01

Вклад вторичных гармоник возмущения в сепаратрисное отображение гамильтоновой системы

© В.В. Вечеславов

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

(Поступило в Редакцию 6 июля 2004 г.)

В литературе уже обсуждалась особая роль, которую могут играть в нелинейных гамильтоновых системах низкочастотные вторичные гармоники, возникающие на сумме и разности явно входящих в гамильтониан первичных частот. Эти гармоники имеют второй порядок малости и составляют весьма незначительную долю возмущения. Несмотря на это, их вклад в амплитуду сепаратрисного отображения системы при определенных условиях может на несколько порядков превышать вклады от первичных частот и тем самым полностью определять формирование динамического хаоса. В настоящей работе дан обзор полученных по этой теме на сегодняшний день теоретических и численных результатов. В качестве примера приведен маятник, возмущение которого представлено в гамильтониане двумя несимметричными гармониками с высокими и близкими по модулю частотами. Получено аналитическое выражение вклада вторичной гармоники в амплитуду сепаратрисного отображения этой системы и с его помощью исследован не рассмотренный ранее случай весьма низких вторичных частот. Указаны области, где амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер хаотического слоя вообще от нее не зависит. Приведено сравнение результатов теории и численного счета.

История вопроса

Как известно, в гамильтониановых системах с разделенным на хаотическую и регулярную компоненты фазовым пространством формирование хаоса определяется взаимодействием нелинейных резонансов. В конкретных ситуациях один из резонансов объявляется основным и вблизи него выбираются начальные условия, а остальные рассматриваются как возмущение. Наиболее интересной и неожиданной оказалась динамика в окрестности сепаратрис основного резонанса — особых траекторий, отделяющих области с вращающейся (вне резонанса) и колеблющейся (внутри резонанса) фазой. Сравнительно недавно здесь обнаружились новые любопытные детали, о которых необходимо сказать.

Всегда считалось, что хаос возникает именно вблизи сепаратрис, поскольку период движения по ним бесконечен и взаимодействие резонансов в этой области всегда существенно [1–3]. Оказалось, однако, что это представление справедливо только для систем с аналитическим потенциалом, фурье-амплитуды которого убывают экспоненциально. При этом возмущение расщепляет каждую сепаратрису на две отдельные ветви, которые заполняют узкую область, образуя хаотический слой. Напомним, что в возникающем на месте ращепленных сепаратрис хаотическом слое следует различать три части: верхнюю (фаза x вращается сверху $p > 0$), среднюю (фаза колеблется) и нижнюю (фаза x вращается снизу $p < 0$).

В случае гладкого потенциала со степенным законом убывания фурье-амплитуд ситуация может оказаться качественно иной. Примеры нерасщепленных сепаратрис (как целых, так и дробных резонансов) и отсутствия на их месте хаотического слоя в кусочно-линейных системах приведены и обсуждаются в работах [4–6]. Следует особо подчеркнуть, что сами системы при этом остаются неинтегрируемыми и их сепаратрисы сохраняются в условиях сильного локального хаоса.

Выяснилось также, что на процесс образования хаоса существенно влияет и характер самого возмущения, в первую очередь его спектральный состав. Напомним кратко историю этого вопроса.

Пусть система представлена гамильтонианом маятника

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) + V(x, t) \tag{1}$$

с единственной гармоникой возмущения

$$V(x, t) = \varepsilon \cos\left(\frac{n}{2} x - \Omega t\right) \tag{2}$$

и положительными параметрами n, Ω. Эта гармоника также является резонансом, на фазовой плоскости она располагается выше основного резонанса маятника, поэтому ее удобно назвать верхней гармоникой.

