному тензору $\tilde{\varepsilon}$ (взаимный тензор $\bar{\alpha}$ определяется формулой $\bar{\alpha}\alpha=\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|$, где $|\alpha|$ — определитель α) [10,14]. Соотношения (5) переходят в аналогичные соотношения для плоскослоистой среды при $r\to\infty$, $\mathbf{e}_r\to\mathbf{q}$, $\mathbf{e}_{\varphi}\to\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — единичный вектор нормали к плоским слоям.

Фундаментальное решение уравнения (4) дается формулой [8]

$$\begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(r)\\ \mathbf{E}_t(r)\end{pmatrix}=\Omega_a^r\left[ikM(r)\right]\begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(a)\\ \mathbf{E}_t(a)\end{pmatrix},$$

$$\Omega_a^r\left[ikM(r)\right]=\int\limits_a^r\big(E+ikM(r)dr\big), \quad E=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\Omega_a^r\left[ikM(r)\right]$, $a\neq 0$ — эволюционный оператор, который выражается через мультипликативный интеграл [19].

Соотношение (6) означает, что, зная начальные векторы $\mathbf{H}_t(a)$ и $\mathbf{E}_t(a)$, мы можем найти тангенциальные компоненты напряженностей полей в любой другой точке r. Введем тензор импеданса $\Gamma(r)$ как величину, которая связывает тангенциальные компоненты напряженностей электрического и магнитного полей $\mathbf{E}_t = \Gamma\mathbf{H}_t$. Исключая векторы $\mathbf{H}_t$ и $\mathbf{E}_t$, из (4) получаем тензорное уравнение Риккати для Γ [9]

$$\frac{1}{ik}\frac{d\Gamma}{dr} + \Gamma B\Gamma + \Gamma A - D\Gamma - C = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) дает два тензора импеданса $\Gamma_1(r)$ и $\Gamma_2(r)$. Таким образом, в круглом слое $r \in (a, b)$, $a \neq 0$ распространяются две волны, которые соответствуют двум независимым решениям и характеризуются импедансами $\Gamma_1(r)$ и $\Gamma_2(r)$. В слоях $0 \le r \le a$ и $b \le r \le \infty$ мы имеем одну волну, амплитуда которой конечна в точках $r = 0$ и $r = \infty$ соответственно. Как для однородного, так и для неоднородного круглого слоя тензор импеданса зависит от r, что не позволяет свести тензорное уравнение Риккати к алгебраическому уравнению. Дифференциальное уравнение (7) может быть решено численно с помощью методов, представленных в статьях [8,9].

Изотропный круглый слой

Рассмотрим однородную изотропную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостью $\varepsilon = \mathrm{const}$ и $\mu = \mathrm{const}$. Тензоры (5) в этом случае принимают вид

$$A = \frac{i}{kr}\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi, \qquad D = \frac{i}{kr}\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi,$$

$$B = \frac{\beta\nu}{k^2\mu r}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} - \mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi) + \frac{u_1}{k^2\mu}\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{e}_\varphi - \frac{u_2}{k^2\mu}\,\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{b},$$

$$C = -\frac{\beta\nu}{k^2\varepsilon r}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} - \mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi) - \frac{u_1}{k^2\varepsilon}\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{e}_\varphi + \frac{u_2}{k^2\varepsilon}\,\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{b},$$

где $u_1 = k^2\varepsilon\mu - \beta^2$, $u_2 = k^2\varepsilon\mu - \nu^2/r^2$.

Решение такой задачи выражается через функции Бесселя и может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(r)\\ \mathbf{E}_t(r)\end{pmatrix} = \Omega_a^r \begin{pmatrix}\mathbf{H}_t(a)\\ \mathbf{E}_t(a)\end{pmatrix}, \quad \Omega_a^r = P(r)P^-(a), \tag{8}$$

где P^- — блочная матрица, псевдообратная P ($P^-P = PP^- = E$) [10,14].