Как установил Чириков [1], теоретическая амплитуда сепаратрисного отображения верхней части хаотического слоя, порожденная верхней гармоникой возмущения (2), связана соотношением

$$W(\Omega, n) = \varepsilon \Omega A_n(\Omega) \tag{3}$$

с интегралами Мельникова–Арнольда

$$A_n(\Omega > 0) = \frac{2\pi}{(n-1)!} \frac{\exp(\pi\Omega/2)}{\mathrm{sh}(\pi\Omega)} (2\Omega)^{n-1} \left[1 + f_n(\Omega)\right], \tag{4}$$

где входящие в квадратные скобки функции $f_n(\Omega)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$f_1 = f_2 = 0,$$

$$f_{n+1} = f_n - (1 + f_{n-1})\,\frac{n(n-1)}{4\Omega^2}, \quad n \geq 3. \tag{5}$$

Замена в (2) Ω на $-\Omega$ превращает верхнюю гармонику в нижнюю и при вычислении ее вклада в амплитуду сепаратрисного отображения верхней части слоя надо в формуле (3) использовать существенно иное выражение

$$A_n(\Omega < 0) = (-1)^n A_n(|\Omega|)\exp(-\pi|\Omega|). \tag{6}$$

Следует особо подчеркнуть, что при выводе соотношений (3)–(6) в работе [1] не делалось никаких упрощающих предположений и допущений и они справедливы при любой величине Ω из интервала $0 < |\Omega| < \infty$. Заметим также, что интегралы (4) при изменении частоты Ω вместе с множителем в квадратных скобках проходят через нули, число которых определяется индексом интеграла. Мельникова–Арнольда n.

Исследования Чирикова показали, что для системы с симметричным возмущением вида

$$V(x,t) = \varepsilon\left[\cos\left(\frac{n}{2}x - \Omega t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}x + \Omega t\right)\right] \tag{7}$$

амплитуда W сепаратрисного отображения и энергетический размер хаотического слоя

$$w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} = \Omega W \tag{8}$$

в высокочастотном пределе $\Omega \to \infty$ с ростом частоты убывают экспоненциально и что все три части слоя имеют одинаковую ширину (здесь $w = p^2/2 + \cos x - 1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии).

В недавней работе [7] также для симметричной системы (1), (7) рассматривалась низкочастотная асимптотика $\Omega \to 0$ и было найдено, что в этом пределе амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а ширина слоя вообще от нее не зависит. Обе эти асимптотики устроены относительно просто и наиболее трудной для анализа является область средних частот, где соответствует какой-либо малый (или большой) параметр адиабатичности. Весьма полезными здесь оказались так называемые резонансные инварианты, которые неплохо передают топологию отдельных резонансов. Такие инварианты первых трех порядков, соответствующие резонансам 1:1, 1:2 и 1:3, построены для стандартного отображения Чирикова в работе [8] и для одночастотного сепаратрисного отображения в [9]. Выражения для инвариантов двойной частоты, введенные специально для изучения хаоса в окрестности нулей интегралов Мельникова–Арнольда, получены недавно в [10].

Несимметричное возмущение, насколько нам известно, впервые рассмотрено в работах [11,12], где исследовался гамильтониан маятника (1) при воздействии на него двух гармоник с различными частотами

$$V(x,t) = \varepsilon_1\cos(x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2\cos(x - \Omega_2 t). \tag{9}$$

Амплитуды этих гармоник $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ll 1$ предполагались малыми, а частоты — высокими $|\Omega_1|,\ |\Omega_2| \gg 1$.

Именно в этом случае в возмущении возникают вторичные гармоники порядка $\sim \varepsilon_1\varepsilon_2$ с частотами

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1, \tag{10}$$

которые при $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ll 1$ оказываются много слабее первичных (см. пример ниже).

Уже первые численные эксперименты с системой (1), (9) позволили обнаружить тот удивительный на первый взгляд факт, что именно эти весьма слабые вторичные гармоники возмущения при определенных условиях полностью определяют амплитуду сепаратрисного отображения и размер хаотического слоя.

В работе [12] рассмотрен пример системы с параметрами $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.075$, $\Omega_1 = 13$, $\Omega_2 = -10$, причем образующаяся на сумме частот $\Delta\Omega_+ = 3$ вторичная гармоника имела в возмущении амплитуду $\approx 4.5 \cdot 10^{-5}$, что в ~ 1700 раз меньше амплитуд первичных гармоник. Однако ее вклад в амплитуду отвечающего за образование хаоса сепаратрисного отображения верхней части слоя превысил суммарный вклад от первичных гармоник почти в 400 раз. Размеры отдельных частей слоя оказались при этом существенно различными. Все это есть следствие упоминавшейся выше экспоненциальной зависимости ширины слоя от частоты при $\Omega \gg 1$, что и позволяет очень слабым, но низкочастотным вторичным гармоникам решающим образом влиять на образование хаоса. Эта важная роль вторичных гармоник на сумме частот была также подтверждена и для гладких систем [13].