Матрица P определяется планальными тензорами α_1, α_2, β_1, β_2 и равна

$$P(r) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix},$$

$$\alpha_m = F_{\nu\pm}^{(m)}\left(\mathbf{b} \mp \frac{\beta\nu a^2}{u_\pm^2 r}\,\mathbf{e}_\varphi\right)\otimes\mathbf{b} \pm \frac{ika\varepsilon}{u_\pm}\,F_{\nu\pm}^{(m)\prime}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\beta_m = \mp\frac{ika\mu}{u_\pm}\,F_{\nu\pm}^{(m)\prime}\mathbf{e}_\varphi\otimes\mathbf{b} + F_{\nu\pm}^{(m)}\left(\mathbf{b} \mp \frac{\beta\nu a^2}{u_\pm^2 r}\,\mathbf{e}_\varphi\right)\otimes\mathbf{e}_\varphi; \qquad m = 1, 2, \tag{9}$$

где $u_\pm^2 = \pm a^2 u_1 = \pm k^2 a^2(\varepsilon\mu - \beta^2/k^2)$, $F_{\nu+}^{(1)} = J_\nu(u_+ r/a)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν, $F_{\nu+}^{(2)} = Y_\nu(u_+ r/a)$ — функция Бесселя второго рода, $F_{\nu-}^{(1)} = I_\nu(u_- r/a)$ и $F_{\nu-}^{(2)} = K_\nu(u_- r/a)$ — модифицированные функции Бесселя, $F_{\nu\pm}^{(m)\prime}(x) = dF_{\nu\pm}^{(m)}(x)/dx$ — дифференцирование по аргументу функции, верхние индексы 1 и 2 нумеруют независимые решения уравнения Бесселя.

Тензор импеданса для каждой из волн, соответствующей независимому решению уравнения Бесселя, равен

$$\Gamma_m(r) = \beta_m(r)\alpha_m^-(r), \tag{10}$$

где α_m^- — тензор, псевдообратный α_m.

Если заданы начальные амплитуды двух волн $\mathbf{H}_{t1}(a)$ и $\mathbf{H}_{t2}(a)$, то эволюция полей выражается соотношениями

$$\mathbf{H}_{tm}(r) = \alpha_m(r)\alpha_m^-(a)\mathbf{H}_{tm}(a),$$
$$\mathbf{E}_{tm}(r) = \beta_m(r)\alpha_m^-(a)\mathbf{H}_{tm}(a). \tag{11}$$

Эволюционный оператор (8) однородного изотропного слоя равен произведению блочных матриц $P(r)$ и $P^-(a)$ и сам является блочной матрицей. Тензоры α_1, α_2, β_1, β_2 задаются цилиндрическими функциями $F_{\nu\pm}^{(1,2)}$ и модовыми постоянными β и ν. В слое $a \le r \le b$, $a \neq 0$ распространяются две волны, напряженности полей которых даются формулами (11). В слое $0 \le r \le a$ (аналогично $b \le r \le \infty$) одна из независимых волн не удовлетворяет условиям, которые накладываются на $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в точке $r = 0$ ($r = \infty$). Таким образом, в сердцевине и оболочке волновода может распространяться только одна волна.

Дисперсионные уравнения и поляризации мод изотропных волокон

Применим полученные результаты к описанию распространения электромагнитных волн в изотропных волоконных волноводах с круглым поперечным сечением и бесконечной оболочкой. Мы рассмотрим ступенчатые многослойные волноводы и градиентные волокна с неоднородной сердцевиной. Нас интересует метод получения дисперсионных уравнений и поляризационного состояния мод волновода. Для ступенчатого волновода с постоянными диэлектрическими и магнитными проницаемостями сердцевины ε_{co}, μ_{co} и оболочки ε_{cl}, μ_{cl} и радиусом сердцевины a в качестве решений уравнения Бесселя обычно выбирают

$$F_\nu = \begin{cases} F_{\nu+}^{(1)} = J_\nu(u_+ r/a), & r < a,\\ F_{\nu-}^{(2)} = K_\nu(u_- r/a), & r \ge a.\end{cases}$$

Такие решения обеспечивают осциллирующий характер поля в сердцевине и затухание волн в оболочке. Тогда тензоры импеданса (10) на границе $r = a$ (тензоры поверхностного импеданса) принимают вид

$$\Gamma_{co} = -\frac{iu}{ka\varepsilon_{co}} \frac{J_\nu(u)}{J'_\nu(u)} \left(\mathbf{b} - \frac{\beta\nu a}{u^2}\mathbf{e}_\varphi\right) \otimes \left(\mathbf{e}_\varphi + \frac{\beta\nu a}{u^2}\mathbf{b}\right) - \frac{ika\mu_{co}}{u} \frac{J'_\nu(u)}{J_\nu(u)} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{b},$$

$$\Gamma_{cl} = -\frac{iw}{ka\varepsilon_{cl}} \frac{K_\nu(w)}{K'_\nu(w)} \left(\mathbf{b} + \frac{\beta\nu a}{w^2}\mathbf{e}_\varphi\right) \otimes \left(\mathbf{e}_\varphi - \frac{\beta\nu a}{w^2}\mathbf{b}\right) + \frac{ika\mu_{cl}}{w} \frac{K'_\nu(w)}{K_\nu(w)} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{b}, \quad (12)$$

где $u^2 = k^2a^2(\varepsilon_{co}\mu_{co} - \beta^2/k^2)$, $w^2 = k^2a^2(\beta^2/k^2 - \varepsilon_{cl}\mu_{cl})$.