Наконец, в недавней работе [14] рассмотрено несимметричное возмущение достаточно общего вида

$$V(x,t) = \varepsilon_1\cos(m_1 x - \Omega_1 t) + \varepsilon_2\cos(m_2 x - \Omega_2 t), \tag{11}$$

где m_1 и m_2 — произвольные положительные целые числа.

Напомним, что именно эти параметры возмущения m_1 и m_2 определяют структуру (в частности, число нулей) интегралов Мельникова–Арнольда (4), (5). В окрестности этих нулей динамический хаос формируется с особенностями, которые обсуждены в [14, раздел 3]. Мы также будем ниже рассматривать систему (1) с возмущением (11). Заметим попутно, что нам придется иметь дело с интегралами (4), (5) только четных индексов n, поскольку m_1 и m_2 — целые числа.

Амплитуды вторичных гармоник

Амплитуды вторичных гармоник возмущения заранее неизвестны и их необходимо найти. Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и способ получения приближенных аналитических соотношений был предложен в работе [11]. Следуя этой работе, сделаем в (1), (11) замену переменных, введя вместо координаты $x(t)$ и импульса $p(t)$ их отклонения от значений на невозмущенной сепаратрисе $x_s(t) = 4\,\mathrm{arctg}(e^t)$, $p_s(t) = 2\sin(x_s(t))$

$$y(t) = x(t) - x_s(t),$$
$$u(t) = p(t) - p_s(t), \tag{12}$$

и с помощью производящей функции $F_2(u, x, t) = [p_s(t) - u][x - x_s(t)]$ построим новый гамильтониан

$$H(y, u, t) = \frac{u^2}{2} + \cos y \cos x_s(t) - \sin y \sin x_s(t) + y \sin x_s(t) + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k \big[\cos(m_k y) \cos(m_k x_s(t) - \Omega_k t) - \sin(m_k y) \sin(m_k x_s(t) - \Omega_k t)\big]. \tag{13}$$

Учитывая слабость возмущения, полагаем $|y(t)| \ll 1$, производим в (13) замены $\cos(my) \to 1 - (my)^2/2$, $\sin(my) \to my$ и находим уравнение

$$d^2y/dt^2 = y\Big[\cos x_s + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t)\Big] + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t).$$

Обозначим через Δy_ε разность между левой и правой частями этого уравнения

$$\Delta y_\varepsilon = \frac{d^2y}{dt^2} - y\Big[\cos x_s + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k^2 \cos(m_k x_s - \Omega_k t)\Big] - \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t). \tag{14}$$

Нас интересует только вынужденное (исчезающее при $\varepsilon \to 0$) решение y_ε, которое удобно находить последовательными приближениями, стремясь свести Δy_ε к нулю [11]. После двух приближений имеем

$$y_\varepsilon^{(2)}(t) \approx -\sum_{k=1}^{2} \frac{\varepsilon_k m_k}{(m_k p_s - \Omega_k)^2} \sin(m_k x_s - \Omega_k t) - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2} \Bigg\{ \Big[\frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} + \frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2}\Big] \times \frac{\sin(m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t)}{(m_+ p_s - \Delta\Omega_+)^2} + \Big[\frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} - \frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2}\Big] \times \frac{\sin(m_- x_s - \Delta\Omega_- t)}{(m_- p_s - \Delta\Omega_-)^2} \Bigg\} + \ldots, \tag{15}$$

где не выписаны второстепенные члены и введены обозначения для суммы и разности параметров возмущения $m_+ = m_1 + m_2$, $m_- = m_2 - m_1$.

В работе [14] нас интересовали в основном окрестности нулей интегралов (4), которые располагаются при значениях частоты $\Delta\Omega_\pm$ порядка единицы, поэтому для упрощения выражений во всех знаменателях формулы (15) в [14] (где она фигурирует под номером (16)) были опущены члены вида mp_s. В настоящей работе мы планируем рассмотреть случай очень низких вторичных частот $\Delta\Omega_\pm \ll 1$ (см. следующий раздел), поэтому отказываемся от этих упрощений и используем далее точные формулы.

Возвращаясь к системе (1), (11), положим в ней $x = x_s(t) + y_\varepsilon^{(2)}(t)$. Поскольку движение происходит вблизи невозмущенной сепаратрисы, введем замены $\cos my \to 1$, $\sin my \approx my_\varepsilon^{(2)}$ и перепишем выражение для возмущения (11) в виде

$$V(y, t) \approx -y_\varepsilon^{(2)}\Big[\sin x_s + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k m_k \sin(m_k x_s - \Omega_k t)\Big]. \tag{16}$$

Подставив (15) в (16), убеждаемся, что низкочастотные гармоники на сумме и разности частот (только они представляют интерес) могут проникнуть в возмущение двумя путями. Один из них реализуется при взаимодействии суммы в (15) с первичными гармониками возмущения в (16). Это приводит к появлению в возмущении гармоник как на сумме частот

$$\varepsilon_+ \cos(m_+ x_s - \Delta\Omega_+ t),$$
$$\varepsilon_+ = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2}\Big[\frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2} + \frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2}\Big], \tag{17}$$

так и на их разности

$$\varepsilon_-[\cos(m_- x_s - \Delta\Omega_- t)],$$
$$\varepsilon_- = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 m_2}{2}\Big[\frac{m_1}{(m_2 p_s - \Omega_2)^2} - \frac{m_2}{(m_1 p_s - \Omega_1)^2}\Big]. \tag{18}$$

Уместно заметить, что формулы (17), (18) описывают вклады от взаимодействий гармоник возмущения друг с другом.

Второй путь — взаимодействие членов $\sim \varepsilon_1\varepsilon_2$ в (15) с порожденным основным резонансом членом $\sin x_s$ в (16). Здесь возникают по две вторичных гармоники возмущения на сумме частот

$$\frac{\varepsilon_+}{2}\Bigg\{\frac{\cos((m_+ - 1)x_s - \Delta\Omega_+ t)}{[(m_+ - 1)p_s - \Delta\Omega_+]^2} - \frac{\cos((m_+ + 1)x_s - \Delta\Omega_+ t|)}{[(m_+ + 1)p_s - \Delta\Omega_+]^2}\Bigg\}, \tag{19}$$

где значение ε_+ дается формулой (17), и на разности частот

$$\frac{\varepsilon_-}{2}\Bigg\{\frac{\cos((m_- - 1)x_s - \Delta\Omega_- t)}{[(m_- - 1)p_s - \Delta\Omega_-]^2} - \frac{\cos((m_- + 1)x_s - \Delta\Omega_- t|)}{[(m_- + 1)p_s - \Delta\Omega_-]^2}\Bigg\}, \tag{20}$$

где значение ε_- дается формулой (18).

Формулы (19), (20) описывают вклады от взаимодействия порожденных возмущением членов с основным резонансом.

Знание амплитуд вторичных гармоник в возмущении позволяет с помощью соотношения (3) записать их амплитуды в сепаратрисном отображении через интегралы Мельникова–Арнольда (4)

$$W_{\pm} = -\tilde{\varepsilon}_{\pm} a_{\pm} \Delta\Omega_{\pm} \left[A_{2m_{\pm}}(\Delta\Omega_{\pm}) + \frac{A_{2m_{\pm}-2}(\Delta\Omega_{\pm})}{2[(m_{\pm}-1)p_s - \Delta\Omega_{\pm}]^2} - \frac{A_{2m_{\pm}+2}(\Delta\Omega_{\pm})}{2[(m_{\pm}+1)p_s - \Delta\Omega_{\pm}]^2} \right], \quad (21)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\pm} = \frac{m_1 m_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[\frac{m_1}{[m_2 p_s - \Omega_2]^2} \pm \frac{m_2}{[m_1 p_s - \Omega_1]^2} \right], \quad (22)$$

где в нижних индексах верхние знаки относятся к сумме частот, нижние — к разности и в зависимость (21) введены подгоночные эмпирические коэффициенты a_+ и a_-.