Умножая далее граничные условия

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_t^{(co)}(a) \\ \Gamma_{co}\mathbf{H}_t^{(co)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_t^{(cl)}(a) \\ \Gamma_{cl}\mathbf{H}_t^{(cl)}(a) \end{pmatrix} \quad (13)$$

на блочную матрицу $(\Gamma_{cl} \quad -I)$, получаем уравнение

$$\Theta\mathbf{H}_t^{(co)}(a) = 0, \quad (14)$$

где $\Theta = \Gamma_{cl} - \Gamma_{co}$ — планальный тензор ($\mathbf{e}_r\Theta = \Theta\mathbf{e}_r = 0$).

Таким образом, тензор Θ имеет два собственных вектора $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{H}_t^{(co)}(a)$, которые соответствуют нулевому собственному значению. Это означает, что Θ является диадой, и инвариантное дисперсионное уравнение принимает вид [9]

$$\bar{\Theta}_t = 0, \quad (15)$$

где $\bar{\Theta}_t$ — инвариант, след тензора, взаимного к Θ.

Учитывая соотношение $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_t\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r = 0$ и теорему Гамильтона–Кэли

$$\bar{\Theta} - \bar{\Theta}_t = \Theta(\Theta - \Theta_t), \quad (16)$$

дисперсионное уравнение (15) перепишем в виде [9]

$$\left(\Theta^2\right)_t = \left(\Theta_t\right)^2. \quad (17)$$

Подставляя тензоры импеданса (12) в Θ, в рассматриваемом случае ступенчатого волновода имеем дисперсионное уравнение, которое совпадает с известным соотношением в теории круглых волокон [18],

$$\left(\frac{J'_\nu(u)}{uJ_\nu(u)} + \frac{\mu_{cl}}{\mu_{co}} \frac{K'_\nu(w)}{wK_\nu(w)}\right)\left(\frac{J'_\nu(u)}{uJ_\nu(u)} + \frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_{co}} \frac{K'_\nu(w)}{wK_\nu(w)}\right) = \frac{\beta^2\nu^2}{k^2\varepsilon_{co}\mu_{co}} \frac{\left(u^2+w^2\right)^2}{u^4w^4}.$$

Решение уравнения (14) дает также тангенциальные составляющие вектора напряженности поля на границе раздела двух сред $\mathbf{H}_t^{(co)}(a)$. Действительно, умножая (16) на произвольный вектор $\mathbf{p}$, для которого выполняется $(\Theta - \Theta_t)\mathbf{p} \neq 0$, и сравнивая с (14), получаем

$$\mathbf{H}_t^{(co)}(a) = (\Theta - \Theta_t)\mathbf{p}. \quad (18)$$

Амплитуды независимых волн в произвольной точке сердцевины r определяются согласно соотношениям (11) при $\mathbf{H}_{t1}(a) = \mathbf{H}_t^{(co)}(a)$, $\mathbf{H}_{t2}(a) = 0$. Векторы $\mathbf{H}_t(r)$, $\mathbf{E}_t(r)$ в оболочке находим аналогично, полагая $\mathbf{H}_{t1}(a) = 0$, $\mathbf{H}_{t2}(a) = \mathbf{H}_t^{(co)}(a)$. Полные векторы напряженностей выражаем с помощью матрицы восстановления (см. формулу (3)). Тогда поляризацию мод волновода в сердцевине (аналогично в оболочке) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{(co)}(r) \\ \mathbf{E}^{(co)}(r) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \alpha_1(r) \\ \beta_1(r) \end{pmatrix} \alpha_1^-(a)(\Theta - \Theta_t)\mathbf{p}, \quad (19)$$

причем в эти выражения мы подставляем постоянные распространения β, которые находим из дисперсионного уравнения (17). Таким образом, для решения волноводной задачи необходимо знать тензор Θ. С его помощью мы записываем дисперсионное уравнение (17) и определяем поляризацию мод волновода (19).