Практика применения формулы (21) показала, что главная роль в ней принадлежит первому члену в квадратных скобках.

Как отмечалось выше, при выводе основных формул (21), (22) не делались никакие упрощающие предположения и они пригодны при любых значениях первичных частот [14]. Но в следующем разделе мы подробно рассмотрим случай очень низкочастотной вторичной гармоники (возникающей на сумме двух близких по модулю первичных частот), где такие упрощения оказываются уместны.

Случай близких первичных частот

Пусть возмущение в гамильтониане содержит две близкие по модулю и разные по знаку частоты $\Omega_1 \approx |\Omega_2| \gg 1$. Интерес здесь представляет только низкочастотная вторичная гармоника на сумме частот $\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2 \ll 1$. Вторичная гармоника на разности частот оказывается много слабее (а при равных параметрах возмущения $m_1 = m_2$ она вообще не возникает; см. формулу (22)). По этой причине в нижних индексах формул (21), (22) мы будем впредь использовать только знак плюс.

Дальнейшие упрощения связаны со значениями интегралов Мельникова–Арнольда (4) в низкочастотном пределе $\Delta\Omega_+ \to 0$. Здесь существенным оказывается асимптотическое выражение для суммы в квадратных скобках, которое при четных значениях индекса $n = 2, 4, 6, \ldots$ записывается в виде

$$1 + f_n(\Delta\Omega_+) \to s_n(\Delta\Omega_+) = \frac{c_n}{\Delta\Omega_+^{n-2}}, \quad \Delta\Omega_+ \to 0, \quad (23)$$

где для коэффициентов c_n в (23) с помощью рекуррентных соотношений (5) находим

$$c_2 = 1, \quad c_4 = -2, \quad c_6 = \frac{23}{2}, \quad c_8 = -132, \quad c_{10} = \frac{5067}{2} \ \ldots. \quad (24)$$

Используя последние выражения, можно показать, что в низкочастотном пределе интегралы (4) перестают зависеть от частоты и стремятся к неким постоянным величинам K_n, значения которых определяются только индексом n

$$K_n = A_n(\Omega \to 0) = \frac{2^n}{(n-1)!} c_n. \quad (25)$$

Амплитуда сепаратрисного отображения в низкочастотном пределе оказывается, таким образом, линейной функцией частоты

$$W_+ = -\tilde{\varepsilon}_+ \Delta\Omega_+ \left[K_{2m_+} + \frac{K_{2m_+-2}}{2[(m_+-1)p_s]^2} - \frac{K_{2m_++2}}{2[(m_++1)p_s]^2} \right] \approx -\tilde{\varepsilon}_+ C_+ \Delta\Omega_+. \quad (26)$$

В работе [7] показано, что если амплитуда сепаратрисного отображения изменяется по линейному закону, то размер верхней части хаотического слоя вообще перестает зависеть от частоты. Численную проверку этих фактов мы проведем в следующем разделе, а сейчас уместно напомнить некоторые связанные с сепаратрисным отображением сведения.

Это отображение, впервые введенное в работе [15], описывает поведение движущейся вблизи сепаратрисы основного резонанса гамильтоновой системы и в случае маятника имеет вид

$$\overline{w} = w + \sum_l W_l \sin \Omega_l t_\pi, \quad \overline{t_\pi} = t_\pi + \ln\left(\frac{32}{|\overline{w}|}\right); \quad l = 1, 2, \ldots, \quad (27)$$

где $w = p^2/2 + \cos x - 1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии (см. (8)), t_π — моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия $x = \pi$.

Под знаком суммы должны быть перечислены все существенные для исследуемой части хаотического слоя гармоники, как первичные (явно входящие в возмущение (11)), так и вторичные (которых в (11) нет).

При несоизмеримых частотах Ω_l моменты t_π отсчитываются в шкале непрерывного времени. Если же частоты кратны некоторой опорной частоте Ω_0, то последнее соотношение в (27) можно (но не обязательно) переписать в виде

$$\overline{\psi_\pi} = \psi_\pi + \Omega_0 \ln\left(\frac{32}{|\overline{w}|}\right), \quad \psi_\pi = \Omega_0 t_\pi \pmod{2\pi}. \quad (28)$$

Итерации сепаратрисного отображения, как известно, являются самым быстрым и экономным способом определения размеров отдельных частей хаотического слоя, и это оправдывает усилия, направленные на его построение.

Нам предстоит сравнить между собой величины теоретически и численно найденных амплитуд сепаратрисного отображения и уместно кратко напомнить алгоритм численного построения этого отображения (подробности в [11]). Прежде всего на линии симметрии $x = \pi$ с высокой точностью отыскивается центральная гомоклинная точка p_{fb} как граница между вращением и колебанием фазы. Вблизи этой точки гарантированно в исследуемой части слоя выбирается узкий по импульсу интервал $x = \pi$, $p_{fb} < p < p_{fb} + \delta p$, из которого запускается случайная траектория. Эта траектория либо совершает предписанное число периодов движения, либо прерывается из-за перехода в другую часть слоя. В обоих случаях из того же интервала запускается новая случайная траектория, пока не наберется требуемое число периодов N, Для каждого периода определяется отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии

$$w = 32\exp(-T), \tag{29}$$

где T — интервал времени между двумя последовательными прохождениями положения устойчивого равновесия $x = \pi$.

Определяя изменение $\delta w = \overline{w} - w$ энергии для каждой пары соседних периодов и приписывая его к общему для этой пары моменту времени t_π, можно построить сепаратрисное отображение (27) $(\delta w)_k$, $t_{\pi,k}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Мы будем для определенности всегда исследовать верхнюю часть слоя. Именно внешние части слоя (верхняя и нижняя) представляют основной интерес, поскольку участвуют в перекрытии соседних резонансов и возникновении глобального хаоса.

Сравнение результатов теории и численного эксперимента

Как отмечалось выше, исследование окрестностей нулей интегралов Мельникова–Арнольда выполнено в [14], и в настоящей работе мы ими интересоваться не будем. По этой причине в этом разделе рассматривается возмущение (11) с фиксированными параметрами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 1 \tag{30}$$

при различных значениях первичных частот Ω_1, Ω_2. Отметим, что интегралы Мельникова–Арнольда (4) при таком выборе возмущения не имеют нулей во всем интервале частот $0 < \Omega < \infty$.

Чтобы работать с величинами порядка единицы, будем использовать далее так называемые приведенные значения амплитуды сепаратрисного отображения и энергетического размера верхней части хаотического слоя вида

$$W^* = \frac{10^3 W}{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad w^*_{tp} = \frac{10^3 w_{tp}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \tag{31}$$

Начнем с симметричного случая равных по модулю частот

$$\Omega_1 = 16.0, \quad \Omega_2 = -16.0. \tag{32}$$

Вычисленные по формулам Чирикова (3)–(6) теоретическая амплитуда сепаратрисного отображения и полуширина слоя оказались равны $W^* = 3.92 \cdot 10^{-2}$ и $w^*_{tp} \approx 0.65$ соответственно. Численное построение отображения по формулам (27), (28) и последующие его итерации подтверждают эти цифры, и картина имеет вид синусоиды с частотой $\Omega = 16.0$.

Казалось бы, небольшое изменение одной из частот не должно резко изменить полученный выше результат. Для проверки этого предположения внесем в возмущение (32) слабую несимметрию

$$\Omega_1 = 16.0, \quad \Omega_2 = -15.9, \quad \Delta\Omega_+ = 0.1. \tag{33}$$

На рис. 1 представлены данные численного счета. Видно, что сепаратрисное отображение осталось одночастотным, но его амплитуда возросла примерно в 30 раз ($W^* = 1.20$) и, что самое важное, оно с высокой частоты $\Omega = 16.0$ перестроилось на очень низкую частоту вторичной гармоники $\Delta\Omega_+ = 0.1$. Размер верхней части слоя вырос при этом более чем в два раза $w^*_{tp} \approx 1.55$. Заметим попутно, что суммарный вклад в амплитуду W первичных гармоник возмущения составил менее двух процентов. Мы вновь сталкиваемся с уже знакомой ситуацией, когда формирование хаоса в верхней части слоя полностью определяется слабой, но низкочастотной вторичной гармоникой [11,12].