В случае многослойного круглого волновода, диэлектрические и магнитные проницаемости которого имеют вид

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{co}, & r < a_0, \\ \varepsilon_j, & a_{j-1} \le r \le a_j, \\ \varepsilon_{cl}, & r \ge a_n, \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} \mu_{co}, & r < a_0, \\ \mu_j, & a_{j-1} \le r < a_j, \\ \mu_{cl}, & r \ge a_n, \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n,$$

из граничных условий следует соотношение

$$\Theta\mathbf{H}_t^{(co)}(a_0) = 0, \qquad \Theta = (\Gamma_{cl} - I)\Omega_{a_0}^{a_n}\begin{pmatrix} I \\ \Gamma_{co} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Эволюционный оператор $\Omega_{a_0}^{a_n}$ равен произведению эволюционных операторов (8) каждого из слоев в следующем порядке:

$$\Omega_{a_0}^{a_n} = P_n(a_n)P_n^-(a_{n-1})P_{n-1}(a_{n-1})P_{n-1}^-(a_{n-2})\dots \dots P_1(a_1)P_1^-(a_0). \quad (21)$$

Для градиентного волновода вида

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{co}, & r < a, \\ \varepsilon(r), & a \le r < b, \\ \varepsilon_{cl}, & r \ge b, \end{cases} \qquad \mu = \begin{cases} \mu_{co}, & r < a, \\ \mu(r), & a \le r < b, \\ \mu_{cl}, & r \ge b, \end{cases}$$

из граничных условий получаем выражение, аналогичное (20), но в котором $\Omega_{a_0}^{a_n}$ необходимо заменить на эволюционный оператор неоднородного слоя Ω_a^b. Его можно представить в виде мультипликативного интеграла (6). При численном расчете величину Ω_a^b можно определить двумя способами. Первый состоит в разбиении отрезка (a, b) на n частей, причем в пределах каждого отрезка разбиения (r_j, r_{j+1}), $j = 0 \dots (n-1)$ блочная матрица M считается постоянной и равной $M(r_j)$. Тогда мультипликативный интеграл можно представить произведением экспонент с матричным аргументом

$$\Omega_a^b = \exp\big(ikM(r_{n-1})\Delta r_{n-1}\big)\exp\big(ikM(r_{n-2})\Delta r_{n-2}\big)\dots$$
$$\dots\exp\big(ikM(r_0)\Delta r_0\big), \qquad (22)$$

где $r_n = b$, $r_0 = a$, $\Delta r_j = r_{j+1} - r_j$.

Эволюционный оператор однородного слоя также может вычисляться с помощью формулы (22). Использование второго способа предполагает разбиение неоднородного слоя на n однородных слоев. В этом случае для вычисления эволюционного оператора можно воспользоваться формулой (21). Выражение (21) определяет мультипликативный интеграл точнее, чем (22), при одинаковом числе слоев n, на которые разбивается неоднородное волокно. С другой стороны, (22) не требует вычисления специальных функций, которые входят в блочную матрицу P, что может сократить время численного расчета мультипликативного интеграла.

Численные расчеты. Выводы

В качестве примера рассмотрим периодическую многослойную структуру вида

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_{co}, & r < a, \\ \varepsilon_{cl}, & a + (j-1)d \le r < a + (j-1/2)d, \\ \varepsilon_{co}, & a + (j-1/2)d \le r < a + jd, \\ \varepsilon_{cl}, & r \ge a + nd, \end{cases}$$

$$\mu = 1, \qquad j = 1, \dots, n,$$

где a — радиус сердцевины волновода, n — число периодов ширины d.

Первую половину периода $d/2$ занимает среда с диэлектрической проницаемостью ε_{cl}, вторую — с $\varepsilon_{co} > \varepsilon_{cl}$. Моды такого волокна определяются из дисперсионного уравнения (17). Планарный тензор Θ вычисляется по формуле (20), а эволюционный оператор равен произведению матриц (21).

На рисунке представлены решения дисперсионного уравнения при $\nu = 0,\ 1,\ 2$. При $\nu = 0$ мы имеем TE- и TM-моды. Для всех других ν моды являются гибридными, т. е. ни одна из продольных компонент полей E_y и H_y не равна нулю. Тип гибридной моды определяется величиной отношения продольных компонент электрического и магнитного полей [18]

$$\delta = \frac{E_y}{iH_y} = \frac{\mathbf{b}\Gamma_{co}(a)(\Theta - \Theta_t)\mathbf{p}}{i\mathbf{b}(\Theta - \Theta_t)\mathbf{p}}.$$

Значение $\delta > 0$ соответствует HE-моде, а $\delta < 0$ — EH-моде. HE_{11}-мода обладает наименьшей частотой