В работе [7] исследовался низкочастотный предел $\Omega \to 0$ маятника для симметричного возмущения и было показано существование областей, в которых амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер хаотического слоя от нее не зависит. Но в [7] эти низкие частоты являлись первичными и явно входили в гамильтониан (сравнительно редкий для практики случай), а вторичные гармоники вообще не возникали. Рассматриваемая в настоящей работе ситуация

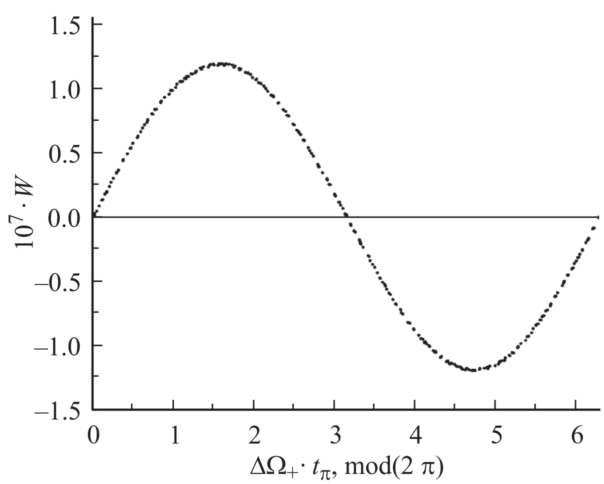

Рис. 1. Численное построение сепаратрисного отображения (27), (28) для системы (1), (11) с частотами $\Omega_1 = 16.0$, $\Omega_2 = -15.9$, $\Delta\Omega_+ = 0.1$. Амплитуда равна $W = 1.20 \cdot 10^{-7}$.

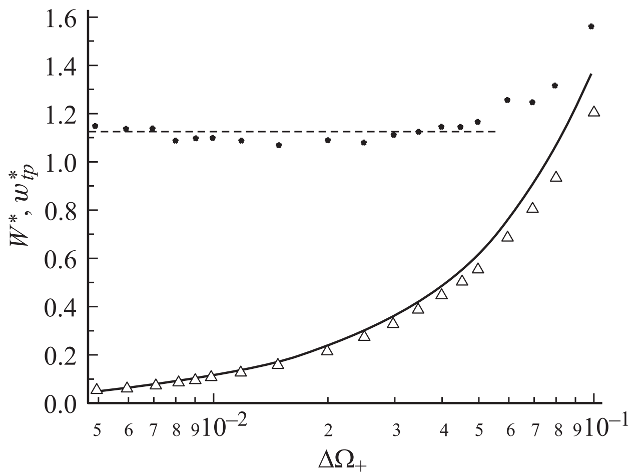

Рис. 2. Система (1), (11) с частотами $\Omega_1 = 16.0$, $\Omega_2 = \mathrm{var}$, $\Delta\Omega_+ > 0$. Приведенная амплитуда сепаратрисного отображения W^*: треугольники — численный счет, сплошная линия построена по формуле (21) при $a_+ = 0.4$. Приведенный размер верхней части хаотического слоя w^*_{tp}: звездочки — численная итерация сепаратрисного отображения (27), пунктир — область $w^*_{tp} \approx \mathrm{const}$.

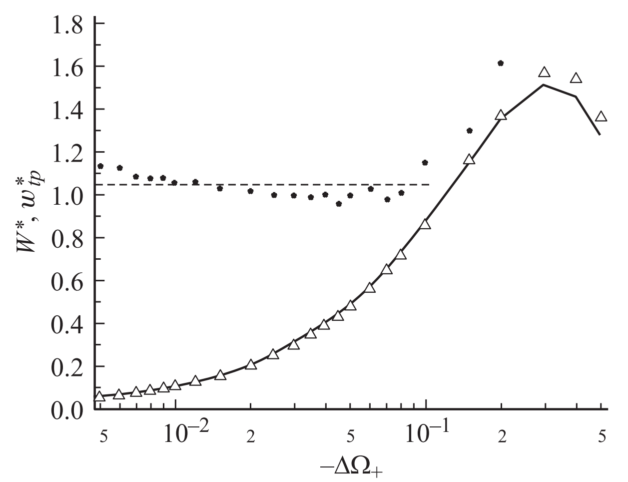

Рис. 3. Система (1), (11) с частотами $\Omega_1 = 16.0$, $\Omega_2 = \mathrm{var}$, $\Delta\Omega_+ < 0$. Остальные обозначения те же, что и на рис. 2.

качественно иная: в возмущении имеются как высокие первичные, так и низкие вторичные частоты. Интересно выяснить, какие зависимости обнаружатся при высоких первичных частотах, если их сумму устремить к нулю.

На рис. 2, 3 показано поведение приведенных (см. формулу (31)) величин амплитуды сепаратрисного отображения и размера верхней части хаотического слоя как для верхних, так и для нижних вторичных гармоник (нижние индексы в W^*_+ здесь опущены). Эти рисунки демонстрируют неплохое качественное согласие теории и численного счета. Мы убеждаемся в том, что при $\Delta\Omega_+ \to 0$ для вторичных гармоник имеют место те же закономерности, что и для низкочастотных первичных гармоник при симметричном возмущении: амплитуда сепаратрисного отображения растет линейно с частотой, а размер слоя практически от нее не зависит. Вместе с тем обращает на себя внимание тот факт, что предсказанная теорией независимость размера хаотического слоя от частоты выполняется лишь приближенно и заметно нарушается на краях указанного интервала. Рост размера слоя на правом краю этого интервала естественно связан с выходом из области низкочастотной асимптотики. Отклонение на левом краю можно объяснить тем, что вклад вторичной гармоники в амплитуду сепаратрисного отображения становится соизмерим с вкладом от первичной частоты и само отображение перестает быть одночастотным.

Заключение

В описанных выше исследованиях по выяснению деталей формирования динамического хаоса в гамильтоновых системах широко использована модель маятника, находящегося под действием различных гармонических возмущений. Эта модель, как и ее дискретный аналог — стандартное отображение Чирикова, является весьма популярной и часто применяется в нелинейной динамике.

Наиболее подробно рассмотрен случай, когда возмущение представлено в гамильтониане двумя гармониками с различными частотами. Приведены теоретические и экспериментальные факты, которые заставляют признать, что возникающие на сумме и разности этих частот вторичные гармоники — реальные объекты. При определенных условиях именно они решающим образом влияют на образование хаотической компоненты движения.

Вместе с тем представленные здесь аналитические соотношения носят приближенный характер и для согласия с численным экспериментом нуждаются в использовании поправочных эмпирических коэффициентов (см. формулу (21)), природу которых еще предстоит прояснить. Построение полноценной теории гамильтоновых систем требует, по нашему мнению, дальнейшего экспериментального и теоретического исследования участия вторичных гармоник в формировании динамического хаоса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке комплексной научной программы РАН „Математические методы в нелинейной динамике“.

Список литературы

[1] *Chirikov B.V.* // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 263.
[2] *Lichtenberg A., Lieberman M.* Regular and Chaotic Dynamics. Berlin: Springer, 1992.
[3] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
[4] *Bullett S.* // Commun. Math. Phys. 1986. Vol. 107. P. 241.
[5] *Вечеславов В.В.* Препринт ИЯФ. Новосибирск, 2000. № 2000-27. E-print archive nlin. CD/0005048.

[6] *Вечеславов В.В., Чириков Б.В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 3. С. 740.
[7] *Вечеславов В.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 5. С. 1.
[8] *Вечеславов В.В.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 1. С. 20.
[9] *Вечеславов В.В.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 2. С. 20.
[10] *Вечеславов В.В.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. Вып. 2. С. 399.
[11] *Вечеславов В.В.* // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. Вып. 6. С. 2208.
[12] *Вечеславов В.В.* // ПЖЭТФ. 1996. Т. 63. Вып. 12. С. 989.
[13] *Вечеславов В.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 1.
[14] *Вечеславов В.В.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. Вып. 2. С. 1.
[15] *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 54. С. 1590.