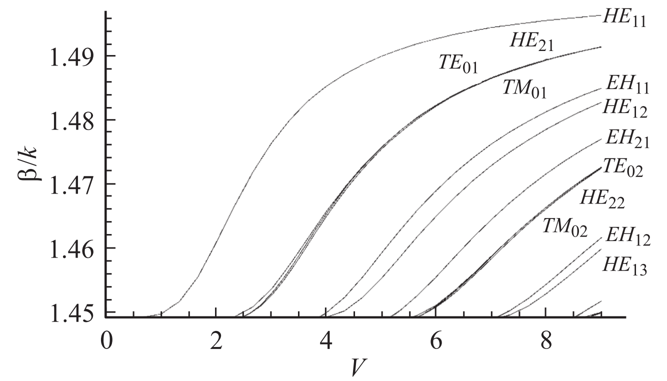

График зависимости безразмерной постоянной распространения β/k от волоконного параметра $V = ka\sqrt{\varepsilon_{co} - \varepsilon_{cl}}$ для мод волновода с периодическим чередованием слоев при $\nu = 0,\ 1,\ 2$. Параметры задачи: $\varepsilon_{co} = 2.25$, $\varepsilon_{cl} = 2.10$, $d = 0.4a$, $n = 5$.

отсечки и является основной модой. Волновод считается одномодовым (поддерживает только основную моду) при значениях волоконного параметра $V = ka\sqrt{\varepsilon_{co} - \varepsilon_{cl}}$, меньших частоты отсечки следующей моды (согласно рисунку, $V < 2.4$).

Таким образом, получены инвариантные дисперсионные уравнения и поляризации мод круглых многослойных изотропных волноводов. Громоздкость выкладок при аналитическом выводе дисперсионных соотношений компенсируется общностью подхода и возможностью алгоритмизировать задачу вне зависимости от сложности сред (в рассматриваемом классе сред) и количества слоев волокна. В случае анизотропных волокон, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости которых комплексны и не зависят от азимутальной координаты, мы можем также использовать полученные формулы для дисперсионного уравнения (17) и поляризации мод (18). При этом постоянные распространения β выражаются комплексными числами, т. е. происходит затухание мод. Если тензоры $\varepsilon(r, \varphi)$, $\mu(r, \varphi)$ неизотропны в поперечном сечении волновода либо имеются отклонения поперечного сечения волокна от круглой формы, то уравнения (2)–(5) неприменимы. В этом случае необходимо решать систему уравнений Максвелла в частных производных для напряженностей электрического и магнитного полей.

Список литературы

[1] *Willner A.E.* // OPN Trends. 2002. Vol. 1. N 3. P. 16–21.
[2] *Zweck J., Lima Jr. I.T., Sun Yu.* et al. // Opt. Phot. News. 2003. Vol. 14. N 11. P. 30–35.
[3] *Андронова А.И., Малыкин Г.Б.* // УФН. 2002. Т. 172. № 8. С. 849–873.
[4] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Опт. и спектр. 2003. Т. 95. Вып. 4. С. 646–656.
[5] *Zenteno L.A., Walton D.T.* // Opt. Phot. News. 2003. Vol. 14. N 3. P. 39–41.

[6] *Киян Р.В., Фотиади А.А., Шакин О.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 24–28.
[7] *Борисов А.Г., Волкова Т.В., Ганьшин В.А.* и др. // Опт. журнал. 2003. Т. 70. № 9. С. 9–13.
[8] *Barkovskii L.M., Borzdov G.N., Lavrinenko A.V.* // J. Phys. A. 1987. Vol. 20. P. 1095–1106.
[9] *Borzdov G.N.* // J. Math. Phys. 1997. Vol. 38. N 12. P. 6326–6366.
[10] *Барковский Л.М., Фурс А.Н.* Операторные методы описания оптических полей в сложных средах. Минск: Беларуская навука, 2003. 286 с.
[11] *Барковский Л.М., Фурс А.Н.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. С. 632–639.
[12] *Loudon R.* // OPN Trends. 2003. Vol. 3. N 1. P. 6–11.
[13] *Федоров Ф.И.* Оптика анизотропных сред. Минск: Изд-во АН БССР, 1958. 380 с.
[14] *Федоров Ф.И.* Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976. 456 с.
[15] *Barkovskii L.M., Borzdov G.N., Fedorov F.I.* // J. Mod. Opt. 1990. Vol. 37. P. 85–97.
[16] *Краснушкин П.Е., Байбулатов Р.Б.* // ДАН СССР. 1968. Т. 182. № 2. С. 294–297.
[17] *Stratonnikov A.A., Bogatov A.P., Drakin A.E.* et al. // J. Opt. A. 2002. Vol. 4. P. 535–539.
[18] *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512 с.
[19] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.